Seminario THC 3: Ciclos evanescentes

Obs: Sea $f: E^n \to \mathbb{P}^1$ un pincel holomorfo $\overset{\text{propio}}{\vee}$ con $D \subseteq E$ $\overset{\text{cerrado}}{\vee}$ de codim 1 tq. $f|_D$ es submersión, $C=\{c_1,\dots,c_s\}\subseteq\mathbb{P}^1$ valores críticos de f y $\infty\in\mathbb{P}^1$, tq. $f|_{E\setminus f^{-1}(\infty)}$ sólo tiene sing. aisladas, entonces vimos que

$$H_n\left(E\setminus(f^{-1}(\infty)\cup D),\ f^{-1}(b)\setminus D\right)\simeq\mathbb{Z}^{\mu} \qquad ..\ b\in\mathbb{P}^1\setminus(C\cup\{\infty\})$$

y más aún para cada punto crítico $p\in f^{-1}(C)$

$$H_n\left(E\setminus(f^{-1}(\infty)\cup D),\ f^{-1}(b)\setminus D\right)\simeq\bigoplus_{\substack{p\in f^{-1}(C)\\ \text{pto crítico}}} H_n\left(\overline{B_p(\varepsilon)},\ f^{-1}(b)\cap\partial\overline{B_p(\varepsilon)}\right)$$

$$\shortparallel$$

$$H_n\big(\underbrace{B^n\wedge\dots\wedge B^n}_{\mu(p)\text{-veces}},\ \underbrace{S^{n-1}\sqcup\dots\sqcup S^{n-1}}\big)\simeq\mathbb{Z}^{\mu(p)}$$

Cada uno de estos generadores es llamado un dedal de Lefschetz (Lefschetz thimble).

Tomando secuencia exacta larga del par $\left(E\setminus(f^{-1}(\infty)\cup D),\ f^{-1}(b)\setminus D\right)$ tenemos

$$0\to H_n(f^{-1}(b)\setminus D)\to H_n\left(E\setminus(f^{-1}(\infty)\cup D)\right)\to\mathbb{Z}^{\mu}\xrightarrow{\partial}H_{n-1}(f^{-1}(b)\setminus D)\to H_{n-1}\left(E\setminus(f^{-1}(\infty)\cup D)\right)\to 0$$

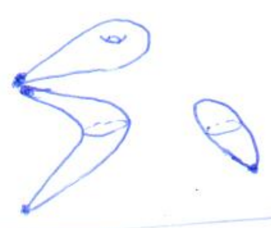
En particular, si $H_{n-1}\left(E\setminus(f^{-1}(\infty)\cup D)\right)=0$

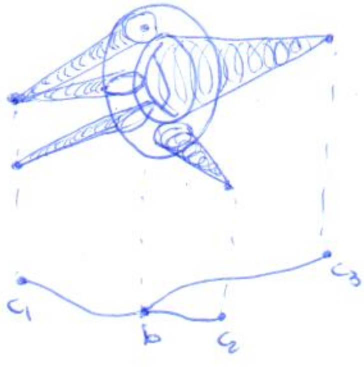
$\Rightarrow H_{n-1}(f^{-1}(b)\setminus D)$ es generado por $\partial B^n = S^{n-1}$ los bordes de los dedales de Lefschetz, estos son los llamados ciclos evanescentes (vanishing cycles)

Por ejemplo, cuando X es int. completa obtenemos

$$0\to\underset{\underset{\mathbb{Z}^{\alpha}}{\wr\!\wr}}{H_n(X\setminus Z)}\to\underset{\underset{\mathbb{Z}^{\mu}}{\wr\!\wr}}{H_n(X\setminus Z, Y\setminus Z)}\to\underset{\underset{\mathbb{Z}^{\beta}}{\wr\!\wr}}{H_{n-1}(Y\setminus Z)}\to 0 \qquad \mu=\alpha+\beta$$

