Seminario Teoría de Hodge Clásica Semana 8

Geometría analítica y geometría algebraica (GAGA)

Sebastián Fuentes, UTFSM

En 1956, Jean-Pierre Serre publica su artículo titulado *"Géométrie algébrique et géométrie analytique"*, ampliamente conocido por su acrónimo GAGA. En esta publicación se asocia a una variedad algebraica una estructura analítica, y se prueban teoremas de comparación entre los haces coherentes definidos sobre ambas estructuras.

1. Estructura analítica asociada a una variedad algebraica

Sea X una variedad algebraica compleja afín, i.e, tenemos un incrustamiento cerrado $X \hookrightarrow \mathbb{A}^n(\mathbb{C}) = \mathbb{C}^n$ considerando en $\mathbb{A}^n(\mathbb{C})$ la topología de Zariski. Podemos considerar también en $\mathbb{A}^n(\mathbb{C})$ la topología clásica (o euclidiana) y dotar a X de dicha topología, la cual es independiente del incrustamiento y nos refereriremos a ella como la *topología clásica* en X. Respecto a esta topología podemos afirmar lo siguiente:

1. La topología clásica en X es más fina que la topología de Zariski.
2. Si $U \hookrightarrow X$ (resp. $Z \hookrightarrow X$) es un abierto (resp. un cerrado) entonces la topología clásica de U (resp. Z) es su topología como subespacio de X.

Más generalmente, si X es una variedad algebraica sobre $\mathbb{C}$ con cubrimiento afín $X = \bigcup_{i=1}^r U_i$, podemos considerar la topología clásica en cada U_i, y notamos que

1. $U_i \cap U_j$ es abierto en U_i y U_j con respecto a la topología clásica.
2. cubriendo $U_i \cap U_j$ por abiertos afines, la observación anterior implica que U_i, U_j inducen ambos la misma topología clásica en $U_I \cap U_j$.

La discusión anterior se resume de la siguiente manera.

Proposición 1.1. *Dada una variedad algebraica compleja X, existe una única topología en X tal que para cualquier abierto afín $U \subset X$ (en la topología de Zariski) y todo isomorfismo regular $\varphi : U \to V \subset \mathbb{A}^n$, φ es un biholomorfismo. Nos referiremos a dicha topología como clásica.*

Así como las variedades algebraicas son *ceros de polinomios*, por analogía podemos definir una noción similar en la topología clásica.
Para $U \subset \mathbb{C}^n$ abierto en la topología clásica, si $f_1, \ldots, f_r$ son funciones holomorfas en U consideramos el conjunto

$$Z = \{u \in U \mid f_1(u) = \cdots = f_r(u) = 0\}$$

junto con el haz

$$\mathscr{O}_Z(V) = \{f : V \to \mathbb{C} \mid f \text{ se extiende localmente a una función holomorfa en un abierto de } \mathbb{C}^n\}.$$

Si $Z \overset{j}{\hookrightarrow} U$ es la inclusión, tenemos un morfismo $\mathscr{O}_U \to j_*\mathscr{O}_Z$ cuyo kernel, denotado $\mathscr{I}_{Z/U}$, corresponde a

$$\Gamma\left(V, \mathscr{I}_{Z/U}\right) = \{f : V \to \mathbb{C} | f|_{V \cap Z} = 0\}$$

Con la estructura anterior $(Z, \mathscr{O}_Z)$ resulta ser un espacio (localmente) anillado, al cual nos referimos como *modelo local*.

Definición 1.2. Una *variedad analítica* es un espacio (localmente) anillado $(X, \mathscr{O}_X)$ tal que:

1. X es un espacio topológico Hausdorff con base numerable.
2. existe un cubrimiento abierto $X = \bigcup_i W_i$ tal que cada $(W_i, \mathscr{O}_{W_i})$, donde $\mathscr{O}_{W_i} \overset{\text{def}}{=} \mathscr{O}_X|_{W_i}$, es isomorfo a un modelo local.

Las secciones de $\mathscr{O}_X$ serán las *funciones holomorfas* de X.

