2. Teoría L^2 en geometría compleja y Descomposición de Hodge

Para obtener el Teorema de descomposición de Hodge en variedades riemannianas necesitamos discutir sobre **operadores diferenciales elípticos** entre fibrados vectoriales euclideanos sobre una variedad[5] (M^m, g).

Definición: Sean E y F dos fibrados vectoriales en (M^m, g) de $\mathrm{rg}(E) = r$, $\mathrm{rg}(F) = s$. Un **operador diferencial** (lineal) de grado $d \in \mathbf{N}$ de E a F es un operador $\mathbf{R}$-lineal $P : \mathscr{C}^\infty(M, E) \to \mathscr{C}^\infty(M, F)$, $u \mapsto Pu$ con

$$Pu(x) \underset{\text{loc}}{=} \sum_{|\alpha| \leq d} a_\alpha(x) D^\alpha u(x) \text{ donde } u = (u_j)_{1 \leq j \leq r} \text{ y } a_\alpha(x) = ((a_\alpha)_{ij}(x))_{1 \leq i \leq s,\, 1 \leq j \leq r} \text{ son } \mathscr{C}^\infty$$

Observación: Si $t \in \mathbf{R}$, entonces la regla de la cadena implica que $e^{-tu(x)} P(e^{tu(x)})$ es un polinomio de grado d en la variable t de la forma

$$e^{-tu(x)} P(e^{tu(x)}) = t^d \sigma_P(x, \mathrm{d}u(x)) + \text{términos de orden inferior } c_j(x) t^j \text{ con } j < d$$

con[6] $\sigma_P : T_M^* \to \mathrm{Hom}(E, F)$ función polinomial que para $x \in M$ y $\omega \in T_x^* M$ está dada por $\sigma_{P,\omega} = \sigma_P(x, \omega) : E_x \cong \mathbf{R}^r \to F_x \cong \mathbf{R}^s$ con matriz $\sum_{|\alpha| = d} a_\alpha(x) \omega^\alpha$, donde $\omega^\alpha \overset{\text{def}}{=} \omega_1^{\alpha_1} \cdots \omega_m^{\alpha_m}$.

Ejemplos: Supongamos que $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle_E)$ y $(F, \langle \cdot, \cdot \rangle_F)$ son fibrados vectoriales euclideanos. Entonces:

1. Integrando por partes, deducimos que el adjunto formal $P^* : \mathscr{C}^\infty(M, F) \to \mathscr{C}^\infty(M, E)$ está dado por
$$P^* v(x) \underset{\text{loc}}{=} \sum_{|\alpha| \leq d} (-1)^{|\alpha|} \gamma(x)^{-1}(x) D^\alpha(\gamma(x)(a_\alpha)^t v(x)) \text{ donde } \gamma(x) = \sqrt{\det(g_{ij})},$$
y en particular $\sigma_{P^*}(x, \omega) = (-1)^d \sigma_P(x, \omega)^t$.

2. Si $M = \mathbf{R}^m$, $E = F = \mathscr{C}^\infty(\mathbf{R}^m)$ y $P = \Delta \overset{\text{def}}{=} -\sum_{j=1}^m \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}$ entonces para $u : \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}$ en $\mathscr{C}^\infty(M, E)$
$$e^{-tu} P(e^{tu(x)}) = -t^2 \cdot \underbrace{\left(\left(\frac{\partial u}{\partial x_1} \right)^2 + \cdots + \left(\frac{\partial u}{\partial x_m} \right)^2 \right)}_{\overset{\text{def}}{=} \sigma_P(x, \mathrm{d}u)} + \text{términos de orden inferior}$$
y así $\sigma_P(x, \omega) = -(\omega_1^2 + \cdots + \omega_m^2) = -\|\omega\|^2_{(\mathbf{R}^m)^*} \cdot \mathrm{Id}_{\mathbf{R}}$.