Generadores de $\mathbb{Z}^{\alpha}$ se ven así





$\alpha=3$
$\beta=2$
$\mu=5$

Ej: En caso de tener un mapa ~~[illegible]~~ regular

$$f : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$$
$$(x_1,\dots,x_n) \mapsto f(x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{C}[x_1,\dots,x_n]$$

tenemos que $f = f_0 + f_1 + \dots + f_d$ con f_i homogeneo de grado i. El pincel afín

$$\{f = t\} \mapsto t \in \mathbb{C}$$

se extiende a un pincel proyectivo

$$\{s\cdot(f_0\cdot x_0^{d} + f_1\cdot x_0^{d-1} + \dots + f_{d-1}\cdot x_0 + f_d) = \overset{t\cdot x_0^{d}}{\overset{\downarrow}{\cancel{t}}}\} \mapsto (s:t) \in \mathbb{P}^1$$

para cada $(s:t) \in \mathbb{P}^1 \setminus \{\infty\}$, la sección hiperplano de la fibra es

$$\{f_d = 0\} \subseteq \mathbb{P}^{n-1}_{\infty} = \{x_0 = 0\}.$$

Decimos que $f(x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{C}[x_1,\dots,x_n]$ es un polinomio moderado si $\{f_d = 0\} \subseteq \mathbb{P}^{n-1}_{\infty}$ es suave. En tal caso tenemos

$$0 = H_n(\mathbb{C}^n) \to \boxed{H_n(\mathbb{C}^n, f^{-1}(b)) \xrightarrow{\sim} H_{n-1}(f^{-1}(b))} \to H_{n-1}(\mathbb{C}^n) = 0.$$

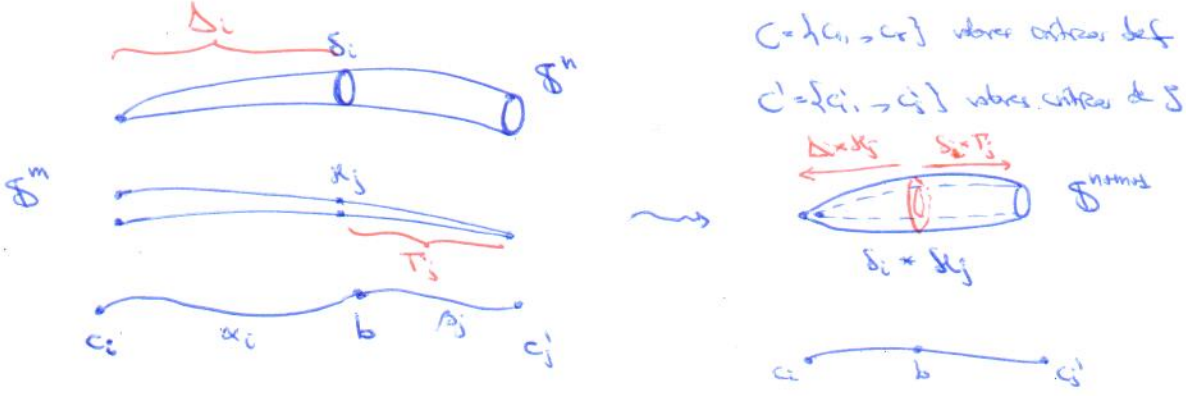
Teorema (Pham) Sean f y g dos polinomios moderados con conjuntos de valores críticos disjuntos. Sea

$$X = \{(x,y) \in \mathbb{C}^{n+1} \times \mathbb{C}^{m+1} : f(x) = g(y)\}.$$

Entonces $H_{n+m+1}(X)$ es libre de rango finito generado por la base

$$\Delta_i \times \varkappa_j - \delta_i \times T_j = \bigcup_{t \in \alpha_i * \beta_j} \delta_{i,t} \times \varkappa_{j,t} =: \delta_i * \varkappa_j, \quad i = 1,\dots,\mu,\ j = 1,\dots,\mu'$$

donde $\{\delta_i\}_{i=1}^{\mu}$ es un conjunto de ciclos evanescentes de $f^{-1}(b)$, $\{\varkappa_j\}_{j=1}^{\mu'}$ es conjunto de ciclos evanescentes de $g^{-1}(b)$, Δ_i es el dedal de Lefschetz correspondiente a δ_i sobre el camino α_i, T_j es el dedal de Lefschetz correspondiente a $\varkappa_j$ sobre β_j

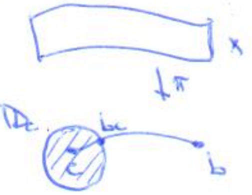


$C = \{c_1,\dots,c_r\}$ valores críticos de f

$C' = \{c'_1,\dots,c'_s\}$ valores críticos de g

Dem:

$$H_{n+m+1}\big(X, \underbrace{f^{-1}(b)\times g^{-1}(b)}_{\pi^{-1}(b)}\big) \simeq \bigoplus_{c\in C\cup C'} H_{n+m+1}\big(\pi^{-1}(\overline{\mathbb{D}}_c), f^{-1}(b_c)\times g^{-1}(b_c)\big)$$



donde $\pi : X \to \mathbb{C}$

$(x,y) \longmapsto f(x)=g(y)$.

