Álgebras de Banach y espacios de Berkovich

Cristóbal Montecino

November 2020

1. Resumen

Un álgebra de Banach compleja con unidad es una estructura algebraica donde podemos multiplicar, sumar y medir elementos con la adición de poder escalarlos por números complejos. Un ejemplo serían las funciones periódicas pues podemos sumarlas, escalarlas, multiplicarlas y medir su amplitud.

Daremos una rápida introducción a su teoría para luego extenderla a otros cuerpos. Antes de todo eso, partiremos, por los preliminares, donde definiremos todo lo necesario para desarrollar la teoría.

Luego de la introducción a las álgebras de Banach, mostraremos las propiedades de los cuerpos que nos interesan para hacer la extensión y veremos que el problema que surge al tratar de adaptarla es que perdemos la noción de espacio pues los puntos estarán desconectados.

Finalmente, introduciremos los espacios de Berkovich que arreglan el problema conectandolos de manera suave.

2. Introducción

La geometría es una de las ramas más antiguas de la matemática junto con la aritmética. Con la naciente necesidad de resolver problemas aritméticos, nacen las ecuaciones y, junto con ellas, el álgebra.

El álgebra se conecta sin duda alguna a través del plano cartesiano con la aparición de la Geometría Analítica por parte de René Descartes y Pierre de Fermat. En la geometría clásica, se estudió intensivamente las secciones cónicas, por ejemplo, por parte de Arquímedes. René Descartes y Pierre de Fermat también las estudian, pero, ahora, desde un punto de vista algebraico.

Uno de los teoremas que presentan es que cualquier forma cuadrática puede expresarse en su forma normal haciendo factorizaciones que, geométricamente, resultan ser rotaciones y traslaciones. En particular, cualquier forma cuadrática $ax^2+2bxy+cy^2$ puede ser transformada por una rotación del plano cartesiano a $\alpha x^2 + \beta y^2$. Este teorema se puede generalizar a que, para cualquier forma cuadrática $\sum a_{ij}x_ix_j$ simétrica, es decir, $a_{ij} = a_{ji}$, se pueden rotar los ejes de manera que la forma cuadrática se convierta a $\sum \alpha_i x_i^2$.

Ya cuando se desarrolla la teoría de matrices, lo anterior se le conoce como diagonalización y consiste en que la matriz asociada $M = (a_{ij})$ puede ser vista como una matriz diagonal $D = (\alpha_i)$.

David Hilbert desarrolla una teoría donde extiende este teorema, pasando de una suma finita a infinita, y la llama teoría espectral. El desarrollo de la teoría de Hilbert, por parte de matemáticos como Schmidt, Riesz y Von Neumann, condujo a la noción de espacios de Hilbert y al desarrollo del análisis funcional moderno. Sin embargo, la teoría espectral aún dependía de "ser simétrica".

Gelfand y sus colegas desarrollan una teoría para estudiar los operadores en estos espacios. Así nacen las Álgebras de Banach y C*-álgebras, y su respectiva teoría espectral. Esta generaliza la teoría de espectral que pide una condición menos fuerte que ser simétrica, ser normal.

La teoría de Gelfand se basa en que podemos extender el análisis complejo a las álgebras de Banach complejas. De forma inocente, podríamos tratar de desarrollar la teoría de álgebras de Banach sobre otros cuerpos. Sin embargo, las propiedades de espacio dependen del cuerpo.

Inspirado con la noción de espacio de la Geometría Algebraica Moderna, Berkovich desarrolla una teoría que nos da un "buen espacio" y que es compatible con la teoría ya existente. Brindándonos una visión geométrica a los resultados de las Álgebras de Banach que perdimos en el desarrollo de la teoría espectral.

3. Notación

- Sea X un espacio de Banach, denotamos por X^* a su dual, es decir, al conjunto de todos los operadores lineales acotados.
- La norma del espacio dual la denotaremos por $\|\cdot\|_{X^*}$.
- Sea R un anillo. Denotaremos a su espectro maximal por $\operatorname{Max} R$ y a su espectro por $\operatorname{Spec} R$.
- Cuando se necesite, T denotará a $(T_1, ..., T_n)$.

4. Preliminares

Definición 4.1 (Módulo)**.** Sea $\mathcal{A}$ un anillo y M un grupo abeliano. M es *un $\mathcal{A}$-módulo por la izquierda* cuando existe una multiplicación por escalar por la izquierda $\cdot : \mathcal{A} \times M \to M$, denotamos el mapeo por $(\lambda, v) \mapsto \lambda v$, tal que

$$\lambda(v + w) = \lambda v + \lambda w, \quad (\lambda + \mu)v = \lambda v + \mu v, \quad (\lambda\mu)v = \lambda(\mu v)$$

para todo $v, w \in M$ y $\lambda, \mu \in \mathcal{A}$.

De la misma manera, M es *un $\mathcal{A}$-módulo por la derecha* cuando cuenta con una multiplicación por escalar por la derecha $\cdot : M \times \mathcal{A} \to M$, denotamos el mapeo por $(v, \lambda) \mapsto v\lambda$, tal que

$$(v + w)\lambda = v\lambda + w\lambda, \quad v(\lambda + \mu) = v\lambda + v\mu, \quad v(\lambda\mu) = (v\lambda)\mu$$

para todo $v, w \in M$ y $\lambda, \mu \in \mathcal{A}$.

