Certamen 1 – Variedades Diferenciables (MAT430, 2025-1)

Profesor: Pedro Montero, Ayudante: Mateo Hidalgo

Departamento de Matemática, Universidad Técnica Federico Santa María

Nombre y Apellido: **ROL USM:**

Problema 1

Durante todo este problema consideraremos el **grupo de Heisenberg** dado por las matrices

$$\mathbf{H} := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ x, y, z \in \mathbf{R} \right\},$$

y en particular $\mathbf{H}$ es un grupo de Lie difeomorfo a $\mathbf{R}^3$, y escribiremos $(x, y, z) \in \mathbf{H}$. Para $u \in \mathbf{H}$ denotamos la multiplicación izquierda por u como $L_u : \mathbf{H} \to \mathbf{H},\ h \mapsto uh$ y consideraremos los siguientes campos vectoriales

$$A := \frac{\partial}{\partial x},\ B := \frac{\partial}{\partial y} + x\frac{\partial}{\partial z},\ C := \frac{\partial}{\partial z}.$$

(a) Pruebe que $L_u^* A = A,\ L_u^* B = B$ y $L_u^* C = C$ para todo $u \in \mathbf{H}$.

(b) Sea $\mathscr{D}_1 := \langle A, B \rangle$ y $\mathscr{D}_2 := \langle B, C \rangle$ distribuciones de rango 2 en $\mathbf{H}$. Pruebe que una de ellas es una foliación y la otra no.

(c) Sea $\mathscr{D}$ la foliación del ítem (b). Determine la superficie integral $S \subseteq \mathbf{H}$ pasando por un punto arbitrario $(a, b, c) \in \mathbf{H}$.

Indicación: Si $S = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3, f(x, y, z) = 0\}$ es una superficie entonces $\ker(\mathrm{d}_p f) = T_p S = \mathscr{D}_p \Leftrightarrow (\mathrm{d}_p f)(X(p)) = 0$ para todo $X(p) \in \mathscr{D}_p$, obteniendo un sistema de EDP que debe ser resuelto explícitamente para obtener S.

Problema 2

Sea $n \geq 1$ y sea $\mathbf{T}^n := V/\Gamma$ un toro de dimensión n, donde $V := \mathbf{R}^n$ y donde $\Gamma = \mathbf{Z}v_1 \oplus \cdots \mathbf{Z}v_n \cong \mathbf{Z}^n$ es un reticulado en V. Denotaremos por $\pi : V \to \mathbf{T}^n,\ x \mapsto [x]$ la proyección canónica y para $a \in V$ denotamos $T_a : V \to V,\ \ x \mapsto x + a$ y por $\tau_a : \mathbf{T}^n \to \mathbf{T}^n,\ [x] \mapsto [x + a]$. En particular, si $a \in \Gamma$ entonces $\tau_a = \mathrm{Id}_{\mathbf{T}^n}$.

(a) Una 1-forma diferencial $\omega \in \Omega^1(\mathbf{T}^n)$ es **invariante** si $\tau_a^* \omega = \omega$ para todo $a \in \mathbf{T}^n$. Pruebe que para toda 1-forma invariante ω existen constantes $c_1, \ldots, c_n \in \mathbf{R}$ tal que $\pi^* \omega = \sum_{i=1}^n c_i \,\mathrm{d}x_i$.

(b) Sea $\omega \in \Omega^1(\mathbf{T}^n)$ una 1-forma **cerrada** (i.e., tal que $\mathrm{d}\,\omega = 0$) arbitraria. Pruebe que para todo $a \in V$ se tiene que la 1-forma diferencial $\tau_a^* \omega - \omega$ es **exacta**, i.e., existe $\eta \in \mathscr{C}^\infty(\mathbf{T}^n)$ tal que $\tau_a^* \omega - \omega = \mathrm{d}\eta$. Para esto último, piense a ω como una 1-forma diferencial en $\mathbf{R}^n$ que es Γ-periódica, i.e., $\omega = \sum_{i=1}^n \omega_i(x)\,\mathrm{d}x_i$ con $\omega_i(x + a) = \omega_i(x)$ para todo $a \in \Gamma$, y considere la función

$$\eta(x) := \int_0^1 \sum_{i=1}^n \omega_i(x + ta) a_i \,\mathrm{d}t.$$

(c) Por (a) y (b), tenemos que hay una aplicación lineal sobreyectiva $\wedge^1 V^* \cong V^* \twoheadrightarrow \mathrm{H}^1_{\mathrm{dR}}(\mathbf{T}^n),\ \omega = \sum_{i=1}^n c_i \,\mathrm{d}x_i \to [\omega]$. Pruebe que dicha aplicación es inyectiva integrando en la curva cerrada $\gamma_i \subseteq \mathbf{T}^n$ dada por $\gamma_i(t) = [tv_i]$ con $t \in [0, 1]$.

Cultura general: Cálculos completamente análogos, permiten probar que para todo $p \geq 1$ se tiene $\mathrm{H}^p_{\mathrm{dR}}(\mathbf{T}^n) \cong \wedge^p V^*$, i.e., toda p-forma diferencial cerrada en un toro es cohomóloga a una p-forma constante.

Problema 3

Sean $r, R \in \mathbf{R}^{>0}$ con $R > r$. Consideramos al toro $\mathbf{T}^2 := \mathbf{S}^1 \times \mathbf{S}^1$ con coordenadas polares (θ, φ) y consideramos la función inyectiva[1]

$$f : \mathbf{T}^2 \hookrightarrow \mathbf{R}^3,\ (\theta, \varphi) \mapsto ((R + r\cos\theta)\cos\varphi, (R + r\cos\theta)\sin\varphi, r\sin\theta).$$

(a) Pruebe que f es un incrustamiento.

(b) Sea $g := f^* g_{\mathrm{can}}$ el pullback de la métrica Riemanniana canónica de $\mathbf{R}^3$ por f. Pruebe que

$$g = r^2(\mathrm{d}\theta)^2 + (R + r\cos\theta)^2(\mathrm{d}\varphi)^2.$$

(c) Calcule $\mathrm{vol}(\mathbf{T}^2, g)$.

Bonus (20 puntos)

Enuncie y demuestre el Teorema de Stokes.

[1] No es necesario que pruebe la inyectividad de f.