Universidad Técnica Federico Santa María
Departamento de matemáticas

Ayudantía 6 MAT430: Una Partición de la Unidad y Teorema de Whitney

21 de abril 2025

Profesor: Pedro Montero Ayudante: Mateo Hidalgo

1 Recuerdo

Definición 1.1. *Un* ***embedimiento*** *(o* ***incrustamiento*** *o* ***encaje****) es una inmersión que es también un homeomorfismo sobre su imagen.*

Definición 1.2. *Suponga que M es un espacio topológico, y sea $\mathscr{X} = (X_\alpha)_{\alpha\in A}$ un cubrimiento abierto de M, indexados por el conjunto $\mathscr{A}$. Una* ***partición de la unidad subordinada a X*** *es una familia indexada $(\psi_\alpha)_{\alpha\in A}$ de funciones continuas $\psi_\alpha : M \to \mathbb{R}$ con la siguientes propiedades:*

1. $0 \leqslant \psi_\alpha(x) \leqslant 1$ *para todo $\alpha \in A$ y todo $x \in M$.*
2. $\operatorname{supp}\psi_\alpha \subseteq X_\alpha$ *para cada $\alpha \in A$.*
3. *La familia de soportes $(\operatorname{supp}\psi_\alpha)_{\alpha\in A}$ es localmente finita, es decir, que todo punto tiene una vecindad que intersecta $\operatorname{supp}\psi_\alpha$ para solo finitos valores de α.*
4. $\sum_{\alpha\in A}\psi_\alpha(x) = 1$ *para todo $x \in M$.*

Por la condición de local finitud, la última suma en tiene de hecho solo finitos términos no nulos en una vecindad de cada punto, así que no hay problemas con la convergencia. Si M es una variedad suave con o sin borde, una partición suave de la unidad es una para la cual cada función ψ_α es suave.

Teorema 1 (Existencia de Particiones de la Unidad)**.** *Suponga que M es una variedad diferenciable con o sin borde, y $X = (X_\alpha)_{\alpha\in A}$ es cualquier cubrimiento abierto indexado de M. Entonces existe una partición suave de la unidad subordinada a X.*

Definición 1.3. *Una* ***variedad diferenciable con borde*** *es un espacio topológico Hausdorff y $\sigma-$finito M junto con un atlas maximal $\varphi_i : U_i \subseteq M \to V_i$ donde V_i abierto (en cuyo caso decimos que (U_i, φ_i) es* ***carta suave interior****) de $\mathbb{R}^n$ o de $\mathbb{R}^{\geqslant 0} \times \mathbb{R}^{n-1}$ (o equivalentemente, a la media-bola $B(0,1) \cap \mathbb{R}^{\geqslant 0} \times \mathbb{R}^{n-1}$ y en cuyo caso decimos que φ_i es* ***carta suave de borde****) y donde los cambios de cartas son difeomorfismos. Definimos el borde de M como*

$$\partial M := \bigcup_{\varphi_i U_i \to \mathbb{R}^{\leqslant 0}\times\mathbb{R}^{n-1}} \varphi_i^{-1}\left(\{0\}\times\mathbb{R}^{n-1}\right)$$

que es una variedad sin borde de $(\dim(\partial M) = \dim(M) - 1$.

Definición 1.4. *Decimos que el conjunto $B \subseteq M$ es una* ***bola coordenada regular*** *si hay una bola coordenada regular $B' \supseteq \bar{B}$ y un mapa coordenado suave $\varphi : B' \to \mathbb{R}^n$ tal que para algunos números reales positivos $r < r'$,*

$$\varphi(B) = B_r(0), \quad \varphi(\bar{B}) = \bar{B}_r(0), \quad y \quad \varphi\left(B'\right) = B_{r'}(0)$$

Como $\bar{B}$ es homeomorfa a $\bar{B}_r(0)$, es compacta, y por tanto todo toda bola coordenada regular es precompacta en M. Análogamente se definen las medias-bolas regulares.

Definición 1.5. *Si M y N son variedades diferenciables con o sin borde, y $A \subseteq M$ es un subconjunto arbitrario. Decimos que un mapa $F : A \to N$ es suave en $\boldsymbol{A}$ si tiene extensión suave en una vecindad de cada punto: eso es, si para cada $p \in A$ hay un subconjunto abierto $W \subseteq M$ conteniendo a p y una función suave $\tilde{F} : W \to N$ cuya restricción a $W \cap A$ concuerda con F.*

2 Ejercicios

1. (**Invarianza Suave del Borde**) Suponga que M es una variedad suave con borde y $p \in M$. Si hay una carta suave (U, φ) para M tal que $\varphi(U) \subseteq \mathbb{H}^n$ y $\varphi(p) \in \partial\mathbb{H}^n$, entonces lo mismo es verdad para cada carta suave cuyo dominio contenga a p.

