<u>Teoría de Intersección</u> (Clases de Chern): $\quad \underset{\text{''def}}{\sigma_{1,1,\dots,1,0,\dots,0}}$ $\leftarrow$ Fijar $\Lambda_0 \simeq k^i$ y consideramos los $W \simeq k^k$ tq $\Lambda_0 \subseteq W$

En cada $Gr(k,n)$ hay clases de Schubert $\sigma_{1^i} \in A^i(Gr(k,n))$.

Consideramos $BGL_k := \varinjlim_{n\to+\infty} Gr(k,n) =: Gr(k,\infty)$.

Para $n >> 0$: $Gr(k,n) \hookrightarrow Gr(k,n+1)$ se tiene $\sigma_{1^i} \in \varinjlim A^i(Gr(k,n)) = A^i(BGL_k)$

<u>Def</u>: Para $i = 1,\dots,k$ se define $c_i := (-1)^i \sigma_{1^i} \in A^i(BGL_k)$ y $c_0 := 1$.
son las clases de Chern. La clase <u>total de Chern</u> es $c := \sum_{i\geq 0} c_i$

Verifican:

① $c_1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)) = H$, $c_0(E) = 1$ $\qquad$ ⚠ $\{\underset{rg\, E = k}{E \to X}\} \overset{\sim}{\longleftrightarrow} \{f_E : X \to BGL_k\}$

② Fórmula de Whitney: $\forall\, 0 \to E' \to E \to E'' \to 0$ exacta $\qquad \boxed{c_i(E) = f_E^* c_i}$
se tiene $c(E) = c(E')\,c(E'')$.

<u>Teo</u> (caracterización): Los c_i se determinan únicamente por ① y ②.
$\llcorner$ Grothendieck

<u>Teo</u>: Si $E \to X$ fibrado globalmente generado de $rg\, E = r$ y $\sigma_0, \dots, \sigma_{r-i} \in H^0(X,E)$ son secciones generales, entonces $Z = \{x \in X,\ (\sigma_0 \wedge \dots \wedge \sigma_{r-i})(x) = 0\}$ es de codim i y representa $c_i(E)$.

<u>Dem</u>: $\dim H^0(X,E) = m < +\infty$, $H^0(X,E) \cong \mathbb{C}^m$. Consideramos el morfismo de evaluación $\mathbb{C}^m \otimes \mathcal{O}_X \simeq \mathcal{O}_X^{\oplus m} \xrightarrow{\varphi} E$, $(f_1,\dots,f_m) \mapsto \sum f_j \tau_j$ con $\{\tau_1,\dots,\tau_m\}$ base de $H^0(X,E)$.

Sea $\mathcal{K} := \ker \varphi \subseteq \mathbb{C}^m \otimes \mathcal{O}_X$ subfibrado de $rg\, \mathcal{K} = m-r$, y consideramos
$\gamma : X \longrightarrow Gr(m-r,m)$, $p \longmapsto \mathcal{K}_p$

Sea $\mathcal{U} := \langle \sigma_0, \dots, \sigma_{r-i} \rangle \subseteq H^0(X,E)$, con $\dim \mathcal{U} = r-i+1$.

En $Gr(m-r,m)$ tenemos $\Sigma_i(\mathcal{U}) := \{W \in Gr(m-r,m),\ \dim(W \cap \mathcal{U}) \geq 1\}$
y $\Sigma_i(\mathcal{U})$ de codim i y representa a $\sigma_{1^i} \in A^i(Gr(m-r,m))$ $\quad$ Notación Fulton vs Grothendieck.

Además, $p \in \gamma^{-1}(\Sigma_i(\mathcal{U})) \iff \mathcal{K}_p \cap \mathcal{U} \neq \{0\} \iff \sigma_0(p), \dots, \sigma_{r-i}(p)$ son l.d.

