

Seminario THC (Semana 9): Hipercohomología y Secuencias Espectrales (parte I)

Prop: Si X esp. top, \mathcal{F} un haz sobre X (de grupos abelianos), y $\mathcal{F} \xrightarrow{i} \mathcal{F}^\bullet$ una resolución Γ -acíclica (i.e., $0 \rightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{i} \mathcal{F}^0 \rightarrow \mathcal{F}^1 \rightarrow \dots$ es exacto y $H^i(X, \mathcal{F}^j) = 0 \forall j \geq 0$ y $\forall i \geq 1$). Entonces, $H^i(X, \mathcal{F}) \cong H^i(\Gamma(\mathcal{F}^\bullet))$ [de Rham formal].

Ej: X variedad compleja, entonces (Dolbeault)
 $\Omega_{X^{an}}^p \xrightarrow{i} (\Omega_{X^{an}}^{p,0}, \bar{\partial}) \xrightarrow{\quad} H_{\bar{\partial}}^{p,q}(X) = 0 \quad \forall q > 0$
 es una resolución fina (y por lo tanto Γ -acíclica) resp. al haz \mathcal{O}_X^{∞} .

Def: Si X esp. top. paracompacto y \mathcal{A} un haz de anillos, entonces todo haz de \mathcal{A} -módulos \mathcal{F} es fino si \mathcal{A} admite particiones de la unidad, i.e., $\forall \mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ cub. abierto de X existen $g_i \in \mathcal{A}(X)$ con $\text{Supp}(g_i) \subseteq U_i$ con $\sum_{i \in I} g_i = 1$.
loc. finite

Así, $H^q(X^{an}, \Omega_{X^{an}}^p) \cong H_{\bar{\partial}}^{p,q}(X)$. Si además $X \subseteq \mathbb{P}^N$ es proyectiva

$\xrightarrow{\text{GAGA}} H_{\mathbb{Z}ar}^q(X, \Omega_X^p) \cong H^q(X^{an}, \Omega_{X^{an}}^p) \cong H_{\bar{\partial}}^{p,q}(X)$.

¿Hay un análogo algebraico para de Rham?

Debería ser: $H_{dR}^k(X^{alg}) := \bigoplus_{p+q=k} H^q(X^{alg}, \Omega_X^p)$

OK si X proyectiva (\Rightarrow Kähler y luego Hodge OK \checkmark).

Si $X = \mathcal{U}$ var. alg. afin:

$H^q(\mathcal{U}, \Omega_{\mathcal{U}}^p) = \{0\} \quad \forall q > 0$ (Serre) $\Rightarrow H_{dR}^k(\mathcal{U}^{alg}) = H^0(\mathcal{U}, \Omega_{\mathcal{U}}^k)$
 (para eg. $\mathcal{U} = \mathbb{A}^1(\mathbb{C}) = \mathbb{C}$ tiene $H_{dR}^1(\mathbb{C}) = \{0\}$ y $H^0(\mathbb{C}^{alg}, \Omega_{\mathbb{C}}^k) \neq \{0\}$ \uparrow dim. infinita!)

¿Cómo recuperar $H_{dR}^k(X)$ para X var. compleja algebraica cualquiera desde la categoría de var. algebraicas?

Recuerdo de Funtores Derivados:

Sea \mathcal{A} categoría abeliana con suficientes injectivos. Así, todo objeto \mathcal{A} -admita $0 \rightarrow \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{I}^0 \rightarrow \mathcal{I}^1 \rightarrow \mathcal{I}^2 \rightarrow \dots$ resol. injectiva. Sea \mathcal{B} otra cat. abeliana. Sea $\mathcal{F}: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ funtor covariante exacto por la izquierda. Dado un complejo acotado a la izquierda $(\mathcal{A}^\bullet, d): 0 \rightarrow \mathcal{A}^0 \xrightarrow{d} \mathcal{A}^1 \xrightarrow{d} \mathcal{A}^2 \rightarrow \dots$

Entonces, $\forall k \geq 0$ existe el k -ésimo funtor derivado $R^k \mathcal{F}: \text{Kom}(\mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{B}$
 $(\mathcal{A}^\bullet, d) \mapsto R^k \mathcal{F}(\mathcal{A}^\bullet, d)$

Con las siguientes propiedades:

- ① $(R^0 \mathcal{F})(\mathcal{A}^\bullet, d) = \mathcal{F}(\ker(\mathcal{A}^0 \xrightarrow{d} \mathcal{A}^1))$
- ② Son invariantes por quasi-isom. $(\mathcal{A}^\bullet, d) \xrightarrow{\cong} (\mathcal{B}^\bullet, d) \Rightarrow R^k \mathcal{F}(\mathcal{A}^\bullet) = R^k \mathcal{F}(\mathcal{B}^\bullet)$

Recordo: Un morfismo de complejos $(A^\bullet, d) \xrightarrow{f} (B^\bullet, d)$ es un quasi-isom si $H^k(f) = H^k(A^\bullet, d) \xrightarrow{\sim} H^k(B^\bullet, d)$ son isomorfismos $\forall k \geq 0$.