   Solución: Suponga por el contrario que p está en el dominio de una carta suave interior (U, ψ) y también en el dominio de una carta suave de borde (V, φ) tal que $\varphi(p) \in \partial\mathbb{H}^n$. Denotemos por $\tau = \varphi \circ \psi^{-1}$ al mapa de transición; es un homeomorfismo de $\psi(U \cap V)$ a $\varphi(U \cap V)$. La compatibilidad suave de las cartas asegura que tanto τ como τ^{-1} son suaves, en el sentido que pueden ser extendidas localmente, si es necesario, a mapas suaves definidos en subconjuntos abiertos de $\mathbb{R}^n$.

   Escribamos $x_0 = \psi(p)$ y $y_0 = \varphi(p) = \tau(x_0)$. Hay alguna vecindad W de y_0 en $\mathbb{R}^n$ y una función suave $\eta : W \to \mathbb{R}^n$ que concuerda con τ^{-1} en $W \cap \varphi(U \cap V)$. Por otro lado, como estamos asumiendo que ψ es una carta interior, hay una bola euclideana abierta B que está centrada en x_0 y está contenida en $\varphi(U \cap V)$, por lo que τ es en sí misma suave en B en el sentido ordinario. Después de empequeñecer B si es necesario, podemos asumir que $B \subseteq \tau^{-1}(W)$. Entonces $\eta \circ \tau\big|_B = \tau^{-1} \circ \tau\big|_B = \mathrm{Id}_B$, sigue de la regla de la cadena que $D\eta(\tau(x)) \circ D\tau(x)$ es la identidad para cada $x \in B$. Ya que $D\tau(x)$ es una matriz cuadrada, esto implica que es no singular. Por tanto τ (considerado como mapa de B a $\mathbb{R}^n$) es un mapa abierto, por tanto $\tau(B)$ es un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$ que contiene $y_0 = \varphi(p)$ y está contenida en $\varphi(V)$. Esto contradice la hipótesis de que $\varphi(V) \subseteq \mathbb{H}^n$ y $\varphi(p) \in \partial\mathbb{H}^n$.

2. **(Existencia de Funciones Bulto)** Si M es un espacio topológico, $A \subseteq M$ es un subconjunto cerrado, y $U \subseteq M$ es un subconjunto abierto conteniendo A, decimos que $\psi : M \to \mathbb{R}$ continua es una **función bulto** (o función **bump**) para $\boldsymbol{A}$ soportada en $\boldsymbol{U}$ si $0 \leqslant \psi \leqslant 1$ en M, $\psi \equiv 1$ en A, y $\operatorname{supp}\psi \subseteq U$.

   Sea M una variedad suave con o sin borde. Para cualquier subconjunto cerrado $A \subseteq M$ y cualquier subconjunto abierto U conteniendo a A, existe una función bulto suave para A soportada en U.

   Solución: Sea $U_0 = U$ y $U_1 = M \backslash A$, sea $\{\psi_0, \psi_1\}$ una partición suave de la unidad subordinada a el cubrimiento abierto $\{U_0, U_1\}$. Como $\psi_1 \equiv 0$ en A y por tanto $\psi_0 = \sum_i \psi_i = 1$ ahí, la función ψ_0 tiene las propiedades requeridas.

3. **(Lema de Extensión para Funciones Suaves)** Suponga que M es una variedad diferenciable con o sin borde, $A \subseteq M$ es un subconjunto cerrado, y $f : A \to \mathbb{R}^k$ es una función suave. Para cualquier subconjunto abierto U conteniendo a A, existe una función suave $\tilde{f} : M \to \mathbb{R}^k$ tal que $\tilde{f}\big|_A = f$ y $\operatorname{supp}\tilde{f} \subseteq U$.

   Solución: Para cada $p \in A$, elegir una vecindad W_p de p y una función suave $\tilde{f}_p : W_p \to \mathbb{R}^k$ que concuerda con f en $W_p \cap A$. Reemplazando W_p por $W_p \cap U$, podemos asumir que $W_p \subseteq U$. La familia de conjuntos $\{W_p : p \in A\} \cup \{M \backslash A\}$ es un cubrimiento de abiertos de M. Sea $\{\psi_p : p \in A\} \cup \{\psi_0\}$ una partición suave de la unidad subordinada a la partición, con $\operatorname{supp}\psi_p \subseteq W_p$ y $\operatorname{supp}\psi_0 \subseteq M \backslash A$.

