Seminario THC (Semana 9): Hipercohomología y Secuencias Espectrales (parte 1)

Prop: Si X esp. top, $\mathcal{F}$ un haz sobre X (de grupos abelianos), y $\mathcal{F} \xhookrightarrow{i} \mathcal{F}^\bullet$ una resolución Γ-acíclica (ie, $0 \to \mathcal{F} \xrightarrow{i} \mathcal{F}^0 \to \mathcal{F}^1 \to \dots$ es exacto y $H^i(X, \mathcal{F}^j) = 0$ $\forall j \geq 0$ y $\forall i \geq 1$). Entonces, $H^i(X, \mathcal{F}) \cong H^i(\Gamma(\mathcal{F}^\bullet))$ [de Rham formal].

Coro: X variedad compleja, entonces (Dolbeault)

$$\Omega^p_{X^{an}} \xhookrightarrow{i} (\Omega^{p,\bullet}_{X^\infty}, \bar\partial) \hookrightarrow H^{p,q}_{\bar\partial}(\text{Polidiscos}) = 0 \quad \forall q > 0$$

es una resolución fina (y por lo tanto Γ-acíclica) resp. al haz $\mathcal{E}^\infty_X$.

Def: Si X esp. top paracompacto y $\mathcal{A}$ un haz de anillos, entonces todo haz de $\mathcal{A}$-módulos $\mathcal{F}$ es fino si $\mathcal{A}$ admite particiones de la unidad, ie, $\forall \mathcal{U} = \{\mathcal{U}_i\}_{i\in I}$ cubr. abierto de X existen $\rho_i \in \mathcal{A}(X)$ con $\mathrm{Supp}(\rho_i) \subseteq \mathcal{U}$ con $\sum_{i\in I} \rho_i = 1$.
loc. finito

Así, $H^q(X^{an}, \Omega^p_{X^{an}}) \cong H^{p,q}_{\bar\partial}(X)$. Si además $X \subseteq \mathbb{P}^N$ es proyectiva

$$\overset{\text{GAGA}}{\Longrightarrow} H^q_{Zar}(X, \Omega^p_X) \cong H^q(X^{an}, \Omega^p_{X^{an}}) \cong H^{p,q}_{\bar\partial}(X).$$

¿Hay un análogo algebraico para de Rham?

Debería ser: $H^k_{dR}(X^{alg}) := \bigoplus_{p+q=k} H^q(X^{alg}, \Omega^p_X)$

OK si X proyectiva ($\Rightarrow$ Kähler y luego Hodge OK ✓).

Si $X = \mathcal{U}$ var. alg afín:

$H^q(\mathcal{U}, \Omega^p_{\mathcal{U}}) = \{0\}$ $\forall q > 0$ (Serre) $\Rightarrow H^k_{dR}(\mathcal{U}^{alg}) = H^0(\mathcal{U}, \Omega^k_{\mathcal{U}})$
↑ dim. infinita!

(pero eg. $\mathcal{U} = \mathbb{A}^1(\mathbb{C}) = \mathbb{C}$ tiene $H^1_{dR}(\mathbb{C}) = \{0\}$ y $H^0(\mathbb{C}^{alg}, \Omega^k_{\mathbb{C}}) \neq \{0\}$).

¿Cómo recuperar $H^k_{dR}(X)$ para X var. compleja algebraica cualquiera desde la categoría de var. algebraicas?

Recuerdo de Funtores Derivados:

Sea $\mathcal{A}$ categoría abeliana con suficientes inyectivos. Así todo objeto A admite $0 \to A \to I^0 \to I^1 \to I^2 \to \dots$ resol. inyectiva. Sea $\mathcal{B}$ otra cat. abeliana. Sea $F: \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ funtor covariante exacto por la izquierda. Dado un complejo acotado a la izquierda $(A^\bullet, d): 0 \to A^0 \xrightarrow{d} A^1 \xrightarrow{d} A^2 \to \dots$
Entonces, $\forall k \geq 0$ existe el k-ésimo funtor derivado $R^kF: \mathcal{K}om(\mathcal{A}) \to \mathcal{B}$

$$(A^\bullet, d) \mapsto R^kF(A^\bullet, d)$$

Con las siguientes propiedades:

1. $(R^0F)(A^\bullet, d) = F(\ker(A^0 \xrightarrow{d} A^1))$
2. Son invariantes por quasi-isom. $(A^\bullet, d) \underset{q.is}{\simeq} (B^\bullet, d) \Rightarrow R^kF(A^\bullet) = R^kF(B^\bullet)$

Recuerdo: Un morfismo de complejos $(A^\cdot, d) \xrightarrow{f^\cdot} (B^\cdot, d)$ es un quasi-isom si $H^k(f^\cdot): H^k(A^\cdot, d) \xrightarrow{\sim} H^k(B^\cdot, d)$ son isomorfismos $\forall k \geq 0$.