3. Para (M, g), $E = F = \mathscr{A}^p(M)$ de rango $r = \binom{m}{p}$ y $P = \Delta_g = \mathrm{d}\mathrm{d}^* + \mathrm{d}^*\mathrm{d}$ se calcula análogamente que $\sigma_P(x, \omega) = -\|\omega\|^2_{g^*} \cdot \mathrm{Id}_r \in \mathrm{Hom}(E_x, F_x) \cong \mathrm{M}_{r \times r}(\mathbf{R})$ para $\omega \underset{\text{loc}}{=} \sum_{j=1}^m \omega_j \, \mathrm{d}x_j$. Por ejemplo, la descripción en coordenadas del operador de Laplace-Beltrami (i.e., cuando $p = 0$) implica que[7]
$$e^{-tu} \Delta_g(e^{tu(x)}) \underset{\text{loc}}{=} -t^2 \sum_{i,j} g^{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_j} + \text{ t.o.i., i.e., } \sigma_P(x, \omega) \underset{\text{loc}}{=} -\sum_{i,j} g^{ij}(x)\, \omega_i \omega_j \overset{\text{def}}{=} -\|\omega\|^2_{g^*} \, \mathrm{Id}_{\mathbf{R}}\,.$$

Definición: Un operador diferencial $P : \mathscr{C}^\infty(M, E) \to \mathscr{C}^\infty(M, F)$ es **elíptico** si $\sigma_P(x, \omega) \in \mathrm{Hom}(E_x, F_x)$ es *inyectivo* para todo $x \in M$ y todo $\omega \in T_x^* M$. Así, si $\mathrm{rg}(E) = \mathrm{rg}(F)$ entonces P elíptico si y sólo si P^* elíptico.

Teorema (operadores elípticos son de Fredholm): Sea (M, g) variedad compacta orientada y sea $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle_E)$ fibrado vectorial euclideano en M. Entonces, para todo operador **elíptico** $P : \mathscr{C}^\infty(M, E) \to \mathscr{C}^\infty(M, E)$ es un **operador de Fredholm**, i.e., verifica que

1. $\dim_{\mathbf{R}} \ker(P) < +\infty$, y luego $\mathrm{codim}_{\mathbf{R}} \mathrm{Im}(P) < +\infty$.
2. $\mathscr{C}^\infty(M, E) = P(\mathscr{C}^\infty(M, E)) \oplus^\perp \ker(P^*)$ es una suma directa ortogonal en $L^2(M, E)$.

Idea de prueba: Si P es un operador de orden $d \in \mathbf{N}^{\geq 1}$, entonces se extiende a un operador lineal continuo $\widetilde{P} : W^{d,2}(M, E) \to L^2(M, E)$ desde el espacio de Sobolev de secciones con derivadas de orden $\leq d$ en L^2, que es un espacio de Hilbert. La primera reducción es construir un **parametrix** para el operador $\widetilde{P}$, i.e.,

Paso 1. *Existe $\widetilde{Q} : L^2(M, E) \to W^{d,2}(M, E)$ con $\widetilde{P}\widetilde{Q} = \mathrm{Id} + \widetilde{K}$ y $\widetilde{K} : L^2(M, E) \to L^2(M, E)$ operador compacto.*

Consideramos $\sum_{a \in I} \mu_a(x) = 1$ partición de la unidad en M donde cada μ_a está soportada en un abierto $U_a \subseteq M$ que sea difeomorfa a una bola $B_a \subseteq \mathbf{T}^m \overset{\text{def}}{=} \mathbf{R}^m / \mathbf{Z}^m$ en el toro estándar y contenida en el interior de su dominio fundamental. Usando una función cut-off, obtenemos $\widetilde{P}_a : W^{d,2}(\mathbf{T}^m)^{\oplus r} \to L^2(\mathbf{T}^m)^{\oplus r}$ con $r = \mathrm{rg}(E)$, y donde cada componente de $\widetilde{P}_a$ es una pequeña pertubación de un operador de grado puro d y de coeficientes constantes

[5] Cuando la variedad M es un punto, recuperamos la teoría de operadores elípticos clásica.
[6] i.e., $\sigma_P \in \mathscr{C}^\infty(M, \mathrm{Sym}(T_M) \otimes \mathrm{Hom}(E, F))$.
[7] En particular, la métrica determina al operador de Laplace-Beltrami y **vice-versa**.