Para cada $c \in C$:

$$H_{n+m+1}\big(\underbrace{\pi^{-1}(\overline{\mathbb{D}}_c), f^{-1}(b_c)\times g^{-1}(b_c)}_{\underset{\text{Ehresmann}}{\overset{\text{difeo } C^\infty}{\simeq}} (f^{-1}(\overline{\mathbb{D}}_c), f^{-1}(b_c))\times g^{-1}(b_c)}\big) \overset{\text{Künneth}}{\simeq} \underbrace{\bigoplus_{p+q=n+m+1} H_p(f^{-1}(\overline{\mathbb{D}}_c), f^{-1}(b_c)) \otimes_{\mathbb{Z}} H_q(\overset{\text{int. completa aisl}}{g^{-1}(b_c)})}$$

$$= H_{n+1}(f^{-1}(\overline{\mathbb{D}}_c), f^{-1}(b_c)) \otimes H_m(g^{-1}(b_c))$$

$$\big(\simeq H_n(f^{-1}(b_c)) \otimes H_m(g^{-1}(b_c))\big)$$

análogamente con $c' \in C'$, luego

$$\bigoplus_{i,j} \mathbb{Z}\cdot(\Delta_i \times \mathcal{H}_j)$$

$$H_{n+m+1}(X, f^{-1}(b)\times g^{-1}(b)) \simeq \bigoplus_{c\in C} \underbrace{H_{n+1}(f^{-1}(\overline{\mathbb{D}}_c), f^{-1}(b_c)) \overset{\shortparallel}{\otimes} H_m(g^{-1}(b_c))}$$

$$\oplus \bigoplus_{c'\in C'} H_n(f^{-1}(b_{c'})) \otimes H_{m+1}(g^{-1}(\overline{\mathbb{D}}_{c'}), g^{-1}(b_{c'})).$$

$$\shortparallel$$

$$\bigoplus_{i,j} \mathbb{Z}(\delta_i \times \Gamma_j)$$

Por otro lado, como f y g son moderadas tenemos la sec. exacta

$$0 \to H_{n+m+1}(X) \to H_{n+m+1}(X, f^{-1}(b)\times g^{-1}(b)) \xrightarrow{\partial} H_{n+m}(f^{-1}(b)\times g^{-1}(b)) \to 0$$

$$\begin{matrix} & \wr & & \wr \text{ Künneth} \\ & & & H_n(f^{-1}(b)) \otimes H_m(g^{-1}(b)) \\ & \mathbb{Z}^{2\mu\cdot\mu'} & & \wr \\ & & & \mathbb{Z}^{\mu\cdot\mu'} \end{matrix}$$

luego $H_{n+m+1}(X)$ es libre de rango $\mu\cdot\mu'$ generado por $\mathrm{Ker}(\partial)$, i.e. por $\Delta_i \times \mathcal{H}_j - \delta_i \times \Gamma_j = \delta_i * \mathcal{H}_j$. ■

Cor: Sea $s \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$ y $\alpha \in \mathbb{C}$ tq $\alpha^d = s$. Si $n \geq 0$ y

$$X = \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{C}^{n+1} : x_1^d + \dots + x_n^d = s\} \subseteq \mathbb{C}^{n+1}$$

$$\Rightarrow H_n(X) = \bigoplus_{\beta \in \{0,1,\dots,d-2\}^{n+1}} \mathbb{Z}\cdot\delta_\beta$$

donde $\delta_\beta = \sum_{a\in\{0,1\}^{n+1}} (-1)^{\sum_{i=1}^{n+1}(1-a_i)} \cdot \Delta_{\beta+a}$ con $\Delta_{\beta+a} : \Delta^n = \{(t_1, \dots, t_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid t_i \geq 0, \sum t_i = 1\} \to X$ dado por

$$\Delta_{\beta+a}(t) = \left(\alpha t_1^{\frac{1}{d}} \zeta_d^{\beta_1+a_1}, \dots, \alpha t_{n+1}^{\frac{1}{d}} \zeta_d^{\beta_{n+1}+a_{n+1}}\right).$$

Dem: Inducción en n:

<u>n=0</u>: $\{x^d = s\} \subseteq \mathbb{C}$ son d puntos, y $\delta_i = [\alpha\cdot\zeta_d^{i+1}] - [\alpha\cdot\zeta_d^{i}]$, $i=0,\dots,d-2$ es base de $H_1(\mathbb{C}, \{x^d=s\}) \simeq \overset{\text{reducida}}{\tilde{H}_0}(\{x^d=s\})$

$(0 \to H_1(\mathbb{C}, \{x^d=s\}) \to H_0(\{x^d=s\}) \xrightarrow{} \overset{\text{ker}}{H_0(\mathbb{C})} \to 0)$

n>0: Tome $f(x_1,\dots,x_n) := x_1^d + \dots + x_n^d$, $g(x_{n+1}) = s - x_{n+1}^d$.