Cuando $\mathcal{A}$ es un anillo conmutativo, un $\mathcal{A}$-módulo por la izquierda induce naturalmente un $\mathcal{A}$-módulo por la derecha y viceversa. En ese caso, se dirá que es un $\mathcal{A}$-módulo, es decir, un $\mathcal{A}$-módulo es un $\mathcal{A}$-módulo por la izquierda y por la derecha donde el módulo por la izquierda o derecha esta inducido naturalmente por el otro.

Cuando $\mathcal{A}$ es un anillo unitario, un $\mathcal{A}$-módulo por la izquierda (resp. por la derecha) además debe cumplir que $1 \cdot v = v$ (resp. $v \cdot 1 = v$). Notar que, si es $\mathcal{A}$ es conmutativo con unidad, un $\mathcal{A}$-módulo cumplirá con $1 \cdot v = v = v \cdot 1$.

Ejemplo 4.1. Un espacio vectorial sobre un cuerpo es lo mismo que un módulo sobre el cuerpo, es decir, V es un k-espacio vectorial entonces V si y solo si es k-módulo.

Definición 4.2 (Homomorfismos entre Módulos)**.** Sea $\mathcal{A}$ un anillo y dos $\mathcal{A}$-módulos por la izquierda (resp. por la derecha) M y N. *Un homomorfismo entre $\mathcal{A}$-módulos por la izquierda (resp. por la derecha)* entre M y N es un homomorfismo de grupos abelianos $\varphi : M \to N$ tal que $\varphi(\lambda v) = \lambda\varphi(v)$ (resp. $\varphi(v\lambda) = \varphi(v)\lambda$).

Cuando $\mathcal{A}$ es conmutativo, *un homomorfismo entre $\mathcal{A}$-módulos* es un homomorfismo entre $\mathcal{A}$-módulos que lo es por la derecha y por la izquierda.

Ejemplo 4.2. Las transformaciones lineales entre espacio vectoriales sobre un cuerpo corresponden a los homomorfismos sobre el módulo del cuerpo, es decir, si V es un k-espacio vectorial, entonces las transformaciones lineales de V corresponden a los homomorfismos entre los k-módulos y viceversa.

Definición 4.3 (Álgebra no asociativa)**.** Sea R un anillo conmutativo. Una *R-álgebra no asociativa* es un R-módulo equipado con una transformación bilineal sobre R, es decir, una función $* : \mathcal{A}\times\mathcal{A} \to \mathcal{A}$, donde a $\mathcal{A}$ denota al R-álgebra, que cumple

$$(x + y)z = xz + yz, \quad x(y + z) = xy + xz, \quad (\lambda x)y = \lambda(xy) = x(\lambda y)$$

para todo $x, y, z \in \mathcal{A}$ y $\lambda \in R$, donde xy denota a $x * y$ cuando $x, y \in \mathcal{A}$.

Se le llamará *multiplicación del álgebra* a la transformación bilineal; A la *suma del álgebra*, a la suma del modulo; A la *multiplicación por escalar*, a la multiplicación por escalar del modulo.

Definición 4.4 (Álgebra)**.** Sea R un anillo conmutativo. Una *R-álgebra asociativa* o simplemente una *R-álgebra* es una R-álgebra no asociativa que sí es asociativa, es decir, $xyz := x(yz) = (xy)z$ para todo x, y, z pertenecientes al álgebra. *Notar que esto convierte, a las R-álgebras, en un anillo.*

Definición 4.5 (Álgebra con unidad)**.** Sea R un anillo conmutativo. *Una R-álgebra con unidad* es un R-álgebra donde existe un elemento $e \neq 0$ del álgebra tal que $x \cdot e = x = e \cdot x$ para todo x en el álgebra. *Notar que esto convierte a las Álgebras con unidad en un anillo unitario.*

Definición 4.6 (Elemento invertible de un Álgebra)**.** Sea R un anillo conmutativo y un R-álgebra con unidad. Diremos que *un elemento del álgebra es invertible* si lo es en el anillo asociado.

Definición 4.7 (Álgebra invertible)**.** Sea R un anillo conmutativo. *Una R-álgebra es invertible* si todo elemento del álgebra es invertible a excepción del 0 (neutro aditivo). *Notar que esto convierte a las Álgebras invertibles en un anillo de división.*

Definición 4.8 (Álgebra conmutativa)**.** Sea R un anillo conmutativo. Una R-álgebra es *conmutativa* si $xy = yx$ para todo x, y en el álgebra. *Notar que esto convierte a las Álgebras conmutativas en un anillo conmutativo.*

Definición 4.9. Sea X un e.v.t (espacio vectorial topológico) con cuerpo en $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{K} = \mathbb{C}$). Denotaremos por $C(X)$ como el conjunto de todas las funciones continuas de X a $\mathbb{K}$.