$T_a : W^{d,2}(\mathbf{T}^m) \to L^2(\mathbf{T}^m)$. Explícitamente, $T_a(e^{i\xi\cdot x}) = i^d \sum_{|\alpha|=d} a_\alpha \xi^\alpha e^{i\xi\cdot x}$ y luego si $u(x) = \sum_{\nu\in\mathbf{Z}^m} f_\nu\, e^{i\nu\cdot x}$ es la expansión en serie de Fourier de $u \in W^{d,2}(\mathbf{T}^m)$ entonces $T_a(u)(x) = \sum_{\nu\in\mathbf{Z}^m} \sigma_P(f_\nu)\, e^{i\nu\cdot x}$.

Dado que P es un operador elíptico, $\sigma_P(f_\nu)$ es un isomorfismo para todo $f_\nu \neq 0$, i.e., cada T_a es un isomorfismo. Si escribimos $Q_a := T_a^{-1}$ entonces definimos $\widetilde{Q} : L^2(M,E) \to W^{d,2}(M,E)$ como $\widetilde{Q}u := \sum_a \mu_a\, Q_a(\mu_a u)$, y se verifica en coordenadas locales que $\widetilde{P}\widetilde{Q}u = u + Ku$ con $K : L^2(M,E) \to W^{d,2}(M,E)$ operador continuo. Por último, el **Teorema de Rellich-Kondrachov**[8] asegura que la inclusión $\iota : W^{d,2}(M,E) \hookrightarrow L^2(M,E)$ es un operador compacto, y por ende la composición $\widetilde{K} := \iota \circ K : L^2(M,E) \to L^2(M,E)$ también lo es.

Paso 2. *Alternativa de Fredholm*[9]. Como $-\widetilde{K} : L^2(M,E) \to L^2(M,E)$ es un operador compacto, entonces $T_K := \mathrm{Id} - (-\widetilde{K}) \overset{\text{def}}{=} \widetilde{P}\widetilde{Q} : L^2(M,E) \to L^2(M,E)$ verifica que $\overline{\mathrm{Im}(T_K)} = \mathrm{Im}(T_K)$ y $\dim_{\mathbf{R}} \ker(T_K) < +\infty$, i.e., $\mathrm{codim}_{\mathbf{R}} \mathrm{Im}(T_K) < +\infty$. Además, $\mathrm{Im}(T_K) = \ker(T_K^*)^\perp$, y $\ker(T_K) = \{0\}$ si y sólo si $\mathrm{Im}(T_K) = L^2(M,E)$.

Dado que $T_K u \overset{\text{def}}{=} \widetilde{P}(\widetilde{Q}u)$, tenemos que $\mathrm{Im}(T_K) \subseteq \mathrm{Im}(\widetilde{P})$ y en particular $\mathrm{codim}_{\mathbf{R}} \mathrm{Im}(\widetilde{P}) < +\infty$. Esto implica que[10] $\mathrm{Im}(\widetilde{P})$ es cerrado. Dado que $\mathscr{C}^\infty(M,E)$ es denso en $W^{d,2}(M,E)$ tenemos que en $L^2(M,E)$ se verifica

$$(\widetilde{P}(W^{d,2}(M,E))^\perp = (P(\mathscr{C}^\infty(M,E)))^\perp \overset{\text{def}}{=} \ker(\widetilde{P^*}),$$

