Sesión 4. Cálculo de Schubert

§1. Clases de Schubert

Recuerdo. Consideremos V un $\mathbb{C}$-e.v. de $\dim_{\mathbb{C}} V = n$.
La Grasmanniana $Gr(k, V)$ es el conjunto de subesp. de dim. k de V. El incrustamiento de Plücker

$$G = Gr(k, V) \hookrightarrow \mathbb{P}(\Lambda^k V) = \mathbb{P}^{\binom{n}{k}}$$
$$W = \langle e_1, \dots, e_k \rangle \longmapsto [e_1 \wedge \dots \wedge e_k]$$

es una función biyectiva sobre un cerrado de Zariski, luego G es una variedad proyectiva.
De forma equivalente, G se puede definir como el conjunto de subespacios lineales $(k-1)$-dim. de $\mathbb{P}(V) \simeq \mathbb{P}^{n-1}$.
En este caso, se suele usar la notación $G(k-1, \mathbb{P}(V))$.

Observación. Notar que $\mathbb{P}(V) = Gr(1, V)$.

Pregunta de hoy. ¿Cuál es la teoría de intersección de $Gr(m,n)$? es decir, ¿Cómo es el anillo $A^\cdot(G)$?

Respuesta. Los generadores de $A^\cdot(G)$ corresponden a ciertas subvariedades lineales de incidencia llamadas ciclos de Schubert.

Fijamos $G = Gr(k, V) = Gr(k, n)$. Una bandera completa $\mathcal{V}$ en V corresponde a una secuencia de subespacios

$$\{0\} \subseteq V_1 \subseteq \dots \subseteq V_{n-1} \subseteq V_n = V \quad \text{con } \dim V_i = i.$$

Consideramos una secuencia $a = (a_1, \dots, a_k)$ con

$$n-k \geq a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_k \geq 0.$$

Para cada secuencia a, definimos la célula de Schubert $\Sigma_a(\mathcal{V}) \subseteq G$ como el cerrado

$$\Sigma_a(\mathcal{V}) = \{\Lambda \in G,\ \dim(V_{n-k+i-a_i} \cap \Lambda) \geq i \quad \forall i\}$$

⚠ **Importante.** $[\Sigma_a(\mathcal{V})] \in A(G)$ no depende de la elección de G, pues dos banderas difieren por $A \in GL_n$.

Definición. Las clases $\sigma_a := [\Sigma_a(\mathcal{V})] \in A(G)$ son llamadas clases de Schubert.

Idea. Considerar $\Lambda \subset V$ sub-e.v. de $\dim \Lambda = k$. Si Λ es general, $V_i \cap \Lambda = 0$ para $i \leq n-k$, pero $\dim(V_{n-k+i} \cap \Lambda) = i$ para $i > n-k$. La subvariedad Σ_a consiste de los Λ tal que la condición $\dim V_j \cap \Lambda \geq i$ ocurre a_i pasos "antes de lo esperado".

Notación. Escribimos $\Sigma_{a_1,\dots,a_s}$ en vez de $\Sigma_{a_1,\dots,a_s,0,\dots,0}$, y Σ_{p^r} para $\Sigma_{p,\dots,p}$.

Ejemplos. (1) $\Sigma_1(\mathcal{V}) = \{\Lambda,\ \Lambda \cap V_{n-k} \neq \{0\}\}$.

(2) Más generalmente,

$$\Sigma_{n-k+1-l}(\mathcal{V}) = \{\Lambda,\ \Lambda \cap V_l \neq \{0\}\}$$

parametriza los subespacios que intersectan a un miembro dado de $\mathcal{V}$.

(3) $\Sigma_{(n-j)^k}(\mathcal{V}) = \{\Lambda,\ \Lambda \subseteq V_j\}$, en particular, $\Sigma_{(n-j)^k}(\mathcal{V}) = Gr(k, V_j)$.

