Certamen 2 – Variedades Diferenciables (MAT430, 2025-1)

Profesor: Pedro Montero, Ayudante: Mateo Hidalgo

Departamento de Matemática, Universidad Técnica Federico Santa María

Nombre y Apellido: **ROL USM:**

Problema 1

Durante todo este problema consideraremos el **grupo de Heisenberg** dado por las matrices

$$\mathbf{H} := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ x, y, z \in \mathbf{R} \right\},$$

y en particular $\mathbf{H}$ es un grupo de Lie difeomorfo a $\mathbf{R}^3$, y escribiremos $(x, y, z) \in \mathbf{H}$. Para $u \in \mathbf{H}$ denotamos la multiplicación izquierda por u como $L_u : \mathbf{H} \to \mathbf{H},\ h \mapsto uh$ y consideraremos los siguientes campos vectoriales

$$A := \frac{\partial}{\partial x},\ B := \frac{\partial}{\partial y} + x\frac{\partial}{\partial z},\ C := \frac{\partial}{\partial z}.$$

Recuerde que $L_u^* A = A$, $L_u^* B = B$ y $L_u^* C = C$ para todo $u \in \mathbf{H}$. Sea g la métrica Riemanniana en $\mathbf{H}$ tal que $(A(u), B(u), C(u))$ es una base ortonormal de $T_u\mathbf{H}$ para todo $u \in \mathbf{H}$, y sea ∇ la conexión de Levi-Civita asociada.

(a) Pruebe que L_u es una isometría para todo $u \in \mathbf{H}$.

(b) Usando la identidad de Koszul

$$2\langle \nabla_X Y, Z\rangle_g = \mathscr{L}_X \langle Y, Z\rangle_g + \mathscr{L}_Y \langle Z, X\rangle_g - \mathscr{L}_Z \langle X, Y\rangle_g + \langle [X,Y], Z\rangle_g - \langle [X,Z], Y\rangle_g - \langle [Y,Z], X\rangle_g$$

pruebe las identidades siguientes:

$$\begin{array}{lll} \nabla_A A = 0, & \nabla_B A = -\frac{1}{2}C, & \nabla_C A = -\frac{1}{2}B, \\ \nabla_A B = \frac{1}{2}C, & \nabla_B B = 0, & \nabla_C B = \frac{1}{2}A, \\ \nabla_A C = -\frac{1}{2}B, & \nabla_B C = \frac{1}{2}A, & \nabla_C C = 0. \end{array}$$

(c) Usando (b), plantee las ecuaciones geodésicas para una curva $u(t) = (x(t), y(t), z(t))$ en $\mathbf{H}$.

Problema 2

Sea (M, g) una variedad Riemanniana compacta y orientada con borde $\partial M \neq \emptyset$.

(a) Demuestre que para todo $X \in \Gamma(TM)$, existe una única función suave denotada por $\operatorname{div}(X)$ tal que[1]

$$\mathrm{d}(i_X \mathrm{vol}_g) = \operatorname{div}(X)\, \mathrm{vol}_g,$$

donde $\mathrm{vol}_g \overset{\mathrm{loc}}{=} \sqrt{\det(g_{ij})}\, \mathrm{d}x^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^n$. Pruebe (e.g., usando la fórmula mágia de Cartan $\mathscr{L}_{\mathscr{X}} = d \circ \iota_X + \iota_X \circ d$) que

$$\operatorname{div}(fX) = f \operatorname{div}(X) + \langle \operatorname{grad}_g(f), X\rangle_g,$$

donde $\operatorname{grad}_g(f) \in \Gamma(TM)$ es el campo vectorial **gradiente de** f, obtenido como el g-dual de $\mathrm{d}f \in \Omega^1(M)$ (i.e., determinado por la condición $\langle \operatorname{grad}_g(f), X\rangle_g = (\mathrm{d}f)(X) \overset{\mathrm{def}}{=} \mathscr{L}_X(f)$ para todo $X \in \Gamma(TM)$).