i.e., $L^2(M,E) = \overline{\mathrm{Im}}(\widetilde{P}) \oplus^\perp \ker(\widetilde{P^*}) = \mathrm{Im}(\widetilde{P}) \oplus^\perp \ker(\widetilde{P^*})$ con $\dim_{\mathbf{R}} \ker(\widetilde{P^*}) \overset{\text{def}}{=} \mathrm{codim}_{\mathbf{R}} \mathrm{Im}(\widetilde{P}) < +\infty$, donde el operador $\widetilde{P^*} : W^{d,2}(M,E) \to L^2(M,E)$ extiende al operador elíptico adjunto $P^* : \mathscr{C}^\infty(M,E) \to \mathscr{C}^\infty(M,E)$. En particular, intercambiando el rol de P y P^*, deducimos que $\dim_{\mathbf{R}} \ker(\widetilde{P}) < +\infty$.

Paso 3. *Regularidad elíptica* (*bootstrapping*). Para reducirnos nuevamente al caso de secciones $\mathscr{C}^\infty$ es necesaria la **desigualdad de Gårding**, que se demuestra usando operadores pseudo-diferenciales[11]:

> Sea $u \in L^2(M,E)$ y $k \in \mathbf{N}$. Si $v := \widetilde{P}u \in W^{k,2}(M,E)$ entonces $u \in W^{k+d,2}(W,E)$ y existe $C_k \in \mathbf{R}^{>0}$ tal que $\|u\|_{W^{k+d,2}} \leq C_k(\|v\|_{W^{k,2}} + \|u\|_{L^2})$.

Por otro lado, el teorema de **inyecciones de Sobolev** para espacios de Hölder[12] implica que para todo entero $k > \ell + \frac{1}{2}\dim_{\mathbf{R}}(M)$ se tiene $W^{k,2}(M,E) \subseteq \mathscr{C}^\ell(M,E)$. Así, tenemos que si $u \in \ker(\widetilde{P})$ (i.e., $v \equiv 0 \in W^{k,2}(M,E)$ para todo $k \in \mathbf{N}$) entonces $u \in \bigcap_{k\in\mathbf{N}} W^{k+d,2}(M,E) = \mathscr{C}^\infty(M,E)$, y en particular $\ker(\widetilde{P}) = \ker(P)$. Del mismo modo, deducimos que $\ker(\widetilde{P^*}) = \ker(P^*)$ y así $L^2(M,E) = \widetilde{P}(W^{d,2}(M,E)) \oplus^\perp \ker(P^*)$.

Por último, y dado que $\ker(P^*) \subseteq \mathscr{C}^\infty(M,E)$, la desigualdad de Gårding implica que podemos extender la descomposición ortogonal anterior a $W^{k,2}(M,E) = \widetilde{P}(W^{k+d,2}(M,E)) \oplus^\perp \ker(P^*)$ para todo $k \in \mathbf{N}$ y con ello deducir que $\mathscr{C}^\infty(M,E) = P(\mathscr{C}^\infty(M,E)) \oplus^\perp \ker(P^*)$. $\square$

Teorema (Hodge): Sea (M,g) variedad compacta orientada. Entonces, para todo $p \in \{0,\ldots,\dim_{\mathbf{R}}(M)\}$ hay un isomorfismo canónico $\mathrm{H}^p_{\mathrm{dR}}(M,\mathbf{R}) \cong \mathscr{H}^p(M)$. En particular, $\dim_{\mathbf{R}} \mathrm{H}^p_{\mathrm{dR}}(M,\mathbf{R}) < +\infty$.

