Universidad Técnica Federico Santa María
Departamento de matemáticas

Ayudantía 7 MAT430: Formas Diferenciales e Integración

28 de abril 2025

Profesor: Pedro Montero Ayudante: Mateo Hidalgo

1 Recuerdo

Sea $V \simeq \mathbb{R}^n$ un $\mathbb{R}$-ev y sea $k \in \mathbb{N}^{\geqslant 1}$. Entonces $\bigwedge^k V^* := \{\alpha, V \times \cdots \times V \to \mathbb{R}, k\text{-forma multilineal alternada}\}$ y si $\alpha \in \bigwedge^k V^*$ entonces escribimos $|\alpha| = \deg(\alpha) := k$. Definimos $\bigwedge^0 V^* := \mathbb{R}$ y $\bigwedge^{\cdot} V^* := \bigoplus_{k\geqslant 0} \bigwedge^k V^*$. Además,

1. Si $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ base de V y $\mathscr{B}^* = (e_1^*, \ldots, e_n^*)$ base dual de V^*, entonces $\{e_{i_1}, \ldots, e_{i_k}\}_{i_1<\cdots<i_k}$ es una base de $\bigwedge^k V^*$ (y luego $\dim_{\mathbb{R}} \bigwedge^k V^* = \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}$). Aquí, si $\ell_1, \ldots, \ell_k \in V^*$ entonces $(\ell_1 \wedge \cdots \wedge \ell_k)(x_1, \ldots, x_k) := \sum_{\sigma \in S_k} \epsilon(\sigma)\ell_1(x_{\sigma(1)}) \cdots \ell_k(x_{\sigma(k)})$.
2. El producto $\wedge$ (cuña, wedge, exterior) se extiende a $\bigwedge^k V^* \times \bigwedge^l V^* \to \bigwedge^{k+l} V$ mediante $(\alpha, \beta) \mapsto \alpha \wedge \beta$ (e.g. usando bases) y cumple $\beta \wedge \alpha = (-1)^{|\alpha||\beta|}\alpha \wedge \beta$
3. Si $u : V \to W$ es $\mathbb{R}$-lineal y $u^t : W^* \to V^*$, $\ell \mapsto \ell(u(\cdot))$, entonces definimos $\wedge^k u^t : \bigwedge^k W^* \to \bigwedge^k V^*, \omega \mapsto (\wedge^k u^t)(\omega)$ con $(\wedge^k u^t)(\omega)(x_1, \ldots, x_k) := \omega(u(x_1), \ldots, u(x_k))$. Por definición, $(\wedge^k u^t)(\alpha \wedge \beta) = (\wedge^k u^t(\alpha)) \wedge (\wedge^k u^t(\beta))$.
4. Si $(x^1, \ldots, x^n)$ son coordenadas en $\mathbb{R}^n$, entonces $e_i^* = dx^i$ y luego todo $\omega \in \bigwedge^k V^*$ se escrive como $\omega = \sum_{i_1<\cdots<i_k} \omega_{i_1\cdots i_k} dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}$ con $\omega_{i_1\cdots i_k} \in \mathbb{R}$.

Definición 1.1. *Sea M^n una variedad y sea $\bigwedge^k T^*M$ el fibrado vectorial con fibras $\bigwedge^k T_p^*M, \forall p \in M$. Una k-forma diferencial es $\omega \in \Gamma(M, \bigwedge^k T^*M) =: \Omega^k M$. Además, $\Omega^0 M := \mathscr{C}^\infty(M)$ y $\Omega^{\cdot} := \bigoplus_{k\geqslant 0} \Omega^k(M)$. Concretamente, si $(x^1, \ldots, x^n)$ son coordenadas locales de M entonces en la carta $U \subset M$ se tiene $\omega \overset{loc}{=} \sum_{i_1<\cdots<i_k} w_{i_1\cdots i_k} dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}$ con $\omega_{i_1\cdots i_k} \in \mathscr{C}^\infty(U)$.*

Construcción(Pullback): Sea $f_M \to N$ suave y $\alpha \in \Omega^k N$. Se define $f^*\alpha \in \Omega^k M$ mediante $(f^*\alpha)(\beta) := \wedge^k (d_x f)^t \alpha(p)$, y se cumple $f^*(\alpha \wedge \beta) = f^*\alpha \wedge f^*\beta$. Por ejemplo si $f(u, v) = (uv, u^2)$ y $\alpha = xdx \wedge dy$ entonces $f^*\alpha = 2u^3 vdv \wedge du$.