Si X es compacto, lo dotamos de la norma del supremo

$$\|f\| := \sup_{x\in X} |f(x)|$$

Ejemplo 4.3. Sea V un e.v.t. con cuerpo en $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{K} = \mathbb{C}$). Entonces, V es una $\mathbb{K}$-álgebra conmutativa con unidad.

Definición 4.10 (Homomorfismos entre álgebras)**.** Sea R un anillo conmutativo. Un *homomorfismo entre R-álgebras* (resp. álgebras no asociativas) es un homomorfismo $\varphi : A \to B$ entre R-módulos tal que $\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y)$. Cuando son R-álgebras con unidad, *los homomorfismos entre R-álgebras con unidad* son homomorfismos entre R-álgebras que además cumplen con mapear la unidad en la unidad, es decir, $\varphi(e_A) = e_B$.

Definición 4.11 (Topología de las estructuras algebraicas)**.**

Un grupo topológico es un espacio topológico donde la función $(x, y) \mapsto xy^{-1}$ es continua. De manera equivalente, es un espacio topológico donde $(x, y) \mapsto x + y$ y $x \mapsto x^{-1}$ son continuas.

Un anillo topológico es un espacio topológico en el cual la suma forma un grupo topológico con respecto a la topología y la multiplicación es continua. De manera equivalente, es un espacio topológico donde $(x, y) \mapsto x + y$, $x \mapsto -x$ y $(x, y) \mapsto xy$ son continuas.

Un cuerpo topológico es un espacio topológico en el cual la suma y la multiplicación forman grupos topológicos con respecto a la topología. De manera equivalente, es un espacio topológico donde $(x, y) \mapsto x + y$, $x \mapsto -x$, $(x, y) \mapsto xy$, $x \mapsto x^{-1}$ son continuas.

Sea R un anillo conmutativo topológico. *Un R-módulo topológico* es un espacio topológico tal que la suma y la multiplicación por escalar son continuas, es decir, $(x, y) \in M \times M \mapsto x + y$ y $(\lambda, x) \in R \times M \mapsto \lambda x$ son continuas, donde M denota al módulo.

Un espacio vectorial topológico es un módulo topológico sobre un cuerpo topológico.

Un álgebra topológica sobre un anillo (resp. sobre un cuerpo) es un espacio topológico en el cual la topología induce un módulo topológico (resp. espacio vectorial topológico), y el anillo formado por la suma y la multiplicación del álgebra es un anillo topológico con respecto a la topología.

Definición 4.12 (Seminorma, norma, semivaluación y valuación)**.**

Una *seminorma* para un grupo $(G, +)$ es una función $|\cdot| : G \to \mathbb{R}_+$ tal que $|a-b| \leq |a|+|b|$ y $|0| = 0$. Es una *norma* si el kernel es trivial, es decir, se cumple $|g| = 0 \iff g = 0$.

Una *seminorma* (resp. *norma*) para un anillo es una seminorma (resp. norma) para su grupo aditivo que además es submultiplicativa, es decir, $|xy| \leq |x||y|$. Se dirá multiplicativa si $|xy| = |x||y|$.

Para un cuerpo, una seminorma (resp. norma) multiplicativa se dirá *una semivaluación* (resp. *valuación*).

Sea k un cuerpo equipado con una valuación $|\cdot|$.

Una *seminorma* (resp. *norma*) $\|\cdot\|$ para un k-módulo es una seminorma (resp. norma) para el grupo aditivo del módulo que además cumple que existe $M > 0$ tal que $\|\lambda v\| \leq M|\lambda|\|v\|$ para todo λ en el cuerpo y v en el módulo. *Para un k-espacio vectorial*, se pide $\|\lambda v\| = |\lambda|\|v\|$.

Una *seminorma* (resp. *norma*) $\|\cdot\|$ para una k-álgebra es una seminorma (resp. norma) para el k-espacio vectorial asociado donde existe $C > 0$ tal que $\|xy\| \leq C\|x\|\|y\|$ para todo x e y en el álgebra. Una norma se dice *natural* si $C = 1$ y, cuando es un álgebra con unidad, además debe cumplir que $\|e\| = 1$.

Un *grupo (resp. anillo, cuerpo, módulo, espacio vectorial, álgebra) normado (resp. seminormado)* es un grupo (resp. anillo, cuerpo, módulo, espacio vectorial, álgebra) equipado con una norma (resp. seminorma). En el caso de cuerpos, se dice *cuerpo valuado (resp. semivaluado)* en vez de un cuerpo normado (resp. seminormado).

Definición 4.13 (Seminorma y norma residual)**.** Sea $(A, \|\cdot\|)$ un grupo (resp. anillo, cuerpo, módulo, espacio vectorial, álgebra) seminormado (resp. normado) y $B \subseteq A$ definimos la *seminorma (resp. norma) residual* para A/B como

$$\|\bar{x}\| = \inf_{\pi(x)=\bar{x}} \|x\| \qquad \forall \bar{x} \in A/B$$

donde π es la proyección natural al cociente.