(4) $\Sigma_{(n-k)^j}(\mathcal{V}) = \{\Lambda,\ V_j \subseteq \Lambda\}$. Notar que

$$\Sigma_{(n-k)^j}(\mathcal{V}) = \{\Lambda/V_j,\ V_j \subseteq \Lambda \subseteq V\} = Gr(k-j, V/V_j)$$

Lema. (a) Si ordenamos $a = (a_1, \dots, a_k)$, $b = (b_1, \dots, b_k)$ término a término,

$$\Sigma_a \subseteq \Sigma_b \iff a \geq b$$

(b) $\operatorname{codim}(\Sigma_a \subseteq G) = \sum a_i$

(c) $\Sigma_a^0 = \Sigma_a \setminus \left(\bigcup_{b>a} \Sigma_b\right) \simeq \mathbb{A}^{k(n-k)-|a|}$, i.e., las células Σ_a dan una estratificación afín de $Gr(k,n)$.

§2. Teoría de intersección en $G(k,n)$

Los sgtes. dos resultados nos permite entender completamente el anillo de Chow de $G(k,n)$.

Teorema. Las clases de Schubert forman una base de $A(G(k,n))$.

Teorema (Fórmula de Pieri). Para $\sigma_a \in A(G(k,n))$, $b \in \mathbb{Z}$,

$$\sigma_b \cdot \sigma_a = \sum_{\substack{|c|=|a|+b \\ a_i \leq c_i \leq a_{i-1}\ \forall i}} \sigma_c$$

Desde ahora nos centraremos en entender $G(1,3)$.

Consideremos una bandera completa en $\mathbb{P}^3$, i.e.,

$$p \simeq \mathbb{P}^0 \subseteq L \simeq \mathbb{P}^1 \subseteq \Pi \simeq \mathbb{P}^2 \subseteq \mathbb{P}^3$$

En este caso, las células de Schubert son

$$\Sigma_{0,0} = G(1,3) \quad , \quad \Sigma_{1,0} = \Sigma_1 = \{\Lambda, \Lambda \cap L \neq 0\}$$

$$\Sigma_{2,0} = \Sigma_2 = \{\Lambda, p \in \Lambda\} \quad , \quad \Sigma_{1,1} = \{\Lambda, \Lambda \subseteq H\}$$

$$\Sigma_{2,1} = \{\Lambda, p \in \Lambda \subseteq H\}, \ \Sigma_{2,2} = \{\Lambda, \Lambda = L\} = \{L\}$$

Proposición. Las clases $\sigma_{a,b} \in A^{a+b}(G(1,3))$, $0 \leq b \leq a \leq 2$ generan $A(G(1,3))$ como grupo abeliano graduado, y se verifican las relaciones

$$\begin{cases} \sigma_1^2 = \sigma_{1,1} + \sigma_2 \\ \sigma_1 \cdot \sigma_{1,1} = \sigma_1 \cdot \sigma_2 = \sigma_{2,1} \\ \sigma_1 \cdot \sigma_{2,1} = \sigma_{2,2} \\ \sigma_{1,1}^2 = \sigma_2^2 = \sigma_{2,2}, \ \sigma_{1,1} \cdot \sigma_2 = 0 \end{cases}$$

Dem. Podemos tomar banderas

$$\mathcal{V} : p \subseteq L \subseteq H \subseteq \mathbb{P}^3$$
$$\mathcal{V}' : p' \subseteq L' \subseteq H' \subseteq \mathbb{P}^3$$

"situadas de forma general", i.e., cada par de espacios tiene intersección de la dimensión esperada. Primero, notar que