Definición 1.3. Un mapeo holomorfo entre espacios analíticos será un morfismo como espacios anillados, i.e., $f : X \to Y$ es continua y $f^* : \mathscr{O}_Y \to f_*\mathscr{O}_X$ es un morfismo de haces (para cada $V \subset Y$ abierto y $\varphi \in \mathscr{O}_Y(V)$ tenemos que $\varphi \circ f \in \mathscr{O}_X(f^{-1}(V))$[1]

Ejemplo 1.4.

[1] Esto significa que (f, f^*) es un morfismo de espacios anillados.

1. Toda variedad compleja es una variedad analitica (es localmente un abierto de $\mathbb{C}^n$, i.e., no hay ecuaciones).

2. Si X es una variedad algebraica separada, podemos dotar a X^{an} de un haz $\mathscr{O}_{X^{an}}$ tal que $(X^{an}, \mathscr{O}_{X^{an}})$ es una variedad analítica. Si $U \subset X$ es un abierto afín, considerando un incrustamiento $U \hookrightarrow \mathbb{C}^n$ (cuya imagen es el lugar de ceros de finitos polinomios) tenemos un haz $\mathscr{O}_{U^{an}}$ en U^{an} como se construyó anteriormente. Se puede verificar que dichos haces coinciden en las intersecciones, y por lo tanto obtenemos un haz $\mathscr{O}_{X^{an}}$ en X^{an}, llamado el haz de funciones holomorfas en X.

3. Dado un morfismo regular $f : X \to Y$ entre variedades algebraicas, $f : X^{an} \to Y^{an}$ es también un mapeo holomorfo.

El ejemplo anterior implica que hemos construido un functor

$$\begin{aligned}\{\text{variedades algebraicas complejas}\} &\longrightarrow \{\text{variedades analíticas}\}\\ (X, \mathscr{O}_X) &\longmapsto (X^{an}, \mathscr{O}_{X^{an}})\end{aligned}$$

Más aún, tenemos un morfismo natural de espacios anillados

$$(\varphi, \varphi^*) : (X^{\mathrm{an}}, \mathscr{O}_{X^{\mathrm{an}}}) \to (X, \mathscr{O}_X)$$

dado por $\varphi(x) = x$ y

$$\varphi^* : \mathscr{O}_X \to \varphi_* \mathscr{O}_{X^{\mathrm{an}}}, \quad f \mapsto f$$

pues toda función regular es también holomorfa. Más aún, dado un $\mathscr{O}_X$-módulo $\mathscr{F}$, el morfismo anterior permite definir una *analitificación*

$$\mathscr{F}^{\mathrm{an}} = \varphi^*(\mathscr{F}) = \varphi^{-1}(\mathscr{F}) \otimes_{\varphi^{-1}(\mathscr{O}_X)} \mathscr{O}_{X^{\mathrm{an}}}$$

Esta construcción es functorial, i.e., dado $f : \mathscr{F} \to \mathscr{G}$ hay un morfismo $\varphi^* f : \varphi^* \mathscr{F} \to \varphi^* \mathscr{G}$. Tenemos así un functor entre las categorías de $\mathscr{O}_X$-módulos (a los cuales nos referiremos como haces algebraicos) y $\mathscr{O}_{X^{an}}$ (referidos como haces analíticos.

Proposición 1.5. *El functor $\mathscr{F} \mapsto \mathscr{F}^{an}$ verifica que:*

1. $(\mathscr{O}_{X,x}, \mathscr{O}_{X^{an},x})$ *es un par plano, i.e.,* $\mathscr{O}_{X^{an},x}/\mathscr{O}_{X,x}$ *es un* $\mathscr{O}_{X,x}$*-módulo plano.*

2. $\mathscr{F}$ *y* $\mathscr{F}^{an}$ *tienen el mismo soporte.*

3. $\mathscr{F} \mapsto \mathscr{F}^{an}$ *es exacto.*

4. *Si* $\mathscr{F}$ *es un haz algebraico coherente, entonces* $\mathscr{F}^{an}$ *es un haz analítico coherente.*

Demostración. Demostramos solo 3 y 4.