Definición 4.14 (Homomorfismos entre estructuras seminormadas y normadas)**.** Un *homomorfismo entre grupos (resp. anillos, cuerpos, módulos, espacio vectoriales, álgebras) seminormado (resp. normado)* es un homomorfismo de grupo (resp. anillo, cuerpo, módulo, espacio vectorial, álgebra) $\varphi : A \to B$ acotado, es decir, existe $C > 0$ tal que

$$\|\varphi(x)\|_B \leq C\|x\|_A \quad \forall x \in A$$

donde $\|\cdot\|_A$, $\|\cdot\|_B$ las respectivas seminormas (resp. normas).

Definición 4.15 (Isométria)**.** Un homomorfismo entre grupos (resp. anillos, cuerpos, módulos, espacio vectoriales, álgebras) normados $\varphi : A \to B$ se dice *isométria* si $\|\varphi(x)\|_B = \|x\|_A$ para todo $x \in A$, donde $\|\cdot\|_A$ y $\|\cdot\|_B$ representan las normas respectivas.

Definición 4.16 (Isomorfismo)**.** Un *isomorfismo* es un homomorfismo biyectivo tal que su inversa es un homomorfismo. Dos estructuras se dicen *isomorfas* si existe un isomorfismo entre ellas.

Definición 4.17 (Seminormas y normas no-arquimedianas y arquimedianas)**.** Una seminorma (resp. norma) $\|\cdot\|$ es *no-arquimediana* si $\|x-y\| \leq \max\{\|x\|, \|y\|\}$ para todo x e y. Es *arquimediana* si no es *no-arquimediana*.

Definición 4.18 (Completación)**.** Sea $(X, \|\cdot\|)$ un grupo (resp. anillo, cuerpo, módulo, espacio vectorial, álgebra) seminormado (resp. normado).

Una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq k$ es una sucesión de Cauchy si para todo $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\|x_k - x_m\| < \varepsilon$ para todo $n, m \geq N$.

Definimos la relación de equivalencia $\sim$ para las sucesiones de Cauchy como

$$(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \sim (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \iff \lim_{n\to\infty} \|x_n - y_n\| = 0$$

Definimos la *completación de k* que denotaremos por $\widehat{k}$ como

$$\widehat{k} := \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq k \mid (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ es una sucesión de cauchy}\}/\sim$$

$\widehat{k}$ es un grupo (resp. anillo, cuerpo, módulo, espacio vectorial, álgebra) seminormado (resp. normado) con la seminorma (resp. norma):

$$\|[(x_n)_{n\in\mathbb{N}}]\| := \lim_{n\to\infty} \|x_n\|$$

Observación: La estructura algebraica es heredada de forma natural desde k.

Si X es un grupo (resp. anillo, cuerpo, módulo, espacio vectorial, álgebra) isomorfo a $\widehat{k}$. También diremos que X es la completación de k.

Un grupo (resp. anillo, cuerpo, módulo, espacio vectorial, álgebra) seminormado (resp. normado) se dirá *completo* si la proyección natural $k \mapsto \widehat{k}$ es un isomorfismo.

Definición 4.19 (Topología inducida)**.** La *topología inducida por una seminorma (resp. norma)* $\|\cdot\|$ para un grupo (anillo, modulo, álgebra, etc) X es la topología más débil tal que, para todo $\overline{x} \in X$ y $r > 0$, los conjuntos, que llamaremos *bolas*, $B(\overline{x}, r) := \{x \in X \mid \|x - \overline{x}\| < r\}$ son abiertos.

Proposición 4.1. La topología inducida por la norma de un grupo (resp. anillo, cuerpo, módulo, espacio vectorial, álgebra) lo convierten en un grupo (resp. anillo, cuerpo, módulo, espacio vectorial, álgebra) topológico.

Definición 4.20. Dos normas se dicen *equivalentes* si inducen la misma topología.

Proposición 4.2. Toda álgebra normada tiene una norma natural equivalente.

Demostración. Si $\|\cdot\|$ es la norma del álgebra, la norma natural equivalente es

$$|||x||| = \sup_{y\neq 0} \frac{\|xy\|}{\|y\|}$$

$\square$

Definición 4.21 (Homomorfismos admisibles)**.** Sea $\varphi : A \to B$ un homomorfismo entre grupos (resp. anillos, cuerpos, módulos, espacio vectoriales, álgebras) seminormado (resp. normado). Como $A/\ker\varphi \cong \varphi(A)$, decimos que φ es *admisible* si la norma residual es equivalente a la norma inducida por B desde $B \to \varphi(A) \to A/\ker\varphi$.

Definición 4.22 (Anillo de Banach)**.** Un *anillo de Banach* es un anillo normado completo.

Definición 4.23 (Espacio de Banach)**.** Sea k un cuerpo valuado completo. Un *espacio de Banach con cuerpo en k* es un k-espacio vectorial normado completo.

5. Sección Principal

5.1. Introducción a las Ágebras de Banach complejas, Teoria de Gelfand y C*-Álgebras

Definición 5.1 (k-Álgebra de Banach)**.** Sea k un cuerpo valuado completo. Una *k-Álgebra de Banach* es una k-álgebra normada completa.

Siempre supondremos que la norma es natural pues usaremos la norma equivalente dada por la Proposición. 4.2.