Definición 1.2. *Definimos la aplicación lineal $d : \Omega^{\cdot}(M) \to \Omega^{\cdot}(M)$ llamada diferencial exterior. Esta cumple*

$$\omega \overset{loc}{=} \sum_{i_1<\cdots<i_k} f_{i_1\ldots i_k} dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k} \implies d\omega \overset{loc}{=} \sum_{i_1<\cdots<i_k} df_{i_1\ldots i_k} dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}$$

Definición 1.3. *M es orientable si su estructura diferenciable viene inducida por un atlas en que todos los cambios de cartas ϕ con $J(\phi) > 0$. Una orientación en M es la elección de un atlas maximal con dicha propiedad (no de un atlas maximal que cumple la propiedad, sino de un atlas que es maximal entre los atlas que tienen la propiedad).*

Definición 1.4. *Si M^n es variedad y ω es una n-forma global que es positiva en cada $p \in M$, entonces decimos que ω es una **forma de volumen**.*

Proposición 1.1. *Toda variedad orientable admite una forma de volumen (usar particiones de la unidad). Recíprocamente, toda forma de volumen sobre M induce una orientación.*

Construcción (integración de n-formas) sea M^n una variedad orientada, y sea $\omega \in \Omega_c^n(M)$ una n-forma con soporte compacto. Si el soporte está contenido en una única carta $u \subset M^n$ con coordenadas $(x^1, \ldots, x^n)$, entonces $\omega \overset{\text{loc}}{=} f dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n$ con $f \in \mathscr{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ y es tal que

$$\int_M \omega := \int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx^1 \cdots dx^n$$

Teorema 1 (Teorema de Stokes)**.** *Sea M variedad con borde $i : \partial M \hookrightarrow M$, orientada y sea $\omega \in \Omega^n(M)$ entonces*

$$\int_m d\omega = \int_{\partial M} i^* \omega$$

en particular si $\partial M = \varnothing$ entonces $\int_M d\omega = 0$.

2 Ejemplo

Ejemplo 2.1. *De el recuerdo se tiene que $(e_1^* \wedge \cdots \wedge e_k^*)(e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_k}) = \begin{cases} \pm 1 \text{ si } \{i_1, \ldots, i_k\} = \{1, \ldots, k\} \\ 0 \text{ si no} \end{cases}$ con el signo determinado por el signo de la permutación necesaria para llevar $(1, \ldots, k)$ en $(i_1 \ldots, i_k)$.*
Si e_1, e_2, e_3 es la base canónica de $\mathbb{R}^3$ y e_1^*, e_2^*, e_3^* es la base dual, escribamos $\omega = e_1^* \wedge e_2^*$ entonces

$$\begin{aligned}
(e_1^* \wedge e_2^*) \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right) &= (e_1^* \wedge e_2^*)(2e_1 + 3e_2, e_1 + e_2 - 2e_3) \\
&= 2\omega(e_1, e_1) + \omega(e_1, e_2) - 2\omega(e_1, e_3) + 3\omega(e_2, e_1) + 3\omega(e_2, e_2) - 6\omega(e_2, e_3) \\
&= 1 - 3 = -2
\end{aligned}$$

3 Ejercicios

1. En cada uno de los siguientes casos, M y N son variedad suaves; $F : M \to N$ es un mapa suave; y ω es una forma diferencial en N. En cada caso, calcule $d\omega$ y $F^*\omega$, y verifique directamente que $F^*(d\omega) = d(F^*\omega)$.