3. Si

   $$0 \to \mathscr{F} \to \mathscr{G} \to \mathscr{H} \to 0$$

   es una sucesión exacta de haces en X, dado que i^* preserva stalks y $\mathscr{O}_{X^{an},x}$ es plano, tenemos una sucesión exacta de $\mathscr{O}_{X,x}$-módulos

   $$0 \to (\varphi^* \mathscr{F})_x \otimes_{\mathscr{O}_{X,x}} \mathscr{O}_{X^{an},x} \to (\varphi^* \mathscr{G})_x \otimes_{\mathscr{O}_{X,x}} \mathscr{O}_{X^{an},x} \to (\varphi^* \mathscr{H})_x \otimes_{\mathscr{O}_{X,x}} \mathscr{O}_{X^{an},x} \to 0$$

4. Sea $\mathscr{F}$ un haz algebraico coherente, i.e., para cada $x \in X$ existe una vecindad (en la topología de Zariski) $x \in U$ con una presentación

   $$\mathscr{O}_U^{\oplus m} \longrightarrow \mathscr{O}_U^{\oplus n} \longrightarrow \mathscr{F}_U \longrightarrow 0 \text{ para ciertos } m, n\mathbb{N}$$

   Dado que el functor de analitificación es exacto y $(\mathscr{O}_X)^{an} = \mathscr{O}_{X^{an}}$ obtenemos una presentación

   $$\mathscr{O}_{U^{an}}^{\oplus m} \longrightarrow \mathscr{O}_{U^{an}}^{\oplus n} \longrightarrow \mathscr{F}_{U^{an}}^{an} \longrightarrow 0 \text{ para ciertos } m, n \in \mathbb{N}$$

   concluyendo que $\mathscr{F}^{an}$ es un $\mathscr{O}_{X^{an}}$-módulo exacto.

□

2. GAGA

Recuerdo 2.1. Dada una variedad algebraica X con $A = \Gamma(X, \mathscr{O}_X)$, los functores derivados del functor de secciones globales

$$\Gamma : \mathscr{O}_X\text{-Mod} \longrightarrow A\text{-Mod}, \quad \mathscr{F} \longmapsto \Gamma(X, \mathscr{F})$$

son los grupos de cohomología $\mathrm{H}^i(X, \mathscr{F})$.

Construcción. Dada X variedad algebraica, $\mathscr{F}$ haz coherente en X y un abierto de Zariski $U \subset X$, tenemos un morfismo de secciones locales:

$$\varepsilon : \Gamma(U, \mathscr{F}) \to \Gamma\left(U^{an}, \mathscr{F}^{an}\right), \quad s \mapsto s \otimes 1$$

Considerando un cubrimiento abierto $\{U_i\}$, el morfismo anterior induce un morfismo entre los complejos de Cech

$$\varepsilon : C^{\bullet}(\mathscr{U}, \mathscr{F}) \to C^{\bullet}\left(\mathscr{U}^{an}, \mathscr{F}^{an}\right)$$

el cual conmuta con los morfismos de coborde, y por tanto induce morfismos en cohomología. Más aún, tomando el límite sobre cubrimientos afines[2] obtenemos morfismos:

$$\varepsilon : H^q(X, \mathscr{F}) \to H^q\left(X^{an}, \mathscr{F}^{an}\right)$$

Más aún, estos morfismos son functoriales.

Proposición 2.2. *Sea*

$$0 \to \mathscr{F} \to \mathscr{G} \to \mathscr{H} \to 0$$

una sucesión exacta de haces en X. Si $\mathscr{F}$ es coherente entonces el diagrama

$$\begin{array}{ccc} H^q(X, \mathscr{H}) & \longrightarrow & H^{q+1}(X, \mathscr{F}) \\ \downarrow \varepsilon & & \downarrow \varepsilon \\ H^q(X^{an}, \mathscr{H}^{an}) & \longrightarrow & H^{q+1}(X^{an}, \mathscr{F}^{an}) \end{array}$$

es conmutativo para todo q.

Teorema 2.3. *Sea X variedad algebraica proyectiva. Para todo haz algebraico coherente $\mathscr{F}$ sobre X y para todo $q \geq 0$ el morfismo*

$$\varepsilon : H^q(X, \mathscr{F}) \to H^q\left(X^{an}, \mathscr{F}^{an}\right)$$

es un isomorfismo.