Diremos que es conmutativa (resp. invertible, con unidad) si el álgebra es conmutativa (resp. invertible, con unidad).

Definición 5.2 (Álgebra de Banach)**.** Una Álgebra de Banach compleja con unidad o simplemente una *Álgebra de Banach* $\mathcal{A}$ es una $\mathbb{C}$-Álgebra de Banach con unidad (con norma natural).

Proposición 5.1. Un Álgebra de Banach $\mathcal{A}$ cumple que

1. $\mathcal{A}$ es un espacio de Banach complejo.
2. $\|xy\| \leq \|x\|\|y\|$ para todo $x, y \in \mathcal{A}$.
3. $\|e\| = 1$.

donde $\|\cdot\|$ denota la norma del álgebra.

Ejemplo 5.1. $\mathbb{C}$ con el valor absoluto como norma, es decir, con $|a+bi| = \sqrt{a^2+b^2}$, es un Álgebra de Banach conmutativa.

Definición 5.3 (Grupo multiplicativo)**.** Sea $\mathcal{A}$ un Álgebra de Banach con unidad. Definimos $G(\mathcal{A})$ como el *grupo multiplicativo* de $\mathcal{A}$ visto como un anillo con unidad, es decir,

$$G(\mathcal{A}) := \{x \in \mathcal{A} \mid x \text{ es invertible}\}$$

Proposición 5.2 (Serie de Von Neumann)**.** Sea $\mathcal{A}$ un Álgebra de Banach, si $x \in \mathcal{A}$ y $\|x\| < 1$, entonces $e - x \in G(\mathcal{A})$ y

$$(e-x)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

Además,

$$\|(e-x)^{-1}\| \leq \frac{1}{1-\|x\|}$$

Observación: Si hacemos la división euclidiana de manera formal obtenemos esta serie que al ser geométrica converge cuando $\|x\| < 1$.

Demostración.

Obtenemos, por la serie geométrica, que

$$\left\|\sum_{n=0}^{N} x^n\right\| \leq \sum_{n=0}^{N} \|x\|^n \leq \sum_{n=0}^{\infty} \|x\|^n = \frac{1}{1-\|x\|}$$

Por lo tanto, el límite $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n$ existe cuando $\|x\| < 1$.

Se verifica que

$$(e-x)\left(\sum_{k=0}^{n} x^k\right) = \left(\sum_{k=0}^{n} x^k\right)(e-x) = e - x^{n+1}$$

Luego, como estamos en un álgebra topológica, la multiplicación, la suma y la resta del álgebra son continuas y, por lo tanto, al tomar límite, obtenemos:

$$(e - x)\left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right)(e - x) = e$$

pues $\lim_{n\to\infty} \|x^{n+1}\| = 0$.

Concluyendo que es la inversa, en particular, es invertible y, además, hereda la cota.

□

Proposición 5.3. $G(\mathcal{A})$ es abierto.

Demostración.

Sea $\bar{x} \in G(\mathcal{A})$. Probaremos que la bola $B(\bar{x}, \|\bar{x}^{-1}\|^{-1}) \subseteq G(\mathcal{A})$. Sea $x \in B(\bar{x}, \|x^{-1}\|^{-1})$. Entonces,

$$\|e - \bar{x}^{-1}x\| = \|\bar{x}^{-1}(\bar{x} - x)\| \leq \|\bar{x}^{-1}\|\|\bar{x} - x\| \leq 1$$

Luego, por la Serie de Von Neumann, $e - \bar{x}^{-1}x \in G(\mathcal{A})$. Luego, como es grupo y $e, \bar{x} \in G(\mathcal{A})$, $x \in G(\mathcal{A})$. Concluyendo que $G(\mathcal{A})$ es abierto pues es la unión de los abiertos $B(\overline{x}, \|\bar{x}^{-1}\|^{-1})$.

□

Definición 5.4 (Espectro)**.** Sea $\mathcal{A}$ un Álgebra de Banach. Definimos el *espectro de* $x \in \mathcal{A}$ como

$$\sigma(x) := \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \lambda e - x \notin G(A)\}$$

Proposición 5.4.

$$\sigma(x) \subseteq B(0, \|x\|)$$

Proposición 5.5. Sea $\mathcal{A}$ un Álgebra de Banach y $x \in \mathcal{A}$. Para todo $p \in \mathbb{C}[X]$.

$$p(\sigma(x)) = \sigma(p(x))$$

Proposición 5.6 (El Complemento del espectro es abierto)**.** Sea $\mathcal{A}$ un un Álgebra de Banach. y $x \in \mathcal{A}$.

$$\mathbb{C} \setminus \sigma(x) \text{ es abierto}$$

Demostración.

La función $\varphi : \mathbb{C} \to \mathcal{A}$ definida como $\varphi(\lambda) = \lambda e - x$ es continua pues $\mathcal{A}$ es un anillo topológico. Luego, como $G(\mathcal{A})$ es abierto, $\varphi^{-1}(\mathbb{C}) = \mathbb{C} \setminus \sigma(x)$ es abierto.

