

TAREA 4 – VARIEDADES DIFERENCIABLES (MAT430)

PROFESOR: PEDRO MONTERO, AYUDANTE: MATEO HIDALGO

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA, UNIVERSIDAD TÉCNICA FEDERICO SANTA MARÍA

FECHA DE ENTREGA: **Hasta el 3 de Julio de 2025 a las 23:59 horas.**

Todas las variedades Riemannianas (M, g) serán dotadas de su conexión de Levi-Civita ∇ .

1. **(25 pts)**. Considere el **grupo de Heisenberg** dado por las matrices

$$\mathbf{H} := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, x, y, z \in \mathbf{R} \right\},$$

donde escribiremos $(x, y, z) \in \mathbf{H}$. Consideraremos los campos vectoriales

$$A := \frac{\partial}{\partial x}, B := \frac{\partial}{\partial y} + x \frac{\partial}{\partial z}, C := \frac{\partial}{\partial z},$$

y g la métrica Riemanniana en $\mathbf{H}$ tal que $(A(u), B(u), C(u))$ base ortonormal de $T_u \mathbf{H}$ para todo $u \in \mathbf{H}$. Determine las curvaturas seccionales $K(A \wedge B)$, $K(A \wedge C)$, $K(B \wedge C)$.

2. **(25 pts)**. Sea (M, g) una variedad Riemanniana. Decimos que (M, g) es una **variedad de Einstein** si verifica la Ecuación de Einstein en el vacío dada por

$$\text{Ric}(g) - \frac{s_g}{2}g = \Lambda g$$

para cierta constante $\Lambda \in \mathbf{R}$. Pruebe que si (M, g) es una variedad de Einstein entonces la curvatura escalar es constante y que la Ecuación de Einstein se reduce a $\text{Ric}(g) = \lambda g$ para cierto $\lambda \in \mathbf{R}$ a determinar.

3. **(25 pts)**. Sea (M, g) variedad Riemanniana con borde ∂M , con vector normal unitario exterior al borde denotado por $\vec{n} \in \Gamma(TM)$ y con $\widetilde{\text{vol}}$ la forma volumen inducida por la métrica restringida $g|_{\partial M}$. Si definimos¹ el **laplaciano** de $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ como $\Delta_g(f) := \text{div}(\text{grad}_g(f))$:

- (a) Pruebe que para todas $f, h \in \mathcal{C}^\infty(M)$ se tiene

$$\int_M f \Delta_g(h) \text{vol}_g + \int_M \langle \text{grad}_g(f), \text{grad}_g(h) \rangle_g \text{vol}_g = \int_{\partial M} f \mathcal{L}_{\vec{n}}(h) \widetilde{\text{vol}}$$

y que

$$\int_M (f \Delta_g(h) - h \Delta_g(f)) \text{vol}_g = \int_{\partial M} (f \mathcal{L}_{\vec{n}}(h) - h \mathcal{L}_{\vec{n}}(f)) \widetilde{\text{vol}}.$$

- (b) Pruebe que $f = h$ en M si y sólo si $\Delta_g(f) = \Delta_g(h)$ en M y $f = h$ en ∂M . Pruebe que si $\partial M = \emptyset$ entonces toda función armónica (i.e., tal que $\Delta_g(f) = 0$) es constante.

4. **(25 pts)**. Sea (M, g) una variedad Riemanniana de $\dim(M) = n$ y sea $u \in \mathcal{C}^\infty(M)$. Determine una expresión local de $\Delta_g(f)$ y use esta expresión para probar que si $\tilde{g} := e^{2u}g$ es una métrica conforme a g entonces

$$\Delta_{\tilde{g}} = e^{-2u} \Delta_g + (n-2)e^{-2u} g^{ij} \frac{\partial u}{\partial x^j} \frac{\partial}{\partial x^i}$$

Bonus (15 pts). Sea (M, g) una variedad Riemanniana de $\dim(M) = n$ y sea $u \in \mathcal{C}^\infty(M)$. Considere el operador **bilaplaciano** $\Delta_g^2 := \Delta_g \circ \Delta_g$. Determine una expresión para $\Delta_{\tilde{g}}^2$ donde $\tilde{g} := e^{2u}g$ es una métrica conforme a g .

¹Recordemos que para $X \in \Gamma(TM)$ se define la función divergencia $\text{div}(X)$ como la única función suave tal que $d(\iota_X \text{vol}_g) = \text{div}(X) \text{vol}_g$, y para $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ se define el campo vectorial gradiente $\text{grad}_g(f) \in \Gamma(TM)$ mediante la condición $\langle \text{grad}_g(f), Y \rangle_g = \mathcal{L}_Y(f)$ para todo $Y \in \Gamma(TM)$.