$\Rightarrow Z = Z(\sigma_0 \wedge \dots \wedge \sigma_{r-i}) = \gamma^{-1}(\Sigma_i(\mathcal{U}))$ tiene codim i y representa

$[Z] = \gamma^*[\Sigma_i(\mathcal{U})] = \gamma^*(\sigma_{1^i}) = c_i(E)$ $\blacksquare$

En cualquier $Gr(k,n)$ tenemos $0 \to \mathcal{S} \to \mathcal{O}_G^{\oplus n} \to \mathcal{Q} \to 0$ suc. tautológica exacta

$\Rightarrow \mathcal{Q}$ es glob. generado ✓ $\{e_1,\dots,e_n\} \to \{\bar{e}_1,\dots,\bar{e}_n\}$ generan $\mathcal{Q}$

Elegir $\bar{e}_1,\dots,\bar{e}_{i+1} \Rightarrow Z = \{p \in G,\ \bar{e}_1(p),\dots,\bar{e}_{i+1}(p) \text{ son l.d.}\}$ codim i

y $c_i(\mathcal{Q}) = [\Sigma_i] \overset{\text{def}}{=} \sigma_i$

$\overset{\text{Whitney}}{\Longrightarrow}$ $c(\mathcal{S}) = \dfrac{c(\mathcal{O}_G^{\oplus n})}{c(\mathcal{Q})}$ $\quad$ y $\quad c(\mathcal{O}_G^{\oplus n}) = c(\mathcal{O}_G)^n = 1$.

$c(Q) = \sum c_i(Q) = 1 + \sigma_1 + \sigma_2 + \ldots$

$\Rightarrow c(S) = \dfrac{1}{1+\sigma_1+\sigma_2+\ldots} = (1+\alpha_1+\alpha_2+\ldots)$ y así $\alpha_i = (-1)^i \sigma_{1^i} =: c_1(S)$.

Teo (Poincaré - Hopf): X var. compleja compleja suave, entonces $c_{top}(X) = \chi_{top}(X)$, con $c_{top} = c_n$, $n = \dim_{\mathbb{C}} X$. y $c_i(X) = c_i(T_X)$

Eg. X hipersup. suave de grado d en $\mathbb{P}^n$, $\chi_{top}(X)$?

$0 \to T_X \to T_{\mathbb{P}^n}|_X \to N_{X/\mathbb{P}^n} \cong \mathcal{O}_X(d) \to 0$

$\Rightarrow c(N_{X/\mathbb{P}^n}) = c_0(N) + c_1(N) = 1 + dH$

$\underline{c(T_{\mathbb{P}^n})}$: $0 \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n} \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)^{\oplus(n+1)} \to T_{\mathbb{P}^n} \to 0$

$\Rightarrow c(T_{\mathbb{P}^n}) = \dfrac{c(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)^{\oplus n+1})}{1} = c(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1))^{(n+1)} = (1+H)^{n+1}$

$\Rightarrow c(T_X) = \dfrac{c(T_{\mathbb{P}^n})|_X}{c(N)} = \dfrac{(1+H)^{n+1}}{1+dH} = \left(1 + (n+1)H + \binom{n+1}{2}H^2 + \ldots\right)\cdot\left(1 - dH + d^2H^2 + \ldots\right)$

$= 1 + \alpha_1 H + \alpha_2 H^2 + \ldots + \alpha_{n-1}H^{n-1}$ con $\alpha_i = c_i(T_X)$, $c_k(X) = 0 \ \forall k \geq n$

y así $c_{n-1}(X) = \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^{n+1+i} \binom{n+1}{i} d^{n-i}$

Eg: $n = 3$, $d = 4$ (Sup. K3): $\chi_{top}(X_4) = 4^3 \cdot 1 - 4^2 \cdot (4) + 4 \cdot 6 = 24$.

Teo (Principio de separación): Probar una identidad en las clases de Chern para todo $E \to X$ es equivalente a probarlo para E tq $E = L_1 \oplus \ldots \oplus L_r$.

Eg: $E \rightsquigarrow c_i(E)$, $E^\vee \rightsquigarrow c_i(E^\vee) = ?$

Si $E = \mathcal{O}_X(D_1) \oplus \ldots \oplus \mathcal{O}_X(D_r)$ "Chern roots"

$\Rightarrow E^\vee = \mathcal{O}_X(-D_1) \oplus \ldots \oplus \mathcal{O}_X(-D_r)$

$c(E^\vee) = (1-D_1)\cdots(1-D_r) = 1 - (D_1 + \ldots + D_r) + \ldots + (-1)^r D_1 \cdots D_r$

$\Rightarrow c_i(E^\vee) = (-1)^i c_i(E)$.