Prueba: Dado que el operador de Hodge-Laplace-Beltrami $\Delta_g : \mathscr{A}^p(M) \to \mathscr{A}^p(M)$ es elíptico y formalmente auto-adjunto, el Teorema anterior implica que $\mathscr{A}^p(M) = \ker(\Delta_g) \oplus^\perp \mathrm{Im}(\Delta_g) \overset{\text{def}}{=} \mathscr{H}^p(M) \oplus^\perp \mathrm{Im}(\Delta_g)$. Además, como $\Delta_g \overset{\text{def}}{=} \mathrm{dd}^* + \mathrm{d}^*\mathrm{d}$, tenemos $\mathrm{Im}(\Delta_g) \subseteq \mathrm{d}(\mathscr{A}^{p-1}(M)) + \mathrm{d}^*(\mathscr{A}^{p+1}(M)) \subseteq \mathscr{A}^p(M)$. Más aún,

1. $\mathrm{d}(\mathscr{A}^{p-1}(M)) \perp \mathrm{d}^*(\mathscr{A}^{p+1}(M))$ pues $\langle\langle \mathrm{d}\omega, \mathrm{d}^*\eta\rangle\rangle \overset{\text{def}}{=} \langle\langle \mathrm{d}^2\omega, \eta\rangle\rangle = 0$.
2. $\mathscr{H}^p(M) \perp (\mathrm{d}(\mathscr{A}^{p-1}(M)) \oplus^\perp \mathrm{d}^*(\mathscr{A}^{p+1}(M)))$ pues si $\Delta_g\omega = 0$ entonces $\mathrm{d}\omega = \mathrm{d}^*\omega = 0$ y luego $\langle\langle \omega, \mathrm{d}\eta\rangle\rangle \overset{\text{def}}{=} \langle\langle \mathrm{d}^*\omega, \eta\rangle\rangle = 0$ y $\langle\langle \omega, \mathrm{d}^*\tau\rangle\rangle \overset{\text{def}}{=} \langle\langle \mathrm{d}\omega, \tau\rangle\rangle = 0$.

Así, concluímos que $\mathrm{Im}(\Delta_g) = \mathrm{d}(\mathscr{A}^{p-1}(M)) \oplus^\perp \mathrm{d}^*(\mathscr{A}^{p+1}(M))$. Para calcular $\mathrm{H}^p_{\mathrm{dR}}(M,\mathbf{R}) \overset{\text{def}}{=} \ker(\mathrm{d})/\mathrm{Im}(\mathrm{d})$, notemos que $\ker(d)$ contiene $\mathscr{H}^p(M) \oplus^\perp d(\mathscr{A}^{p-1}(M))$ y que si $\mathrm{d}^*\eta \in \ker(d) \cap \mathrm{d}^*(\mathscr{A}^{p+1}(M))$ entonces la condición $\mathrm{dd}^*\eta = 0$ implica que $\|\mathrm{d}^*\eta\|^2 = \langle\langle \mathrm{d}^*\eta, \mathrm{d}^*\eta\rangle\rangle \overset{\text{def}}{=} \langle\langle \eta, \mathrm{dd}^*\eta\rangle\rangle = 0$ y luego $\mathrm{d}^*\eta = 0$. Así,

$$\mathrm{H}^p_{\mathrm{dR}}(M,\mathbf{R}) \overset{\text{def}}{=} \ker(\mathrm{d})/\mathrm{Im}(\mathrm{d}) = \left(\mathscr{H}^p(M) \oplus^\perp \mathrm{d}(\mathscr{A}^{p-1}(M))\right)/\mathrm{d}(\mathscr{A}^{p-1}(M)) \cong \mathscr{H}^p(M). \quad \square$$

La extensión del Teorema anterior al caso de variedades complejas (X,h) con una **métrica hermitiana** es automático para Δ_g, con $g = \mathrm{Re}(h)$. Por otro lado, si además suponemos que nuestra variedad compleja es de **Kähler** entonces podremos definir un laplaciano anti-holomorfo $\Delta_{\overline{\partial}} : \mathscr{A}^{p,q}(X) \to \mathscr{A}^{p,q}(X)$ y probar una versión más refinada del resultado anterior.

[8] Ver H. Brezis, *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*, Theorem 9.16.

[9] Ver H. Brezis, *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*, Theorem 6.6.

[10] Un operador lineal continuo entre espacios de Banach con cokernel finito-dimensional tiene imagen cerrada (e.g. ver aquí).