Sketch de demostración.
1er paso: Fijamos un incrustamiento $X \overset{j}{\hookrightarrow} \mathbb{P}^n$. Por el Teorema de imágenes directas de:

$$H^q(X, \mathscr{F}) = H^q\left((\mathbb{P}^n)^{an}, j_*\mathscr{F}\right) \quad \text{y} \quad H^q\left(X^{an}, \mathscr{F}^{an}\right) = H^q\left(\mathbb{P}^n, (j_*\mathscr{F})^{an}\right)$$

y por tanto podemos restringirnos al caso $X = \mathbb{P}^n$.
2do paso: Asumimos cierto el resultado para $\mathscr{F} = \mathscr{O}_X$, pues usando cohomología de Cech se calcula directamente que:

$$H^i\left(\mathbb{P}^n, \mathscr{O}_{\mathbb{P}^n}\right) = \begin{cases} \mathbb{C} & i = 0 \\ 0 & i > 0 \end{cases}$$

3er paso: Supondremos en primer lugar que $\mathscr{F} = \mathscr{O}_{\mathbb{P}^n}(m)$ y probaremos el resultado por inducción en la dimensión n. En el caso $n = 0$ no hay nada que probar. Consideremos la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow \mathscr{O}_{\mathbb{P}^n}(-1) \longrightarrow \mathscr{O}_{\mathbb{P}^n} \longrightarrow \mathscr{O}_{\mathbb{P}^{n-1}} \longrightarrow 0$$

Dado que $\mathscr{O}_{\mathbb{P}^n}(m)$ es localmente libre tenemos la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow \mathscr{O}_{\mathbb{P}^n}(m-1) \longrightarrow \mathscr{O}_{\mathbb{P}^n}(m) \longrightarrow \mathscr{O}_{\mathbb{P}^{n-1}}(m) \longrightarrow 0$$

La construcción anterior implica que hay un morfismo entre sucesiones exactas largas en cohomología,en donde por claridad denotamos a $\mathscr{O}_{\mathbb{P}^n}(m)$ simplemente como $\mathscr{O}(m)$, y adoptamos también $X = \mathbb{P}^n, Z = \mathbb{P}^{n-1}$:

$$\begin{array}{ccccccccc} H^{q-1}(Z, \mathscr{O}_Z(m)) & \longrightarrow & H^q(X, \mathscr{O}(m-1)) & \longrightarrow & H^q(X, \mathscr{O}(m)) & \longrightarrow & H^q(Z, \mathscr{O}_Z(m)) & \longrightarrow & H^{q+1}(X, \mathscr{O}(m-1)) \\ \downarrow \varepsilon & & \downarrow \varepsilon & & \downarrow \varepsilon & & \downarrow \varepsilon & & \downarrow \varepsilon \\ H^{q-1}(Z^{an}, (\mathscr{O}_Z(m))^{an}) & \longrightarrow & H^q(X^{an}, \mathscr{O}(m-1)) & \longrightarrow & H^q(X^{an}, \mathscr{O}(m)) & \longrightarrow & H^q(Z^{an}, \mathscr{O}_Z(m)) & \longrightarrow & H^{q+1}(X^{an}, \mathscr{O}(m-1)) \end{array}$$

[2] Serre realiza esto únicamente usando Cohomología de Cech, pues la cohomologia de functores derivados fue definida por Grothendieck en 1957. En este contexto la naturalidad de la sucesión exacta larga es directa pues hay un morfismo $\Gamma(U, \mathscr{F}) \to \Gamma\left(U, \varphi_* \mathscr{F}^{an}\right) = \Gamma\left(U^{an}, \mathscr{F}^{an}\right)$.

Notemos que por hipótesis de inducción las flechas verticales 1 y 4 son isomorfismos, y por ende el 5-Lemma implica que si la hipótesis es verdad para $\mathscr{O}(m-1)$ lo será también para $\mathscr{O}(m)$. Dado que ya sabemos que es verdad para $m=0$, es verdad para todo m.
4to paso: Para concluir, probaremos que

$$H^i(X,\mathscr{F}) \to H^i\left(X^{\mathrm{an}},\mathscr{F}^{\mathrm{an}}\right)$$

es un isomorfismo por inducción descendente en i. Esto es posible pues para $i \gg 0$ los grupos son 0. Para el paso inductivo, consideremos una sucesión exacta de haces[3]

$$0 \to \mathscr{G} \to \mathscr{E} \to \mathscr{F} \to 0$$

donde $\mathscr{E}$ es suma directa de fibrados en recta $\mathscr{O}(m)$. Considerando nuevamente el diagrama conmutativo de sucesiones exactas largas y usando el hecho que el resultado es verdad para $\mathscr{E}$, dos aplicaciones del 5-Lemma permiten concluir que ε es un isomorfismo en i, asumiendo que lo es en $i+1$. □