Por HI una base de $H_{n}(\mathbb{C}^{n}, \{f=s\}) \cong H_{n-1}(\{f=s\})$ es $\{\delta_{\beta}\}_{\beta\in\{0,\dots,d-2\}^n}$, y una base de $H_1(\mathbb{C},\{g=0\}) \cong H_0(\{g=0\})$' reducido es $\tilde{\delta}_i = [d\cdot\xi_d^{i+1}]-[d\cdot\xi_d^{i}]$

$$\Rightarrow \text{una base de } H_n(X) \text{ es } \delta_\beta = \delta_{\tilde{\beta}} * \tilde{\delta}_{\beta_{n+1}} = \left(r^{\frac{1}{d}}\,\delta_{\tilde{\beta}}\right)\times\left((1-r)^{\frac{1}{d}}\,\tilde{\delta}_{\beta_{n+1}}\right) \quad ■$$

Obs: En general, un pencil de hipersuperficies puede tener singularidades con número de Milnor >1

$$f: \mathbb{C}^{n+1} \to \mathbb{C}$$
$$(x_1,\dots,x_{n+1}) \mapsto x_1^d + \dots + x_{n+1}^d \rightsquigarrow \mu(f^{-1}(0),0) = \dim \frac{\mathcal{O}_{\mathbb{C}^{n+1},0}}{\langle x_1^{d-1},\dots,x_{n+1}^{d-1}\rangle} = (d-2)^{n+1}.$$

Def: Un pincel se dice pincel de Lefschetz si todas sus fibras son suaves o tienen un único punto crítico no degenerado ($\mu=1$).

Teorema: Sea $X \overset{\mathbb{P}^N}{\subseteq}$ variedad proyectiva suave, $Y \subset X$ sección hiperplana suave. El conjunto de pinceles de Lefschetz que contienen a Y son densos en el espacio $\mathbb{P}_Y^{N-1} = \{$pinceles que contienen a $Y\}$. En part., un pincel general es Lefschetz.

Dem: Sea $\check{\mathbb{P}}^N = \{H \subseteq \mathbb{P}^N \text{ hiperplano}\}$, luego $Y \in \check{\mathbb{P}}^N$ y $\mathbb{P}_Y^{N-1} = \{G \in Gr(1,\check{\mathbb{P}}^N) : Y \in G\}$. Sea

$$\check{X} = \{H \in \check{\mathbb{P}}^N : X \cap H \text{ es singular}\} \underset{\substack{\uparrow\\ \text{subvariedad}\\ \text{algebraica}}}{\subsetneq} \check{\mathbb{P}}^N.$$

Si $\dim \check{X} \leq N-2$ ok, pues una recta genérica $G \subseteq \check{\mathbb{P}}^N \setminus \check{X}$. Si $\dim \check{X} = N-1$

$$\Rightarrow \check{X}_0 := \{H \in \check{X} : X\cap H \text{ posee sólo 1 sing. no degenerada}\} \underset{\substack{\uparrow\\ \text{abierto}\\ \text{denso Zariski}}}{\subseteq} \check{X} \qquad \text{(ver Voisin)} \quad ■$$

Def: Sea $f: E \to B$ fibración localmente trivial, luego si $b \in B$, cada loop $\gamma:[0,1]\to B$, $\gamma(0)=\gamma(1)=b$ induce vía trivializaciones locales

un difeomorfismo

$$\begin{array}{ccc} E_b = f^{-1}(b) & \xrightarrow[\varphi_\gamma]{\sim} & E_b = f^{-1}(b) \\ \shortparallel & & \shortparallel \\ E_{\gamma(0)} & \cong E_{\gamma(t)} \cong & E_{\gamma(1)} \end{array}$$

el que a su vez induce un isomorfismo

$$(\varphi_\gamma)_*: H_k(f^{-1}(b)) \simeq H_k(f^{-1}(b))$$
$$\text{i.e. } (\varphi_\gamma)_* \in \mathrm{Aut}(H_k(f^{-1}(b)))$$

en otras palabras tenemos una acción $\rho: \pi_1(B,b) \longrightarrow \mathrm{Aut}(H_k(f^{-1}(b)))$ llamada acción de monodromía.