(b) Denote por $\vec{n}$ al vector normal unitario exterior al borde ∂M y por $\widetilde{\mathrm{vol}}$ la forma volumen inducida por la métrica restringida $g|_{\partial M}$ sobre el borde. Demuestre (e.g. usando (a) y el Teorema de Stokes) que

$$\int_M \operatorname{div}(X)\, \mathrm{vol}_g = \int_{\partial M} \langle X, \vec{n}\rangle\, \widetilde{\mathrm{vol}}.$$

Indicación: Para calcular $(\iota_X \mathrm{vol}_g)|_{\partial M} = \langle \overline{n}, X\rangle_g\, \widetilde{\mathrm{vol}}$ *considere en cada* $p \in \partial M$ *una base ortonormal* $(e_2, \ldots, e_n)$ *de* $T_p\partial M$ *tal que* $\mathrm{vol}_g(p) = \vec{n} \wedge e_2^* \wedge \cdots \wedge e_n^*$ *y escriba* $X \overset{\mathrm{loc}}{=} a\vec{n} + \sum_{i=2}^n X^i e_i$.

(c) Demuestre que

$$\int_M \langle \operatorname{grad}_g(f), X\rangle_g\, \mathrm{vol}_g = -\int_M f \operatorname{div}(X)\, \mathrm{vol}_g + \int_{\partial M} f\langle X, \vec{n}\rangle_g\, \widetilde{\mathrm{vol}}.$$

[1] Recuerde que si $\omega \overset{\mathrm{loc}}{=} u\, \mathrm{d}x^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^n \in \Omega^n(M)$ y $X \overset{\mathrm{loc}}{=} X^i \frac{\partial}{\partial x^i} \in \Gamma(TM)$, entonces $\iota_X \omega \overset{\mathrm{loc}}{=} u \sum_{i=1}^n (-1)^i X^i \mathrm{d}x^1 \wedge \cdots \wedge \widehat{\mathrm{d}x^i} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^n$.

Problema 3

Sean (M_1, g_1) y (M_2, g_2) dos variedades Riemannianas, y sea $M := M_1 \times M_2$ la **variedad producto**. Si $p = (p_1, p_2) \in M$ entonces $T_pM = T_{p_1}M_1 \oplus T_{p_2}M_2$ y notamos $X = X_1 + X_2$ la descomposición de $X \in T_pM$ sobre esta suma directa. Sea g la métrica Riemanniana sobre M definida por:

$$g(X, Y) = g_1(X_1, Y_1) + g_2(X_2, Y_2).$$

(a) Sean ∇^1, ∇^2 y ∇ las conexiones de Levi-Civita de M_1, M_2 y M. Supongamos que X_1 es un campo vectorial sobre M_1 y X_2 un campo vectorial sobre M_2. Entonces consideramos el campo vectorial X sobre M definido por:

$$X(p) = X_1(p_1) + X_2(p_2).$$

Consideramos de la misma manera un campo vectorial $Y(p) = Y_1(p_1) + Y_2(p_2)$, donde Y_i es un campo vectorial sobre M_i. Probar que se tiene:

$$\nabla_X Y = \nabla^1_{X_1} Y_1 + \nabla^2_{X_2} Y_2.$$

(b) Sean R^1, R^2 y R las curvaturas de M_1, M_2 y M. Probar que:

$$g(R(X, Y)Z, T) = g_1(R^1(X_1, Y_1)Z_1, T_1) + g_2(R^2(X_2, Y_2)Z_2, T_2).$$

(c) Calcular las curvaturas seccionales de $\mathbf{S}^n \times \mathbf{S}^1$, donde la esfera $\mathbf{S}^n$ y el círculo $\mathbf{S}^1$ están dotados de sus métricas estándar.

Bonus (20 puntos)

Demuestre la primera identidad de Bianchi: $R(X, Y)Z + R(Y, Z)X + R(Z, X)Y = 0$ para todos $X, Y, Z \in \Gamma(TM)$.