Teorema 2.4 (GAGA, parte 2)**.** *Si $\mathscr{F},\mathscr{G}$ son haces algebraicos coherentes, todo morfismo analítico $\mathscr{F}^{an} \to \mathscr{G}^{an}$ es inducido por un morfismo algebraico $\mathscr{F} \to \mathscr{G}$.*

Sketch de demostración.
La demostración pasa por notar que hay un morfismo natural de haces

$$\mathscr{H}om(\mathscr{F},\mathscr{G})^{an} \to \mathscr{H}om(\mathscr{F}^{an},\mathscr{G}^{an})$$

donde $\mathscr{H}om(\mathscr{F},\mathscr{G})$ denota el haz de morfismos entre $\mathscr{F}$ y $\mathscr{G}$. Usando el hecho que $\mathscr{O}_{X^{an},x}$ es un $\mathscr{O}_{X,x}$-módulo plano se prueba que de hecho es un isomorfismo de haces.
Denotando $\mathscr{A} = \mathscr{H}om(\mathscr{F},\mathscr{G})$ y $\mathscr{B} = \mathscr{H}om(\mathscr{F}^{an},\mathscr{G}^{an})$, el 1er GAGA da el isomorfismo

$$H^0(X,\mathscr{A}) \underset{\varepsilon}{\xrightarrow{\cong}} H^0(X^{an},\mathscr{A}^{an}) \cong H^0(X^{an},\mathscr{B}^{an})$$

□

Teorema 2.5 (GAGA, parte 3)**.** *Para cualquier haz analítico coherente $\mathscr{G}$ sobre X^{an} existe un único haz coherente algebraico $\mathscr{F}$ tal que $\mathscr{F}^{an} \cong \mathscr{G}$.*

La demostración de la 3ra parte utiliza los Teoremas A y B de Cartan, lo cual no se incluye por extensión.
Se establece así el siguiente teorema.

Teorema 2.6 (GAGA)**.** *Si X es una variedad algebraica proyectiva[4], el functor*

$$\begin{aligned}\{\textit{haces algebraicos coherentes}\} &\to \{\textit{haces analíticos coherentes}\}\\ \mathscr{F} &\mapsto \mathscr{F}^{an}\end{aligned}$$

es una equivalencia de categorías.

3. Teorema de Chow

En 1949, Chow demuestra su Teorema homónimo. Los Teoremas GAGA permiten dar una demostración sorprendentemente sencilla de este teorema.

Teorema 3.1 (Teorema de Chow)**.** *Sea $X \subset \mathbb{P}^n$ una variedad analítica proyectiva. Entonces X es algebraica.*

Demostración. Dado un incrustamiento $X \xrightarrow{j} \mathbb{P}^n$ consideramos el haz de funciones holomorfas $\mathscr{O}_X$ de X, y notemos que el pushforward $j_*\mathscr{O}_X$ tiene su soporte en X, i.e., si $x \notin X$ $(j_*\mathscr{O}_X)_x = 0$. Dado que ser coherente es una propiedad local esta extensión es coherente. Por GAGA existe un haz algebraico coherente $\mathscr{F}$ en $\mathbb{P}^n$ tal que $\mathscr{F}^{an} = j_*\mathscr{O}_X$ y el soporte de $\mathscr{F}^{an}$ y $\mathscr{F}$ es el mismo. Finalmente, el soporte de un haz algebraico coherente es un cerrado de Zariski. Así, X es algebraico. □

[3] La existencia de esta sucesión es demostrada por Serre en su artículo *"Faisceaux algébriques cohérents"*
[4] Más generalmente, Alexander Grothendieck demostró que esto también vale para variedades completas