(3) Si $(\mathcal{I}^\cdot, d)$ complejo de obj inyectivos, $R^kF(\mathcal{I}^\cdot) = H^k(F(\mathcal{I}^\cdot))$

(4) Si $0 \to A^\cdot \to B^\cdot \to C^\cdot \to 0$ exacta en $\mathcal{A}$ entonces

$$\cdots \to R^kF(A^\cdot) \to R^kF(B^\cdot) \to R^kF(C^\cdot) \to R^{k+1}F(A^\cdot) \to \cdots$$ exacta en $\mathcal{B}$.

Def: Si $A \in \mathrm{Obj}(\mathcal{A})$ decimos que $R^kF(A) := R^kF(A \to 0 \to 0 \to \cdots)$

Obs: $A \xhookrightarrow{i} \mathcal{F}^\cdot$ resolución $\iff$

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r] \arrow[d, "i"] & 0 \arrow[r] \arrow[d, "0"] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
\mathcal{F}^0 \arrow[r] & \mathcal{F}^1 \arrow[r] & \mathcal{F}^2 \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$ qis

Prop: Si $A^\cdot$ complejo acotado por la izq, $\forall p \geq 0$ hay $A^p \hookrightarrow \mathcal{I}^{p,\cdot}$ resol. inyectiva. Además, usando la inyectividad de los objetos, existe $(\mathcal{I}^{\cdot,\cdot}, d_1, d_2)$ doble complejo de ~~obj~~ inyectivos

$$\begin{tikzcd}
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\
\mathcal{I}^{0,1} \arrow[r, "d_1"] \arrow[u] & \mathcal{I}^{1,1} \arrow[r, "d_1"] \arrow[u] & \mathcal{I}^{2,1} \arrow[r] \arrow[u] & \mathcal{I}^{3,1} \arrow[r] \arrow[u] & {} \\
\mathcal{I}^{0,0} \arrow[r, "d_1"] \arrow[u, "d_2"] & \mathcal{I}^{1,0} \arrow[r, "d_1"] \arrow[u] & \mathcal{I}^{2,0} \arrow[r] \arrow[u, "d_2"] & \mathcal{I}^{3,0} \arrow[r] \arrow[u] & {} \\
A^0 \arrow[r] \arrow[u, "i^0"] & A^1 \arrow[r] \arrow[u, "i^1"] & A^2 \arrow[r] \arrow[u, "d_2\ i^2"] & A^3 \arrow[r] \arrow[u, "i^3"] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Entonces el complejo (simple) asociado al complejo doble es

$$(\mathcal{I}^\cdot, D), \quad \text{con } \mathcal{I}^k := \bigoplus_{p+q=k} \mathcal{I}^{p,q} \quad \text{con } D|_{\mathcal{I}^{p,q}} := d_2 + (-1)^q d_1$$

$\Rightarrow (A^\cdot, d) \xhookrightarrow{i^\cdot} (\mathcal{I}^\cdot, D)$ es un quasi-isomorfismo.

Aquí, $i^\cdot$ induce $H^k(A^\cdot) \xrightarrow{\sim} H^k(\mathcal{I}^\cdot, D)$

Para la inversa, si $D(\eta) = 0$ con $\eta = \eta^{k,0} + \eta^{k,1} + \cdots + \eta^{0,k}$

$\eta^{k,0} \xmapsto{D} 0$ y $\eta^{0,k} \xmapsto{D} 0$ pues son los únicos de dicho grado!

i.e., $d_2(\eta^{0,k}) = 0$ y $d_1(\eta^{k,0}) = 0$

Por exactitud vertical: $\eta^{0,k} = d_2(\xi^{0,k-1})$, entonces $\eta \sim \eta^{k,0} + \cdots + \eta^{0,k} + \underbrace{D(\xi^{0,k-1})}_{\eta^{0,k} + \tilde{\eta}^{1,k-1}}$

Repetimos el proceso y vamos eliminando hasta llegar a $\eta \sim \mu^{k,0}$ y D cerrado

$\Rightarrow \mu^{k,0}$ define un elem. en $H^k(A^\cdot)$.

Def: Si $\mathcal{F}^\cdot$ es un complejo de haces de grupos abelianos sobre X, se define el grupo abeliano $\mathbb{H}^k(X, \mathcal{F}^\cdot) := R^k\Gamma(\mathcal{F}^\cdot)$

Propiedades: (1) Si $\mathcal{F}$ es un haz, $\mathbb{H}^k(X, \mathcal{F}) \cong H^k(X, \mathcal{F})$

(2) Si $\mathcal{F}^\cdot$ es inyectivo, entonces $\mathbb{H}^k(X, \mathcal{F}^\cdot) \cong H^k(\Gamma(\mathcal{F}^\cdot))$.

(3) (de Rham formal): Si $\mathcal{F}^\cdot$ es un complejo de haces Γ-acíclicos entonces $\mathbb{H}^k(X, \mathcal{F}^\cdot) \cong H^k(\Gamma(\mathcal{F}^\cdot))$.

④ Si $\mathcal{F}^\bullet \to \mathcal{G}^\bullet$ qis $\Rightarrow \mathbb{H}^k(X,\mathcal{F}^\bullet) \cong \mathbb{H}^k(X,\mathcal{G}^\bullet)$

$\Downarrow$

⑤ Si $\mathcal{F} \hookrightarrow \mathcal{F}^\bullet$ resolución, $\mathbb{H}^k(X,\mathcal{F}^\bullet) \simeq H^k(X,\mathcal{F})$.