□

Definición 5.5 (Resolvente)**.** Sea $\mathcal{A}$ un Álgebra de Banach y $x \in \mathcal{A}$. Se define el *resolvente* de x como por $R_x : \mathbb{C} \setminus \sigma(x) \to \mathcal{A}$ donde

$$R_x(\lambda) := (\lambda e - x)^{-1}$$

Teorema 5.1 (El resolvente es analítico)**.** Sea $\mathcal{A}$ un Álgebra de Banach y $x \in \mathcal{A}$. El resolvente es una función analítica.

Demostración.

Sea $\bar{\lambda} \in \mathbb{C} \setminus \sigma(x)$. Como $\mathbb{C} \setminus \sigma(x)$ es abierto, existe $r > 0$ tal que $B(\bar{\lambda}, r) \subseteq \mathbb{C} \setminus \sigma(x)$. Por lo tanto,

$$B(\bar{\lambda}, \text{mín}\{r, \|R_x(\bar{\lambda})\|^{-1}\}) \subseteq B(\bar{\lambda}, r) \subseteq \mathbb{C} \setminus \sigma(x)$$

Ahora, sea $\lambda \in B(\bar{\lambda}, \text{mín}\{r, \|R_x(\bar{\lambda})\|^{-1}\})$. Entonces, lo siguiente es invertible porque λ no pertenece al espectro:

$$\lambda e - x = (\bar{\lambda} e - x)e - (\bar{\lambda} - \lambda)e = (\bar{\lambda} e - x)(e - (\bar{\lambda} - \lambda)R_x(\bar{\lambda}))$$

Su inversa es

$$R_x(\lambda) = (e - (\bar{\lambda} - \lambda)R_x(\bar{\lambda}))^{-1} R_x(\bar{\lambda})$$

Luego, como $\|(\bar{\lambda} - \lambda)R_x(\bar{\lambda})\| \leq 1$, por la Serie de Von Neumann,

$$R_x(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n R_x(\bar{\lambda})^{n+1} (\lambda - \bar{\lambda})^n$$

Por lo tanto, R_x es analítico en $\bar{\lambda}$. Concluyendo que R_x es analítico en todo su dominio pues $\bar{\lambda}$ es arbitrario.

□

Teorema 5.2. Sea $\mathcal{A}$ un Álgebra de Banach y $x \in A$. Entonces,

$$\sigma(x) \text{ es compacto y no vacío}$$

Demostración.

Es compacto pues es cerrado y acotado. Esto porque $\mathbb{C} \setminus \sigma(x)$ es abierto y es acotado pues la serie de Von Neumann nos dice que, para todo $\lambda > \|x\|$, $\lambda e - x$ es invertible, es decir, pertenece a $\mathbb{C} \setminus \sigma(x)$.

Ahora, mostraremos que $\sigma(x)$ es no vacío. Supongamos que es vacío. Por lo tanto, R_x es analítico en todo $\mathbb{C}$.

Por la serie de Von Neumann,

$$\|R_x(\lambda)\| \leq \frac{1}{|\lambda| - \|x\|}$$

para todo $|\lambda| > \|x\|$.

Por lo tanto, $\lim\limits_{|\lambda| \to \infty} \|R_x(\lambda)\| = 0$. En particular, existe $M > \|x\|$ tal que

$$\|R_x(\lambda)\| < 1$$

para todo $|\lambda| > M$.

Luego, como es analítica, es continua. Entonces, para cada $\lambda \in \mathbb{C}$ existe $r_\lambda > 0$ tal que $\|R_x(\lambda') - R_x(\lambda)\| < 1$ para todo $\lambda' \in B(\lambda, r_\lambda)$. Con esto, obtenemos que

$$\lambda' \in B(\lambda, r_\lambda) \implies \|R_x(\lambda')\| < 1 + \|R_x(\lambda)\|$$

Dando lugar al siguiente recubrimiento de abiertos:

$$D := \overline{B(0, M)} \subseteq \bigcup_{\lambda \in D} B(\lambda, r_\lambda)$$

Como D es compacto, pues es cerrado y acotado, existen $\lambda_1, ..., \lambda_m$ para cierto $m \in \mathbb{N}$ tal que

$$D \subseteq \bigcup_{n=1}^{m} B(\lambda_n, r_{\lambda_n})$$

Por lo tanto, para todo $\lambda \in D$, es decir, para todo $|\lambda| \leq \|x\|$,

$$\|R_x(\lambda)\| < C := 1 + \max\{\|R_x(\lambda_1)\|, ..., \|R_x(\lambda_m)\|\}$$

Finalmente, tras juntar todo, $\|R_x(\lambda)\| < C$ para todo $\lambda \in \mathbb{C}$.

Concluyendo que R_x esta acotado.

Finalmente, por el teorema de Hahn-Banach, existe $\ell : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ operador lineal acotado tal que $\ell(R_x(0)) = \|R_x(0)\|$. Como R_x es analítico y ℓ es un operador lineal acotado, $\ell(R_x)$ es analítico en todo $\mathbb{C}$ y acotado. Luego, $\ell(R_x)$ es entera y esta acotada.