$\Sigma_2 \cap \Sigma_2' = \{\Lambda \mid p \in \Lambda, p' \in \Lambda\} = \{\overline{pp'}\}$, luego

$$\sigma_2^2 = |\Sigma_2 \cap \Sigma_2'| \cdot \sigma_{2,2} = \sigma_{2,2}$$

Además,

$$\Sigma_{1,1} \cap \Sigma_{1,1}' = \{\Lambda \mid \Lambda \subseteq H, \Lambda \subseteq H'\} = \{H \cap H'\}$$

$$\rightsquigarrow \sigma_{1,1}^2 = \sigma_{2,2}$$

Veamos ahora la relación $\sigma_2 \cdot \sigma_{1,1} = 0$.
Para ello, notar que

$$\Sigma_2 = \{\Lambda, p \in \Lambda\}, \quad \Sigma_{1,1}' = \{\Lambda, \Lambda \subseteq H'\}$$

son disjuntos, pues $p \notin H'$ (las banderas son generales).
Ahora, $\Sigma_1 \cap \Sigma_{2,1}' = \{\Lambda \mid \Lambda \cap L \neq \emptyset, p' \in \Lambda \subseteq H'\}$.
Como $L \cap H' = \{q\}$, se tiene que

$$\Sigma_1 \cap \Sigma_{2,1}' = \{\overline{p', q}\} \rightsquigarrow \sigma_1 \cdot \sigma_{2,1} = \sigma_{2,2}.$$

Restan los casos de dim. no complementaria.
Por ejemplo, notar que

$$\Sigma_1 \cap \Sigma_2' = \{\Lambda \mid \Lambda \cap L \neq \emptyset, p' \in \Lambda\}$$

luego corresponde a la célula $\Sigma_{2,1}$ con respecto a una bandera conteniendo p' y $\overline{p', L}$ $\rightsquigarrow \sigma_1 \cdot \sigma_2 = \sigma_{2,1}$.

Similarmente,

$$\Sigma_1 \cap \Sigma'_{1,1} = \{ \Lambda \mid \Lambda \cap L \neq \phi \ , \Lambda \subseteq H' \}$$
$$= \{ \Lambda \mid L \cap H' \in \Lambda \subseteq H' \}$$

i.e, es la célula $\Sigma_{2,1}$ asociada a una bandera considera el punto $L \cap H'$ y H'

$$\rightsquigarrow \sigma_1 \cdot \sigma_{1,1} = \sigma_{2,1} .$$

Finalmente, para calcular σ_1^2, escribimos

$$\sigma_1^2 = \alpha \sigma_2 + \beta \sigma_{1,1} \ , \quad \alpha, \beta \in \mathbb{Z} .$$

Luego,

$$\sigma_1^2 \cdot \sigma_2 = \sigma_1 \cdot (\sigma_1 \cdot \sigma_2) = \sigma_1 \cdot \sigma_{2,1} = \sigma_{2,2} \ ,$$

mientras que

$$(\alpha \sigma_2 + \beta \sigma_{1,1}) \cdot \sigma_2 = \alpha \sigma_{2,2} \quad \rightsquigarrow \quad \alpha = 1$$

De forma similar, se calcula $\beta = 1$. ■

§3. Ejemplos de Geometría Enumerativa.

Pregunta. Dadas curvas $C_1, \dots, C_4 \subseteq \mathbb{P}^3$ de grados d_1, d_2, d_3, d_4, ¿cuántas rectas intersectan traslaciones generales de las 4 curvas?

Proposición. Sea $C \subseteq \mathbb{P}^3$ una curva de $\deg(C) = d$. Si $\Gamma_C := \{ L \in G(1,3) , L \cap C \neq \phi \} \subset G(1,3)$ es el lugar de rectas que intersectan a C, la clase de Γ_C en $A(G(1,3))$ está dada por

$$[\Gamma_C] = d \, \sigma_1 \in A^1(G(1,3))$$

Demostración. Consideremos la variedad de incidencia
$$\Sigma = \{ (p, L) \in C \times G(1,3) \,,\, p \in L \},$$
que por def. verifica $pr_2(\Sigma) = \Gamma_C$.

La fibra de $pr_1 : \Sigma \to C$ sobre $p \in C$ genérico es
$$pr_1^{-1}(p) = \{ L \in G(1,3) \,,\, p \in L \} \simeq \mathbb{P}^2,$$
luego Σ es irreducible de $\dim \Sigma = 3$.

Por otro lado, $pr_2 : \Sigma \to \Gamma_C$ es genéricamente finito, luego Γ_C es irred. de $\dim \Gamma_C = 3$.