   (a)
   $$\begin{aligned} &M = N = \mathbb{R}^2 \\ &F(s, t) = (st, e^t) \\ &\omega = x dy \end{aligned}$$

   (b)
   $$\begin{aligned} &M = \mathbb{R}^2 \text{ y } N = \mathbb{R}^3; \\ &F(\theta, \varphi) = ((\cos\varphi + 2)\cos\theta, (\cos\varphi + 2)\sin\theta, \sin\varphi) \\ &\omega = y dz \wedge dx \end{aligned}$$

   Solución:

   (a) Tenemos
   $$d\omega = dx \wedge dy$$
   tenemos
   $$F^*\omega = F^*(xdy) = std(e^t) = ste^t dt$$
   y
   $$F^*(d\omega) = d(st) \wedge d(e^t) = (tds + sdt) \wedge e^t dt = te^t ds \wedge dt$$

mientras que

$$d(F^*\omega) = d(ste^t) \wedge dt = te^t ds \wedge dt$$

(b) Tenemos

$$d\omega = dy \wedge dz \wedge dx = dx \wedge dy \wedge dz$$

tenemos

$$\begin{aligned}F^*(\omega) =&((\cos(\varphi)+2))\sin(\theta)d(\sin(\varphi)) \wedge d((\cos\varphi+2)\cos(\theta))\\ =&(\cos(\varphi)+2)\sin(\theta)\cos(\varphi)d\varphi \wedge ((-\sin(\varphi)d\varphi - \sin(\theta)(\cos\varphi+2)d\theta))\\ =&(\cos\varphi+2)^2\sin^2(\theta)\cos(\varphi)d\varphi \wedge d\theta\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}F^*(d\omega) =&d((\cos\varphi+2)\cos\theta) \wedge d((\cos\varphi+2)\sin\theta) \wedge d(\sin\varphi)\\ =&((-\sin\varphi)\cos\theta d\varphi - \sin\theta(\cos\varphi+2)d\theta) \wedge ((-\sin\varphi)\sin\theta d\varphi + \cos\theta(\cos\varphi+2)d\theta) \wedge \cos\varphi d\varphi\\ =&0\end{aligned}$$

mientras que

$$d(F^*(\omega)) = 0$$

claramente.

2. Encontrar el conjunto de $\mathbb{R}^2$ donde las formas diferenciales

$$\alpha = x \text{ d}x + y \text{ d}y, \quad \beta = y \text{ d}x + x \text{ d}y$$

sean linealmente independientes y determine los campos duales $\{X, Y\}$ en este conjunto.

Solución: Tenemos $\det\begin{pmatrix} x & y \\ y & x\end{pmatrix} = x^2 - y^2 \neq 0$ exactamente en $\mathbb{R}^2 \backslash \{(x,y) : x = \pm y\}$. Por tanto α y β son linealmente independientes en el subconjunto de $\mathbb{R}^2$ complementario a las diagonales $x+y=0$ y $x-y=0$. Los campos duales

$$X = a\frac{\partial}{\partial x} + b\frac{\partial}{\partial y}, \quad Y = c\frac{\partial}{\partial x} + d\frac{\partial}{\partial y}, \quad a,b,c,d \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$$

deben satisfacer $X(\alpha) = Y(\beta) = 1, X(\beta) = Y(\alpha) = 0$. Así que

$$\begin{cases} ax + by = 1 \\ ay + bx = 0 \end{cases} \text{y} \quad \begin{cases} cx + dy = 0 \\ cy + dx = 1 \end{cases}$$

Resolviendo estos sistemas (en las incógnitas $a,b,c,d \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^2)$) obtenemos

$$X = \frac{x}{x^2-y^2}\frac{\partial}{\partial x} - \frac{y}{x^2-y^2}\frac{\partial}{\partial y}, \quad Y = -\frac{y}{x^2-y^2}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{x}{x^2-y^2}\frac{\partial}{\partial y}.$$

Notar que en general si $\left\{e_i = \sum_k \lambda_i^k \frac{\partial}{\partial x^k}\right\}$ es una base de campos vectoriales en la variedad (es decir, en cada punto forman una base del tangente) y $\left\{\theta^j = \sum_l \mu_l^j \text{ d}x^l\right\}$ es su base dual, de $\left(\sum_l \mu_l^j \text{ d}x^l\right)\left(\sum_k \lambda_i^k \frac{\partial}{\partial x^k}\right) = \delta_{ij}$ uno tiene $\left(\mu_j^i\right) = {}^t\left(\lambda_j^i\right)^{-1}$.