③ Si (\mathcal{I}^\bullet, d) complejo de obj inyectivos, $R^k F(\mathcal{I}^\bullet) = H^k(F(\mathcal{I}^\bullet))$

④ Si $0 \rightarrow A' \rightarrow B' \rightarrow C' \rightarrow 0$ exacta en A entonces

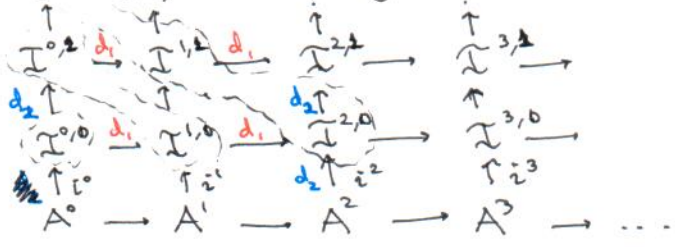
$$\dots \rightarrow R^k F(A') \rightarrow R^k F(B') \rightarrow R^k F(C') \rightarrow R^{k+1} F(A') \rightarrow \dots \text{ exacta en B.}$$

Def: Si $A \in \text{Obj}(A)$ decimos que $R^k F(A) := R^k F(A \rightarrow 0 \rightarrow 0 \rightarrow \dots)$

Obs: $A \xrightarrow{i} F^\bullet$ resolución \iff
$$\begin{array}{ccccccc} A & \rightarrow & 0 & \rightarrow & 0 & \rightarrow & \dots \\ & & \downarrow i & & \downarrow 0 & & \downarrow \\ F^0 & \rightarrow & F^1 & \rightarrow & F^2 & \rightarrow & \dots \end{array}$$
 (qis)

Prop: Si A^\bullet complejo acotado por la izquierda, $\forall p \geq 0$ hay $A^p \hookrightarrow \mathcal{I}^{p,\bullet}$ resol. inyectiva. Además, usando la inyectividad de los objetos, existe $(\tilde{\mathcal{I}}^\bullet, d_1, d_2)$

doble complejo de ~~complejos~~ inyectivos



Entonces el complejo (simple) asociado al complejo doble es

$$(\tilde{\mathcal{I}}^\bullet, D), \text{ con } \tilde{\mathcal{I}}^k := \bigoplus_{p+q=k} \tilde{\mathcal{I}}^{p,q} \text{ con } D|_{\tilde{\mathcal{I}}^{p,q}} := d_2 + (-1)^q d_1$$

$\implies (A^\bullet, d) \xrightarrow{i^\bullet} (\tilde{\mathcal{I}}^\bullet, D)$ es un quasi-isomorfismo.

Aquí, i^\bullet induce $H^k(A^\bullet) \xrightarrow{\sim} H^k(\tilde{\mathcal{I}}^\bullet, D)$

* Para la inversa, si $D(\eta) = 0$ con $\eta = \eta^{k,0} + \eta^{k,1} + \dots + \eta^{0,k}$

$\eta^{k,0} \xrightarrow{D} 0$ y $\eta^{0,k} \xrightarrow{D} 0$ pues son los únicos de dicho grado!

$$\bar{e}, d_2(\eta^{0,k}) = 0 \text{ y } d_1(\eta^{k,0}) = 0$$

Por exactitud vertical: $\eta^{0,k} = d_2(\xi^{0,k-1})$, entonces $\eta \sim \eta^{k,0} + \dots + \eta^{0,k} + \underbrace{D(\xi^{0,k-1})}_{\eta^{0,k} + \eta^{1,k-1}}$

Repetimos el proceso y vamos eliminando hasta llegar a $\eta \sim \mu^{k,0}$ y D cerrado $\implies \mu^{k,0}$ define un elem. en $H^k(A^\bullet)$.

Def: Si F^\bullet es un complejo de haces de grupos abelianos sobre X , se define el grupo abeliano $H^k(X, F^\bullet) := R^k \Gamma(F^\bullet)$

Propiedades: ① Si F es un haz, $H^k(X, F) \cong H^k(X, F)$

② Si F^\bullet es inyectivo, entonces $H^k(X, F^\bullet) \cong H^k(\Gamma(F^\bullet))$.

③ (de Rham formal): Si F^\bullet es un complejo de haces Γ -acíclicos entonces $H^k(X, F^\bullet) \cong H^k(\Gamma(F^\bullet))$.