[11] Ver J. Bertin, J.-P. Demailly, L. Illusie, C. Peters, *Introduction à la Théorie de Hodge*, pág 17.

[12] Ver H. Brezis, *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*, Corollary 9.13.

Sea (X,h) variedad hermitiana de $\dim_{\mathbf{C}}(X) = n$ y sea $\omega - \mathrm{Im}(h) = \frac{i}{2}(h - \overline{h}) \underset{\text{loc}}{=} \frac{i}{2}\sum_{j,k} h_{jk}(z)\,\mathrm{d}z_k \wedge \mathrm{d}\overline{z}_k$ la $(1,1)$-forma real definida positiva asociada a h. Como (X,h) es una variedad orientable (ecuaciones de Cauchy-Riemann), extendemos la $\star$ de Hodge a $\star : \mathscr{A}^{p,q}(X) \to \mathscr{A}^{n-q,n-p}(X)$ por la fórmula $u \wedge \star\overline{v} = \langle u, v\rangle\,\mathrm{dvol}_h$ con

$$\mathrm{dvol}_h \underset{\text{loc}}{=} \left(\frac{i}{2}\right)^n \det(h_{jk})\,\mathrm{d}z_1 \wedge \mathrm{d}\overline{z}_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}z_n \wedge \mathrm{d}\overline{z}_n \overset{\text{def}}{=} \frac{\omega^n}{n!} \in \mathscr{A}^{n,n}(X).$$

Dado que $\dim_{\mathbf{R}}(X) = m = 2n$ es **par**, tenemos que $\mathrm{d}^* = (-1)^{pm+1} \star \circ\, \mathrm{d} \circ \star = - \star \circ\, \mathrm{d} \circ \star$. Como $\mathrm{d} = \partial + \overline{\partial}$ podemos considerar sus adjuntos formales $\partial^* : \mathscr{A}^{p+1,q}(X) \to \mathscr{A}^{p,q}(X)$ y $\overline{\partial}^* : \mathscr{A}^{p,q+1}(X) \to \mathscr{A}^{p,q}(X)$ y calcular (tal como en el caso riemanniano) que $\partial^* = - \star \circ \overline{\partial} \circ \star$ y $\overline{\partial}^* = - \star \circ \partial \circ \star$. En particular, $\mathrm{d}^* = \partial^* + \overline{\partial}^*$.

Definición: Sea (X,h) variedad hermitiana de $\dim_{\mathbf{C}}(X) = n$. Se define el operador laplaciano holomorfo (resp. anti-holomorfo) $\mathscr{A}^{p,q}(X) \to \mathscr{A}^{p,q}(X)$ mediante $\Delta_\partial := \partial\partial^* + \partial^*\partial$ (resp. $\Delta_{\overline{\partial}} := \overline{\partial}\overline{\partial}^* + \overline{\partial}^*\overline{\partial}$). En particular,

$\mathscr{H}^{p,q}_{\overline{\partial}}(X) := \ker(\Delta_{\overline{\partial}}) = \{\eta \in \mathscr{A}^{p,q}(X),\ \Delta_{\overline{\partial}}\eta = 0\}$ es el espacio de (p,q)-formas $\overline{\partial}$-armónicas en X.

<u>**En todo lo que sigue**</u> supondremos que $\omega \in \mathscr{A}^{1,1}(X)$ es una **forma de Kähler** (i.e., $\mathrm{d}\omega = 0$) y definimos

$L := \omega \wedge - : \mathscr{A}^{p,q}(X) \to \mathscr{A}^{p+1,q+1}(X),\ \eta \mapsto \omega \wedge \eta$ el **operador de Lefschetz**.