3. Si M es una variedad diferenciable orientable con fibrado tangente TM, entonces TM es orientable

Solución:

Sea M una variedad diferenciable de dimensión n y sea π la proyección del fibrado tangente TM. Para coordenadas $\{x^i\}$ arbitrarias en un conjunto abierto $U \subset M$, denotemos por $\{x^i, y^i\} = \{x^i \circ \pi,\ \mathrm{d}x^i\}$ a las coordenadas usuales en $\pi^{-1}(U)$.

Sea $\{x'^i\}$ otro conjunto de coordenadas definidas en un abierto $U' \subset M$ tal que $U \cap U' \neq \varnothing$. Los cambios de coordenadas $x'^i = x'^i\left(x^j\right)$ en $U \cap U'$ inducen los cambios de coordenadas en $\pi^{-1}(U \cap V)$ dados por

$$x'^i = x'^i\left(x^1, \ldots, x^n\right), \quad y'^i = \sum_{j=1}^n \frac{\partial x'^i}{\partial x^j} y^j, \quad i = 1, \ldots, n$$

La matriz Jacobiana de este cambio de coordenadas

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial x'^i}{\partial x^j} & 0 \\ \frac{\partial^2 x'}{\partial x^k \partial x^j} y^k & \frac{\partial x'^i}{\partial x^j} \end{pmatrix}.$$

Dado que $\det J = \det \left(\frac{\partial x''}{\partial x^j}\right)^2 > 0$, sigue que TM es orientable.

4. Probar que si M un atlas formado por dos cartas $(U, \varphi), (V, \psi)$, y $U \cap V$ es conexo, entonces M es orientable. Aplique este resultado a la esfera $S^n, n > 1$, con el atlas formado por las proyecciones estereográficas desde los polos.

   Solución: Sea $\varphi = \left(x^1, \ldots, x^n\right)$ y $\psi = \left(y^1, \ldots, y^n\right)$ los mapas de coordenadas. tenemos que $\det\left(\partial x^i / \partial y^j\right) \neq 0$ en $U \cap V$ y $U \cap V$ es conexo, por tanto o bien (a) $\det\left(\partial x^i /\ \partial y^j\right) > 0$ para todo $U \cap V$; o bien (b) $\det\left(\partial x^i / \partial y^j\right) < 0$ para todo $U \cap V$. En el caso (a), sigue que M es orientable con el atlas dado. En el caso (b), solo deberíamos considerar como mapas coordenados a $\varphi = \left(x^1, \ldots, x^n\right)$ y $\psi = \left(-y^1, y^2, \ldots, y^n\right)$.

   Para $S^n, n > 1$, considerando las proyecciones estereográficas, tenemos los dominios coordenados

$$\begin{aligned} U_N &= \left\{\left(x^1, \ldots, x^{n+1}\right) \in S^n : x^{n+1} \neq 1\right\}, \\ U_S &= \left\{\left(x^1, \ldots, x^{n+1}\right) \in S^n : x^{n+1} \neq -1\right\}. \end{aligned}$$

   Como

$$U_N \cap U_S = \left\{\left(x^1, \ldots, x^{n+1}\right) \in S^n : x^{n+1} \neq \pm 1\right\} = \varphi_N^{-1}\left(\mathbb{R}^n \backslash \{0\}\right)$$

   es conexo, concluimos que S^n es orientable.

5. Calcule la integral de $\omega = \left(x - y^3\right) \mathrm{d}x + x^3\ \mathrm{d}y$ sobre S^1 aplicando Stokes.

   Solución: Sea D (respectivamente $\bar{D}$) el disco unitario abierto (respectivamente cerrado) $\mathbb{R}^2$, y sea $D_0 = D \backslash \{[0, 1) \times \{0\}\}$. Aplicando Stokes tenemos que

$$\int_{S^1} \omega = \int_{\partial \bar{D}} \omega = \int_{\bar{D}} \mathrm{d}\omega = \int_{D_0} \mathrm{d}\omega = \int_{D_0} 3\left(x^2 + y^2\right) \mathrm{d}x \wedge\ \mathrm{d}y.$$