Por el teorema de Liouville, $\ell(R_x)$ es constante y, como el $\lim_{|\lambda| \to \infty} R_x(\lambda) = 0$, $\ell(R_x(\lambda)) = 0$ para todo $\lambda \in \mathbb{C}$. En particular, $R_x(0) = 0$ pues $\ell(R_x(0)) = \|R_x(0)\| = 0$. Pero, recordemos que $0 = R_x(0) = (-x)^{-1}$. Luego, 0 es invertible pues $-x$ sería su inversa. Concluyendo, por contradicción, que $\sigma(x)$ es no vacío.

Observación: Podemos generalizar esto último para formular un teorema de Liouville para Álgebras de Banach.

□

Definición 5.6 (Radio espectral)**.** Sea $\mathcal{A}$ un Álgebra de Banach. Se define el *radio espectral* de $x \in \mathcal{A}$ como

$$\rho(x) := \max_{\lambda \in \sigma(x)} |\lambda|$$

Nota: Es un maximo pues $\sigma(x)$ es compacto.

Proposición 5.7.

$$\rho(x^n) = \rho(x)^n$$

Demostración.

Por la proposición 5.5, $\sigma(x^n) = \sigma(x)^n$. Concluyendo que $\rho(x^n) = \rho(x)^n$.

□

Teorema 5.3 (Formula de Gelfand)**.** Sea $\mathcal{A}$ un Álgebra de Banach y $x \in A$, entonces

$$\rho(x) = \lim_{n\to\infty} \|x^n\|^{1/n} = \inf_{n\in\mathbb{N}} \|x^n\|^{1/n}$$

Demostración.

Por la serie de Von Neumann, para todo $|\lambda| > \|x\|$,

$$R_x(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{\lambda^{n+1}}$$

Luego, para todo $\ell : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ operador lineal acotado, obtenemos que

$$\ell(R_x(\lambda)) = \sum_{n=0}^{\infty} \ell\left(\frac{x^n}{\lambda^{n+1}}\right)$$

para todo $|\lambda| > \rho(x)$ pues $\ell(R_x(\lambda))$ es analítica en $\{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| > \rho(x)\}$ y, por la unicidad de la serie de Laurent, se cumple para todo $|\lambda| > \rho(x)$.

Por lo tanto,$\left|\ell\left(\frac{x^n}{\lambda^{n+1}}\right)\right| \to 0$ cuando $n \to \infty$.

Luego, definimos $T_n(\ell) := \ell\left(\frac{x^n}{\lambda^{n+1}}\right)$. Entonces, lo anterior implica que $|T_n(\ell)| < \infty$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Aplicando el teorema de Banach-Steinhaus, existe $C > 0$ tal que $|T_n(\ell)| \leq C$ para todo $\|\ell\|_{\mathcal{A}^*} = 1$.

Ahora, por el teorema de Hanh-Banach, existe $\ell_n : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ operador lineal acotado tal que $\|\ell_n\| = 1$ y $T_n(\ell_n) = \frac{\|x\|^n}{|\lambda|^{n+1}}$. Por lo tanto,

$$\frac{\|x^n\|}{|\lambda|^{n+1}} \leq C$$

Del cual, deducimos que

$$\|x^n\|^{1/n} \leq (C|\lambda|)^{1/n}|\lambda| \leq |\lambda|$$

para todo $|\lambda| > \rho(x)$ y n suficientemente grande que depende de λ.

Por lo tanto, como $\rho(x)^n = \rho(x^n) \leq \|x^n\|$ y usando $\lambda = \rho(x) + \epsilon$ con $\epsilon > 0$ en lo anterior,

$$\|x^n\|^{1/n} - \epsilon \leq \rho(x) \leq \|x^n\|^{1/n}$$

para n suficientemente grande que depende de ϵ.

Se puede probar que $\|x^n\|^{1/n}$ converge a $\inf_{n\in\mathbb{N}} \|x^n\|^{1/n}$.

Concluyendo que

$$\lim_{n\to\infty} \|x^n\|^{1/n} = \rho(x)$$

Observación: Al igual que antes, podemos extraer de la demostración que usando operadores lineales acotados podemos generalizar resultados de del análisis complejo a las Álgebras de Banach.

□

Teorema 5.4 (Gelfand-Mazur)**.** La única (salvo isomorfismos) Álgebra de Banach invertible es $\mathbb{C}$, es decir, si $\mathcal{A}$ es una Álgebra de Banach invertible, entonces:

$$\mathcal{A} \cong \mathbb{C}$$

como isomorfismo isométrico entre Álgebras de Banach.

Nota: Si pensamos a $\mathcal{A}$ como un álgebra de funciones, esto nos dice que, si el álgebra es invertible, entonces solo son las funciones constantes.

Demostración.

Consideramos el homomorfismo entre las álgebras de Banach $\mathbb{C}$ y $\mathcal{A}$ dado por $\lambda \mapsto \lambda e$. Probaremos la sobreyectividad:

Sea $x \in \mathcal{A}$. Como $\sigma(x)$ es no vacío, existe $\lambda \in \sigma(x)$ tal que

$$\lambda e - x \text{ es no invertible}$$

Como $\mathcal{A}$ es invertible, $\lambda e - x = 0$. Por lo tanto, $x = \lambda e$. Probando la sobreyectividad. El resto de la demostración es directa y se concluye que es un isomorfismo isométrico.