Su adjunto $\Lambda = L^*$ está dado por $\Lambda = \star^{-1} \circ L \circ \star$ pues para $\eta \in \mathscr{A}^{p,q}(X)$ y $\tau \in \mathscr{A}^{p+1,q+1}(X)$ se tiene

$$\langle \eta, \Lambda\tau\rangle\,\mathrm{dvol}_h \overset{\text{def}}{=} \eta \wedge \overline{\star(\star^{-1}(L \star \tau))} \overset{\text{def}}{=} \eta \wedge \overline{\omega \wedge \star\tau} = (\eta \wedge \omega) \wedge \overline{\star\tau} \overset{\text{def}}{=} L\eta \wedge \overline{\star\tau} \overset{\text{def}}{=} \langle L\eta, \tau\rangle\,\mathrm{dvol}_h.$$

Hecho (identidades de Kähler): Sea $\omega \in \mathscr{A}^{1,1}(X)$ definida positiva, entonces ω es una forma de Kähler si y sólo si para todo punto $x_0 \in X$ existen coordenadas holomorfas $(z_1, \ldots, z_n)$ centradas en x_0 tales que $\omega \underset{\text{loc}}{=} i\sum_{1\leq j,k\leq n} \omega_{jk}(z)\,\mathrm{d}z_j \wedge \mathrm{d}\overline{z}_k$ cumple $\omega_{jk} = \delta_{jk} + O(|z|^2)$. En particular, en tal caso se calcula[13]

$$[\overline{\partial}^*, L] = i\partial, \text{ i.e., } [\overline{\partial}^*, L]\eta \overset{\text{def}}{=} \overline{\partial}(\omega \wedge \eta) - \omega \wedge \overline{\partial}^*\eta = i\partial\eta.$$

Dado que ω es una forma real y dado que $\star$ es un operador real (i.e. conmuta con la conjugación), tenemos que $\Lambda : \mathscr{A}^{p,q}(X) \to \mathscr{A}^{p-1,q-1}(X)$ es un operador real. Así, la relación $[\overline{\partial}^*, L] = i\partial$ implica que $[\partial^*, L] = -i\overline{\partial}$. Para operadores P, Q y $\lambda \in \mathbf{C}$ tenemos $(\lambda[P,Q])^* = \overline{\lambda}[Q^*, P^*]$, y por ende se tiene $[\Lambda, \overline{\partial}] = -i\partial^*$ y $[\Lambda, \partial] = i\overline{\partial}^*$.

Lema: Sea (X,h) variedad de Kähler. Entonces, $\Delta_g = 2\Delta_\partial = 2\Delta_{\overline{\partial}}$.

Prueba: La identidad de Kähler $i\overline{\partial}^* = [\Lambda, \partial]$ implica que $\Delta_{\overline{\partial}} \overset{\text{def}}{=} \overline{\partial}\overline{\partial}^* + \overline{\partial}^*\overline{\partial} = i(\overline{\partial}(\partial\Lambda - \Lambda\partial)) + i(\partial\Lambda - \Lambda\partial)\overline{\partial}$ y así $\Delta_{\overline{\partial}} = i\overline{\partial}\partial\Lambda - i\Lambda\partial\overline{\partial} + i(\partial\Lambda\overline{\partial} - \overline{\partial}\Lambda\partial)$. Como $i\partial\overline{\partial}$ cumple $\overline{i\partial\overline{\partial}} = -i\overline{\partial}\partial = i\partial\overline{\partial}$, y tanto L, Λ y $i(\partial\Lambda\overline{\partial} - \overline{\partial\Lambda\overline{\partial}})$ son operadores reales, tenemos que $\Delta_{\overline{\partial}}$ es un operador real. Dado que $\overline{\Delta_{\overline{\partial}}} \overset{\text{def}}{=} \Delta_\partial$, deducimos que para una variedad de Kähler $\Delta_\partial = \Delta_{\overline{\partial}}$. Dado que $\Delta_g = \mathrm{d}\mathrm{d}^* + \mathrm{d}^*\mathrm{d}$ y $\mathrm{d} = \partial + \overline{\partial}$, deducimos que $\Delta_g = \Delta_\partial + \Delta_{\overline{\partial}}$. $\square$