   Tomando coordenadas polares, tenemos que

$$\int_{S^1} \omega = \int_{D_0} 3\rho^3\ \mathrm{d}\rho \wedge\ \mathrm{d}\theta = 3 \int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 \rho^3\ \mathrm{d}\rho\right) \mathrm{d}\theta = \frac{3\pi}{2}.$$

6. Sean (u, v, w) las coordenadas usuales en $\mathbb{R}^3$. Considere la parametrización

$$u = \frac{1}{2} \sin\theta \cos\varphi, \quad v = \frac{1}{2} \sin\theta \sin\varphi, \quad w = \frac{1}{2} \cos\theta + \frac{1}{2},$$

   donde $\theta \in (0, \pi), \varphi \in (0, 2\pi)$, de la esfera

$$S^2 = \left\{ (u,v,w) \in \mathbb{R}^3 : u^2 + v^2 + \left(w - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} \right\}.$$

Sea $N = (0,0,1)$ el polo norte y sea $\pi : S^2 \backslash \{N\} \to \mathbb{R}^2$ la proyección estereográfica en el plano $\mathbb{R}^2 \equiv w = 0$. Sea $v_{\mathbb{R}^2} = \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$ la forma de volumen canónica de $\mathbb{R}^2$ y sea $v_{S^2} = \frac{1}{4} \sin\theta \, \mathrm{d}\theta \wedge \mathrm{d}\varphi$ forma de volumen en S^2. Escriba $\pi^* v_{\mathbb{R}^2}$ es términos de v_{S^2}.

Solución: La proyección estereográfica dada es la restricción a $S^2 \backslash \{N\}$ del mapa

$$\tilde{\pi} : \mathbb{R}^3 \backslash \{w = 1\} \to \mathbb{R}^2, \quad (u,v,w) \mapsto \left(\frac{u}{1-w}, \frac{v}{1-w} \right)$$

cuya matriz Jacobiana es

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{1-w} & 0 & \frac{u}{(1-w)^2} \\ 0 & \frac{1}{1-w} & \frac{v}{(1-w)^2} \end{pmatrix}$$

Por tanto

$$\begin{aligned}
\tilde{\pi}^* v_{\mathbb{R}^2} &= \tilde{\pi}^* (\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y) \\
&= \tilde{\pi}^* \mathrm{d}x \wedge \tilde{\pi}^* \mathrm{d}y \\
&= \left(\frac{1}{1-w} \mathrm{d}u + \frac{u}{(1-w)^2} \mathrm{d}w \right) \wedge \left(\frac{1}{1-w} \mathrm{d}v + \frac{v}{(1-w)^2} \mathrm{d}w \right) \\
&= \frac{1}{(1-w)^2} \mathrm{d}u \wedge \mathrm{d}v + \frac{v}{(1-w)^3} \mathrm{d}u \wedge \mathrm{d}w - \frac{u}{(1-w)^3} \mathrm{d}v \wedge \mathrm{d}w.
\end{aligned}$$

Así, obtenemos

$$\pi^* v_{\mathbb{R}^2} = \tilde{\pi}^* v_{\mathbb{R}^2} = -\frac{\sin\theta}{(1-\cos\theta)^2} \mathrm{d}\theta \wedge \mathrm{d}\varphi = -\frac{4}{(1-\cos\theta)^2} v_{S^2}$$

4 Propuestos

1. ★★☆ Si $\pi : E \to M$ es un mapa de cubrimiento suave (es decir, un mapa de cubrimiento como en MAT235 pero cambiando funciones continuas y heomeomorfismos por funciones suaves y difeomorfismos) y M es orientable, entonces E es también orientable.

2. ★★★ Denotemos por $\mathbb{T}^2 = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \subseteq \mathbb{R}^4$ al 2-toro, definido como el conjunto de puntos (w,x,y,z) tales que $w^2 + x^2 = y^2 + z^2 = 1$, con la orientación producto determinada por la orientación estándar de $\mathbb{S}^1$. Calcule $\int_{\mathbb{T}^2} \omega$, donde ω es la siguiente 2-forma en $\mathbb{R}^4$:

$$\omega = xyzdw \wedge dy$$