Tarea 3 – Variedades Diferenciables (MAT430)

Profesor: Pedro Montero, Ayudante: Mateo Hidalgo

Departamento de Matemática, Universidad Técnica Federico Santa María

Fecha de entrega: **Hasta el 19 de Junio de 2025 a las 16:05 horas.**

Todas las variedades Riemannianas (M, g) serán dotadas de su conexión de Levi-Civita ∇.

1. **Métricas Riemannianas (20 pts).** Sea $\mathbf{B}^n := \{x \in \mathbf{R}^n,\ \|x\|^2 \overset{\text{def}}{=} (x^1)^2 + \ldots + (x^n)^2 < 1\}$ la bola unitaria y sea $\mathbf{H} := \{x \in \mathbf{R}^n,\ x^1 > 0\}$ el semi-plano superior. Considere la función

$$f : \mathbf{B}^n \to \mathbf{H},\ x \mapsto t + \frac{2(x-t)}{\|x-t\|^2} \text{ donde } t := (-1, 0, \ldots, 0).$$

   Pruebe que f es un difeomorfismo y que induce una isometría entre $(\mathbf{B}^n, 4\frac{\sum_{i=1}^n (\mathrm{d}x^i)^2}{(1-\|x\|^2)^2})$ y $(\mathbf{H}, \frac{\sum_{i=1}^n (\mathrm{d}x^i)^2}{(x^1)^2})$.

2. **Conexión de Levi-Civita (20 pts).**

   Sea (M, g) una variedad Riemanniana y sea $\widetilde{g} := e^{2u} g$ donde $u \in \mathscr{C}^\infty(M)$ es una función suave. Demuestre que si $\widetilde{\nabla}$ es la conexión de Levi-Civita asociada a $\widetilde{g}$ y si $X, Y \in \Gamma(TM)$ entonces

$$\widetilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + \mathscr{L}_X(u) Y + \mathscr{L}_Y(u) X - g(X, Y)\, \mathrm{grad}_g(u),$$

   donde $\mathrm{grad}_g(u) \in \Gamma(TM)$ es el campo vectorial **gradiente de** u, obtenido como el g-dual de $\mathrm{d}u \in \Omega^1(M)$ (i.e., determinado por la condición $g(\mathrm{grad}_g(u), X) = (\mathrm{d}u)(X) \overset{\text{def}}{=} \mathscr{L}_X(u)$ para todo $X \in \Gamma(TM)$).

3. **Geodésicas (20 pts).** Considere $\mathbf{H} := \{(x, y) \in \mathbf{R}^2,\ y > 0\}$ con la **métrica de Poincaré** $g = \frac{1}{y^2}((\mathrm{d}x)^2 + (\mathrm{d}y)^2)$. Pruebe que las geodésicas en $\mathbf{H}$ son de la forma

$$c(t) = (-R\cos(t) + x_0, R\sin(t)) \text{ con } x_0 \in \mathbf{R} \text{ y } R > 0.$$

4. **Campos de Killing (20 pts).** Considere $\mathbf{S}^2 \subseteq \mathbf{R}^3$ con la métrica $g = (\mathrm{d}\theta)^2 + \sin^2(\theta)(\mathrm{d}\varphi)^2$. Determine las ecuaciones de Killing para

$$X = P(\theta, \varphi)\frac{\partial}{\partial\theta} + Q(\theta, \varphi)\frac{\partial}{\partial\varphi} \in \Gamma(T\mathbf{S}^2).$$

   ¿Existen campos de Killing constantes en la esfera $(\mathbf{S}^2, g)$?

5. **Curvatura (20 pts).** Considere $(\mathbf{R}^n, g_{\mathrm{can}})$ y sea $\widetilde{g} := e^{2u} g_{\mathrm{can}}$ con $u \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$. Defina $\sigma_{ij} := \mathrm{Vect}_{\mathbf{R}}(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}) \subseteq T_p\mathbf{R}^n$ plano vectorial, para todo $p \in \mathbf{R}^n$, y sea $\widetilde{K}$ la curvatura seccional asociada a la métrica $\widetilde{g}$. Pruebe que

$$\widetilde{K}(\sigma_{ij}) = -e^{-2u}\left(\partial_{ii}u + \partial_{jj}u + \sum_{k\neq i,j}(\partial_k u)^2\right),$$

   donde $\partial_{ij}u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^i \partial x^j}$ y $\partial_k u = \frac{\partial u}{\partial x^k}$. Utilice lo anterior para describir explícitamente el tensor de curvatura de Riemann $R(X, Y, Z, W)$ para la bola unitaria $(\mathbf{B}^n, \frac{4}{(1-\|x\|^2)^2}\sum_{i=1}^n (\mathrm{d}x^i)^2)$.

Bonus (15 pts). Sea (M, g) variedad Riemanniana. Probar que $\Gamma_{ij}^j = \frac{\partial}{\partial x^i}(\ln\sqrt{\det(g_{ij})})$.

Indicación: Puede usar directamente, sin demostración, la fórmula de Jacobi*: si $A : \mathbf{R} \to \mathrm{GL}_n(\mathbf{R}),\ t \mapsto A(t)$ es una función suave entonces $\frac{d}{dt}\det(A(t)) = \det(A(t))\,\mathrm{tr}(A(t)^{-1}A'(t))$.*