   Para cada $p \in A$, el producto $\psi_p \tilde{f}_p$ es suave en W_p, y tiene una extensión suave a todo M si la interpretamos como 0 en todo $M \backslash \operatorname{supp}\psi_p$. (La función extendida es suave porque las dos definiciones concuerdan en el conjunto abierto $W_p \backslash \operatorname{supp}\psi_p$ donde intersectan.) Así definimos $\tilde{f} : M \to \mathbb{R}^k$ por

$$\tilde{f}(x) = \sum_{p \in A} \psi_p(x) \tilde{f}_p(x).$$

Porque la colección de soportes $\{\operatorname{supp}\psi_p\}$ es localmente finita, esta suma tiene solo un número finito de términos no-nulos en una vecindad de cualquier punto de M, y por tanto define una función suave. Si $x \in A$, entonces $\psi_0(x) = 0$ y $\tilde{f}_p(x) = f(x)$ para cada p tal que $\psi_p(x) \neq 0$, entonces

$$\tilde{f}(x) = \sum_{p\in A} \psi_p(x) f(x) = \left(\psi_0(x) + \sum_{p\in A} \psi_p(x)\right) f(x) = f(x)$$

así que $\tilde{f}$ es una extensión de f. Sigue del lema 2.1 que

$$\operatorname{supp}\tilde{f} = \overline{\bigcup_{p\in A} \operatorname{supp}\psi_p} = \bigcup_{p\in A} \operatorname{supp}\psi_p \subseteq U$$

Lema 2.1. *Suponga que $\mathscr{X}$ es una colección localmente finita de subconjuntos de un espacio topológico M.*

(a) La colección $\{\bar{X} : X \in \mathscr{X}\}$ también es localmente finita.

(b) $\overline{\bigcup_{X\in X} X} = \bigcup_{X\in X} \bar{X}$.

4. **(Lema de Extensión para Campos Vectoriales)** Sea M una variedad con o sin borde, y sea $A \subseteq M$ un subconjunto cerrado. Suponga que X es un campo vectorial suave sobre A (es decir, para cada $p \in A$, hay una vecindad V de p en M y un campo vectorial suave $\tilde{X}$ en V que concuerda con X en $V \cap A$. Dado cualquier abierto U conteniendo a A, existe un campo vectorial suave global $\tilde{X}$ en M tal que $\tilde{X}\big|_A = X$ y $\operatorname{supp}\tilde{X} \subseteq U$.

   Solución: Análogo al ejercicio anterior. Propuesto.

5. Sea M una variedad con o sin borde. Dado $p \in M$ y $v \in T_pM$, hay un campo vectorial suave global X en M tal que $X_p = v$.

   Solución: La asignación $p \mapsto v$ es un ejemplo de un campo vectorial sobre el conjunto $\{p\}$. Es suave porque puede ser extendido, digamos, a un campo vectorial a coeficientes constante en una carta de p. Así, concluimos por el lema de extensión sobre $A = \{p\}$ y $U = M$.

6. **(Teorema de Embedimiento de Whitney)** Toda variedad diferenciable compacta con o sin borde admite un embedimiento propio a $\mathbb{R}^N$ (Hecho: se puede tomar $N = 2n$, aunque esta cota no es optimal). En particular, toda variedad compacta con o sin borde es difeomorfa a una subvariedad de $\mathbb{R}^N$.

   Solución: Sea M una variedad con o sin borde. Tomemos un cubrimiento abierto de M finito $\{B_1, \ldots, B_m\}$ donde cada B_i es una bola regular o una media-bola regular. Esto significa que para cada i existe un dominio coordenado $B_i' \supseteq \bar{B}_i$ y un mapa coordenado suave $\varphi_i : B_i' \to \mathbb{R}^n$ que se restringe a un difeomorfismo de $\bar{B}_i$ a un subconjunto compacto de $\mathbb{R}^n$. Para cada i, sea $\rho_i : M \to \mathbb{R}$ sea una función bulto suave tal que es igual a 1 en $\bar{B}_i$ y está soportada en B_i'. Definamos el mapa suave $F : M \to \mathbb{R}^{nm+m}$ por

$$F(p) = (\rho_1(p)\varphi_1(p), \ldots, \rho_m(p)\varphi_m(p), \rho_1(p), \ldots, \rho_m(p))$$

   donde $\rho_i\varphi_i$ es extendida por cero fuera del soporte de ρ_i.

   Para ver que F es inyectivo, suponga que $F(p) = F(q)$. Como los conjuntos B_i cubren M, hay un i tal que $p \in B_i$. Entonces $\rho_i(p) = 1$, y el hecho de que $\rho_i(q) = \rho_i(p) = 1$ implica que $q \in \operatorname{supp}\rho_i \subseteq B_i'$, y

$$\varphi_i(q) = \rho_i(q)\varphi_i(q) = \rho_i(p)\varphi_i(p) = \varphi_i(p)$$

   Dado que φ_i es inyectiva en B_i', sigue que $p = q$. Luego, para ver que F es una inmersión suave, sea $p \in M$ un punto arbitrario y escoja i tal que $p \in B_i$. Como $\rho_i \equiv 1$ en una vecindad de p, tenemos $d(\rho_i\varphi_i)_p = d(\varphi_i)_p$, el cual es inyectivo. Sigue fácilmente que dF_p es inyectiva. Así, F es una inmersión, inyectiva suave, como M es compacto, esto implica que F es un embedimiento.

3 Propuestos

1. ★☆☆ Hacer los detalles del Lema de Extensión de Campos Vectoriales.

2. ★☆☆ Demostrar el Lema 2.1.