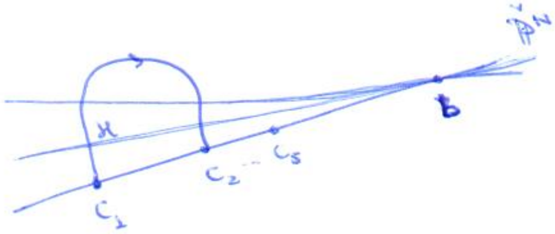
Teorema: (Lefschetz) Si X variedad proyectiva suave$^{\vee}$ de dim $n+1$, y $f: X \to \mathbb{P}^1$ es un pincel de Lefschetz dado por $Z = f^{-1}(\infty)$ sección hiperplana suave y $\underset{f^{-1}(b)}{Y} \in |Z|$ genérica, entonces si $B = \mathbb{P}^1 \setminus (C \cup \{\infty\})$

$$\rho : \pi_1(B, b) \to Aut(H_n(Y \setminus Z)) \text{ es transitiva.}$$

Dem: Sea $D = \{H \in \check{X} : \ell(\overset{\mathbb{P}^1_H}{H}, Z) \text{ no es de Lefschetz}\} \subsetneq \check{X} \leftarrow$ irreducible

$\Rightarrow \check{X} \setminus D$ es conexo

$\Rightarrow \exists\, \mathcal{H} : [0,1] \to \check{X} \setminus D$ t.q. $\mathcal{H}(0) = c_1$, $\mathcal{H}(1) = c_2$, para $C = \{c_1, c_2, \dots, c_s\}$



$\Rightarrow \exists$ isotopía $H : [0,1] \times \mathbb{P}^1_{c_1} \to \bigcup_{t \in [0,1]} \mathbb{P}^1_{\mathcal{H}(t)}$ t.q.

- $H(0,\cdot) : \mathbb{P}^1_{c_1} \xrightarrow{id} \mathbb{P}^1_{c_1}$
- $\forall t \in [0,1]$, $H(t,\cdot) : \mathbb{P}^1_{c_1} \xrightarrow{\sim} \mathbb{P}^1_{\mathcal{H}(t)}$ que envía valores críticos en valores críticos
- $\forall t \in [0,1]$, $H(t,b) = b$ y $H(t,c_1) = \mathcal{H}(t)$.

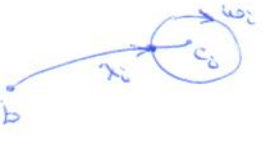
Sean λ_1, λ_2 caminos de b a c_1 y de b a c_2 en $\mathbb{P}^1_{c_1} = \mathbb{P}^1_{c_2}$. monodromía de δ_1, $\delta_{1,0} = \delta_1$

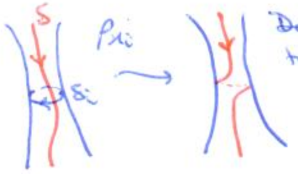
Sea $\lambda^1_t = H(t, \lambda_1)$, En cada $\mathbb{P}^1_{\mathcal{H}(t)}$ el ciclo $\delta_{1,t}$ se desvanece a lo largo de λ^1_t en un único punto crítico no degenerado de $X_{\mathcal{H}(t)}$, luego $\delta_{1,1}$ se desvanece a lo largo de λ^1_1 en $\mathcal{H}(1) = c_2$.

Por la unicidad de los ciclos evanescentes $\delta_{1,1} = \pm \delta_2$ (depende orientación)

$$\Rightarrow \delta_2 = \pm \rho_{\lambda_1 * \mathcal{H} * \lambda_2^{-1}}(\delta_1) \quad \blacksquare$$

Teorema: (Fórmula de Picard-Lefschetz) Sea $f : X^n \to \mathbb{P}^1$ un pincel de Lefschetz, $C = \{c_1, \dots, c_s\}$ valores críticos.
Sea $b \in \mathbb{P}^1 \setminus C$ punto fijo y para cada c_i sea $\gamma_i = \lambda_i * \omega_i * \lambda_i^{-1}$. Sea δ_i el ciclo evanescente sobre c_i.





Luego $\forall\, \delta \in H_{n-1}(f^{-1}(b) \setminus D)$:

$$\boxed{\rho_{\gamma_i}(\delta) = \delta + (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} \langle \delta, \delta_i \rangle \cdot \delta_i}$$