Escribimos entonces $[\Gamma_C] =: \gamma_C = \alpha\, \sigma_{1,0}$ para cierto $\alpha \in \mathbb{Z}$.

Intersectando con $\sigma_{2,1}$ se tiene
$$\deg(\gamma_C \cdot \sigma_{2,1}) = \alpha \deg(\sigma_1 \cdot \sigma_{2,1}) = \alpha,$$
luego para encontrar α hay que estudiar la cardinalidad de $\Gamma_C \cap \Sigma_{2,1}(p, H)$ para $p \in \mathbb{P}^3$, $p \in H \simeq \mathbb{P}^2 \subseteq \mathbb{P}^3$ generales, donde
$$\Sigma_{2,1} = \{ L \,,\, p \in L \subset H \}.$$
Notar que $\Sigma_{2,1}$ general intersectará transversalmente a Γ_C, luego
$$\alpha = |\{ L, p \in L \subseteq H \text{ y } L \cap C \neq \emptyset \}|$$
H general intersecta a C en d puntos $\{q_1, \dots, q_d\}$, y ningún par q_i, q_j será colineal con p (p es general), luego $\Gamma_C \cap \Sigma_{2,1}$ consiste de las d rectas $\overline{p, q_i}$ $\rightsquigarrow$ $\gamma_C = d\,\sigma_1$

$\blacksquare$

Respuesta. Si $C_1, C_2, C_3, C_4 \subseteq \mathbb{P}^3$ son curvas de grado d_1, d_2, d_3, d_4, asumiendo que los ciclos Σ_{C_i} son genéricamente transversales, el nº de rectas intersectándolas será

$$\deg\left(\prod \Sigma_{C_i}\right) = \deg\left(\left(\prod d_i\right) \sigma_1^4\right) = 2 \prod d_i$$

Pregunta. ¿ Cuántas rectas son tangentes simultáneamente a cuatro sup. cuádricas Q_i generales ?

Proposición. Sea $S \subseteq \mathbb{P}^3$ una superficie suave de grado d. Si $T_1(S) \subseteq \mathbb{G}(1,3)$ es el ⊘ de tangentes a S en algún punto, entonces $[T_1(S)] = d(d-1)\sigma_1$ en $A(\mathbb{G}(1,3))$.

Demostración. Denotemos por $T_1 S \subseteq \mathbb{G}(1,3)$ el lugar de tangentes y la incidencia

$$\Phi = \{(q, L) \in S \times \mathbb{G}(1,3),\ q \in L \subseteq T_q S\},$$

donde $T_q S \simeq \mathbb{P}^2$ es el plano tangente a S en q.

Notar que la proyección $pr_1 : \Phi \to S$ es un $\mathbb{P}^1$- bundle sobre S, luego Φ y $T_1(S) = pr_2(\Phi)$ son irreducibles de dim 3. Por lo tanto,

$$[T_1(S)] = \alpha\, \sigma_1 \quad \text{en} \quad A(\mathbb{G}(1,3))$$

para cierto $\alpha \in \mathbb{Z}$. Ahora,

$$\alpha = [T_1(S)] \cdot \sigma_{2,1} = |\Sigma_{2,1}(p,H) \cap T_1(S)| =$$

$$= |\{L \in \mathbb{G}(1,3),\ q \in L \subseteq T_q(S) \text{ para algún } q \in S \text{ y } p \in L \subseteq H\}|$$

Para (p, H) general, $C := S \cap H$ será una curva suave de grado d. La curva C tiene asociada una curva C^* de $\deg(C^*) = d(d-1)$ en el espacio proyectivo dual $H^* \simeq \mathbb{P}^2$, y p define una recta p^*, que intersecta a C^* en $d(d-1)$ puntos

$$\rightsquigarrow \quad [T_1 S] = d(d-1)\sigma_1 .$$

$\blacksquare$

Respuesta. $\deg\left(\Pi\, [T_1(Q_i)]\right) = \deg\left((2\sigma_1)^4\right) = 32.$