④ $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G} \text{ qis} \Rightarrow H^k(X, \mathcal{F}) \cong H^k(X, \mathcal{G})$

⑤ $\mathcal{F} \hookrightarrow \mathcal{F}^*$ resolución, $H^k(X, \mathcal{F}^*) \cong H^k(X, \mathcal{F})$

⑥ \mathcal{F}^* complejo y $\mathcal{F}^* \hookrightarrow (\mathcal{I}^*, d_1, d_2)$ doble resol. Γ -acíclica
 ($\Rightarrow \mathcal{F}^* \hookrightarrow (\mathcal{I}^*, \mathcal{D})$ quasi-ism) y así

$H^k(X, \mathcal{F}^*) \cong H^k(\Gamma(\mathcal{I}^*), \mathcal{D})$ [de Rham]

← Esto se calcula!

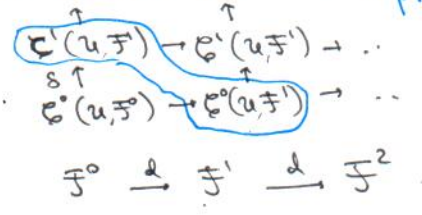
⑦ (Leray): $\mathcal{U} = \{U_i\}$ buen cubrimiento ~~de~~ resp. a $\mathcal{F}^j \forall j \geq 0, i$,
 $H^l(U_{i_0} \cap \dots \cap U_{i_r}, \mathcal{F}^j) = 0 \forall l \geq 0 \forall j \geq 0$

$\Rightarrow \mathcal{F}^j \hookrightarrow (\mathcal{C}^0(U, \mathcal{F}^j), \delta)$
 \uparrow resol. fargue (haces) ($\Rightarrow \Gamma$ -acíclica)

$\Rightarrow \mathcal{F}^* \hookrightarrow (\mathcal{C}^0(U, \mathcal{F}^*), \delta, d)$

y así $\mathcal{F}^* \xrightarrow{\text{qis}} (\bigoplus_{p+q=0} \mathcal{C}^q(U, \mathcal{F}^p), \mathcal{D} := \delta + (-1)^q d)$

Luego, $H^k(X, \mathcal{F}^*) \cong H^k(\bigoplus_{p+q=0} \mathcal{C}^q(U, \mathcal{F}^p), \mathcal{D} = \delta + (-1)^q d)$



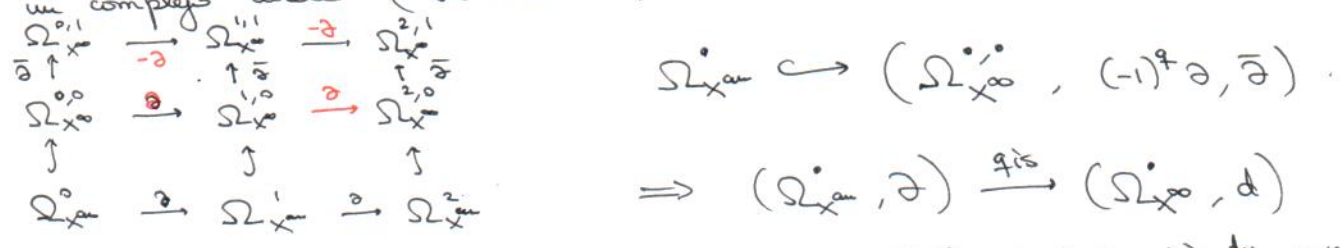
$\mathcal{F}^0 \xrightarrow{d} \mathcal{F}^1 \xrightarrow{d} \mathcal{F}^2 \dots$

Ejemplo: Sea X var. alg. ¿ $H^k(X, \Omega_X^\bullet)$?

$\mathcal{U} = \{U_i\}_{i=0}^n$ cubr. qm.

$\Rightarrow H^k(X, \Omega_X^\bullet) = 0 \text{ si } k > n+n = 2n$ (complejo doble contenido en cuadrados $(n+1) \times (n+1)$)

Ejemplo: Sea X var. compleja $\Omega_{X^{\text{an}}}^p \hookrightarrow (\Omega_{X^{\text{an}}}^p, \bar{\partial})$ pero además hay un complejo doble ($\partial\bar{\partial} = -\bar{\partial}\partial$):



$\Rightarrow (\Omega_{X^{\text{an}}}^\bullet, \partial) \xrightarrow{\text{qis}} (\Omega_{X^{\text{an}}}^\bullet, d)$

Luego, $H^k(X, \Omega_{X^{\text{an}}}^\bullet) \cong H^k(X, \Omega_{X^{\text{an}}}^\bullet) \cong_{\Gamma\text{-ad.}} H^k(\Gamma(\Omega_{X^{\text{an}}}^\bullet), d) \stackrel{\text{dy}}{=} H_{\text{dR}}^k(X)$

Veremos que $H^k(X, \Omega_{X^{\text{an}}}^\bullet) \cong H^k(X^{\text{alg}}, \Omega_X^\bullet)$