Corolario: Sea (X,h) variedad de Kähler, entonces hay una descomposición ortogonal

$$\mathscr{A}^{p,q}(X) = \mathscr{H}^{p,q}_{\overline{\partial}}(X) \oplus^\perp \overline{\partial}(\mathscr{A}^{p,q-1}(X)) \oplus^\perp \overline{\partial}^*(\mathscr{A}^{p,q+1}(X)),$$

y en particular hay un isomorfismo canónico $\mathscr{H}^{p,q}_{\overline{\partial}}(X) \cong \mathrm{H}^{p,q}_{\overline{\partial}}(X)$ con la cohomología de Dolbeault.

Prueba: La demostración es idéntica al caso riemanniano, reemplazando d por $\overline{\partial}$ y utilizando el hecho que $\Delta_{\overline{\partial}} = \frac{1}{2}\Delta_g$ es un operador elíptico formalmente auto-adjunto.

Teorema de descomposición de Hodge: Sea (X,h) una variedad de Kähler compacta. Entonces, para todo $k \in \{0, \ldots, \dim_{\mathbf{R}}(X) = 2n\}$ hay una descomposición

$$\mathrm{H}^k_{\mathrm{dR}}(X, \mathbf{C}) = \bigoplus_{p+q=k} \mathrm{H}^{p,q}_{\overline{\partial}}(X) \text{ donde } \overline{\mathrm{H}^{p,q}_{\overline{\partial}}(X)} = \mathrm{H}^{q,p}_{\overline{\partial}}(X).$$

Prueba: Dado que $\Delta_g = 2\Delta_{\overline{\partial}}$, tenemos $\mathscr{H}^k(M, \mathbf{C}) \overset{\text{def}}{=} \mathscr{H}^k(M) \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{C} = \bigoplus_{p+q=k} \mathscr{H}^{p,q}_{\overline{\partial}}(X)$. $\square$

Corolario (Teoremas de dualidad): Sea (M,g) (resp. (X,h)) una variedad riemanniana (resp. hermitiana) compacta orientada de $\dim_{\mathbf{R}}(M) = m$ (resp. $\dim_{\mathbf{C}}(X) = n$). Entonces, la $\star$ (resp. $\overline{\star}$) de Hodge induce:

1. **Dualidad de Poincaré:** $\mathrm{H}^p_{\mathrm{dR}}(M, \mathbf{R}) \cong \mathrm{H}^{m-p}_{\mathrm{dR}}(M, \mathbf{R})$ para todo $p \in \{0, \ldots, m\}$.

2. **Dualidad de Serre:** $\mathrm{H}^{p,q}_{\overline{\partial}}(X) \cong \mathrm{H}^{n-p,n-q}_{\overline{\partial}}(X)$ para todos $(p,q) \in \mathbf{N}^2$ con $p + q \leq \dim_{\mathbf{R}}(X) = 2n$.

Prueba: Para (M,g) consideramos $\mathrm{H}^p_{\mathrm{dR}}(X, \mathbf{R}) \times \mathrm{H}^{m-p}_{\mathrm{dR}}(X, \mathbf{R}) \to \mathbf{R},\ (\omega, \eta) \mapsto \int_M \omega \wedge \eta$. Sea $u \in \mathscr{H}^p(M)$ con $[u] = \omega \neq 0$, entonces $\eta := [\star u] \neq 0$ verifica $\int_M u \wedge \star u \overset{\text{def}}{=} \int_M \langle u, u\rangle\,\mathrm{dvol}_g \overset{\text{def}}{=} \langle\langle u, u\rangle\rangle > 0$, i.e., la forma bilineal anterior es no-degenerada. El caso complejo (X,h) es completamente análogo. $\square$

[13] Ver P. Griffiths, J. Harris, *Principles of Algebraic Geometry*, págs 111-114.