⑥ Si $\mathcal{F}^\bullet$ complejo y $\mathcal{F}^\bullet \hookrightarrow (\mathcal{I}^{\bullet,\bullet}, d_1, d_2)$ doble resol. Γ-acíclica ($\Rightarrow \mathcal{F}^\bullet \hookrightarrow (\mathcal{I}^\bullet, D)$ quasi-ism) y así

$$\mathbb{H}^k(X,\mathcal{F}^\bullet) \simeq H^k(\Gamma(\mathcal{I}^\bullet), D) \qquad [\text{de Rham}]$$

↖ Esto se calcula!

⑦ (Leray): Si $\mathcal{U}=\{U_i\}$ buen cubrimiento resp. a $\mathcal{F}^j$ $\forall j \geq 0$, i.e., $H^l(U_{i_0}\cap \dots \cap U_{i_l}, \mathcal{F}^j) = 0$ $\forall l \geq 0$ $\forall j \geq 0$

$\Rightarrow \mathcal{F}^j \hookrightarrow (\mathcal{C}^\bullet(\mathcal{U},\mathcal{F}^j), \delta)$

↑ resol. porque (haces) ($\Rightarrow \Gamma$-acíclica)

$\Rightarrow \mathcal{F}^\bullet \hookrightarrow (\mathcal{C}^\bullet(\mathcal{U},\mathcal{F}^\bullet), \delta, d)$

y así $\mathcal{F}^\bullet \xhookrightarrow{qis} \left(\bigoplus_{p+q=\bullet} \mathcal{C}^q(\mathcal{U},\mathcal{F}^p), D := \delta + (-1)^q d\right)$.

Luego, $\mathbb{H}^k(X,\mathcal{F}^\bullet) \cong H^k\left(\bigoplus_{p+q=\bullet} \check{C}^q(\mathcal{U},\mathcal{F}^p), D = \delta + (-1)^q d\right)$

$$\begin{array}{ccccc}
\uparrow & & \uparrow & & \\
\check{C}^1(\mathcal{U},\mathcal{F}^0) & \to & \check{C}^1(\mathcal{U},\mathcal{F}^1) & \to & \cdots \\
\delta\uparrow & & \uparrow & & \\
\check{C}^0(\mathcal{U},\mathcal{F}^0) & \to & \check{C}^0(\mathcal{U},\mathcal{F}^1) & \to & \cdots \\
 & & & & \\
\mathcal{F}^0 & \xrightarrow{d} & \mathcal{F}^1 & \xrightarrow{d} & \mathcal{F}^2 \longrightarrow \cdots
\end{array}$$

Ejemplo: Sea X var. alg. ¿$\mathbb{H}^k(X,\Omega^\bullet_X)$?

Si $\dim X = n$, $\exists\, \mathcal{U} = \{U_i\}_{i=0}^n$ cubr. afín.

$\Rightarrow \mathbb{H}^k(X,\Omega^\bullet_X) = 0$ si $k > n+n = 2n$ (complejo doble contenido en cuadrado $(n+1)\times(n+1)$!)

Ejemplo: Sea X var. compleja $\Omega^p_{X^{an}} \hookrightarrow (\Omega^{p,\bullet}_{X^\infty}, \bar\partial)$ pero además hay un complejo doble ($\partial\bar\partial = -\bar\partial\partial$):

$$\begin{array}{ccccc}
\Omega^{0,1}_{X^\infty} & \xrightarrow{-\partial} & \Omega^{1,1}_{X^\infty} & \xrightarrow{-\partial} & \Omega^{2,1}_{X^\infty} \\
\bar\partial\uparrow & & \uparrow\bar\partial & & \uparrow\bar\partial \\
\Omega^{0,0}_{X^\infty} & \xrightarrow{\partial} & \Omega^{1,0}_{X^\infty} & \xrightarrow{\partial} & \Omega^{2,0}_{X^\infty} \\
\uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
\Omega^0_{X^{an}} & \xrightarrow{\partial} & \Omega^1_{X^{an}} & \xrightarrow{\partial} & \Omega^2_{X^{an}}
\end{array}$$

$\Omega^\bullet_{X^{an}} \hookrightarrow (\Omega^{\bullet,\bullet}_{X^\infty}, (-1)^q\partial, \bar\partial)$.

$\Rightarrow (\Omega^\bullet_{X^{an}}, \partial) \xrightarrow{qis} (\Omega^\bullet_{X^\infty}, d)$

Luego, $\mathbb{H}^k(X,\Omega^\bullet_{X^{an}}) \cong \mathbb{H}^k(X,\Omega^\bullet_{X^\infty}) \underset{\Gamma\text{-ad.}}{\cong} H^k(\Gamma(\Omega^\bullet_{X^\infty}), d) \overset{def}{=} H^k_{dR}(X)$.

⚠ Veremos que $\mathbb{H}^k(X,\Omega^\bullet_{X^{an}}) \cong \mathbb{H}^k(X^{alg},\Omega^\bullet_X)$.