□

Definición 5.7 (Espectro de Gelfand)**.** Sea $\mathcal{A}$ un Álgebra de Banach conmutativa. Definimos *el espacio de caracteres* o *Espectro de Gelfand* $\operatorname{Sp}\mathcal{A}$ como el conjunto de todos los homomorfismos no nulos entre las Álgebras de Banach $\mathcal{A}$ y $\mathbb{C}$. Los elementos de $\operatorname{Sp}\mathcal{A}$ los llamaremos caracteres.

Lo dotamos de la topología más débil que hace continuos a los caracteres.

Corolario 5.4.1 (Corolario de Gelfand-Mazur)**.** Si $\mathcal{A}$ es un Álgebra de Banach conmutativa, entonces tenemos la biyección:

$$\operatorname{Sp}\mathcal{A} \xrightarrow{\sim} \operatorname{Max} A$$

inducido por ker.

Demostración.

Consideramos la función $h \mapsto \ker h$. Probaremos la sobreyectividad:

Sea $\mathfrak{m} \in \operatorname{Max} A$. Obtenemos, por la proyección natural y Gelfand-Mazur, que

$$\mathcal{A} \xrightarrow{\pi} \mathcal{A}/\mathfrak{m} \cong \mathbb{C}$$

Esto porque $\mathcal{A}/\mathfrak{m}$ es un Álgebra de Banach invertible pues $\mathfrak{m}$ es maximal y usamos la norma residual.

Luego, $\ker(\mathcal{A} \to \mathbb{C}) = \mathfrak{m}$. Probando la sobreyectividad. El resto de la demostración es directa y se concluye que tenemos una biyección.

□

Teorema 5.5. $\operatorname{Sp}\mathcal{A}$ es un espacio topológico no vacío, compacto y Hausdorff.

Definición 5.8 (Transformada de Gelfand)**.** Se define la *transformada de Gelfand* $\mathcal{A} \to C(\operatorname{Sp}\mathcal{A})$ para una Álgebra de Banach conmutativa $\mathcal{A}$ como la evaluación canónica, es decir, tal que

$$x \mapsto \hat{x}$$

donde la función $\hat{x} : \operatorname{Sp}\mathcal{A} \to \mathbb{C}$ esta definida por $\hat{x}(h) = h(x)$.

Proposición 5.8.

$$\hat{x}(\operatorname{Sp}\mathcal{A}) = \sigma(\mathcal{A})$$

Proposición 5.9. La transformada de Gelfand es un homomorfismo entre las Álgebras de Banach $\mathcal{A}$ y $C(\operatorname{Sp}\mathcal{A})$.

Definición 5.9 (C*-Álgebra)**.** Una *C*-Álgebra* es una Álgebra de Banach equipada con una involución, es decir, con una función $^* : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$, donde $\mathcal{A}$ denota el álgebra, tal que

$$(x^*)^* = x, \quad (xy)^* = y^*x^*, \quad (\lambda x + y) = \overline{\lambda}x^* + y^*, \quad \|xx^*\| = \|x\|^2$$

para todo $x, y \in \mathcal{A}$ y $\lambda \in \mathbb{C}$.

Definición 5.10. Un *homomorfismo entre C*-Álgebras* es un homomorfismo de Álgebras de Banach tal que $\varphi(x^*) = \varphi(x)^*$ donde φ denota al homomorfismo.

Teorema 5.6 (Gelfand-Naimark)**.** Si $\mathcal{A}$ es una C*-álgebra conmutativa, entonces

$$\mathcal{A} \cong C(\operatorname{Sp}\mathcal{A})$$

como un isomorfismo isométrico entre C*-álgebras inducido por la transformada de Gelfand.

5.2. Cuerpos valuados y no-arquimedianos

Hemos mostrado la teoría de Álgebras de Banach. Sin embargo, lo hicimos sobre los números complejos. De manera similar, se puede desarrollar una teoría de Álgebra de Banach para los números reales [Ing64]. Ahora, nos interesa desarrollar una teoría para otros cuerpos valuados completos.

5.2.1. Valuaciones

Definición 5.11 (Valuación trivial)**.** Sea k un cuerpo. La *valuación trivial* $|\cdot|_0$ es aquella que

$$|0|_0 = 0 \quad , \quad |x|_0 = 1 \qquad \forall x \in k \setminus \{0\}$$

Definición 5.12 (Valuaciones $|\cdot|_\infty^\varepsilon$)**.** Para $0 < \varepsilon \leq 1$, se define $|\cdot|_\infty^\varepsilon$ como la valuación sobre $K = \mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ definida como

$$|x|_\infty^\varepsilon = (|x|_\infty)^\varepsilon \qquad \forall x \in K$$

donde $|\cdot|_\infty$ es el valor absoluto.

Proposición 5.10. Las valuaciones $|\cdot|_\infty^\varepsilon$ son arquimedianas.

Ejemplo 5.2. (Números reales). $\mathbb{R}$ es la completación de $\mathbb{Q}$ con respecto a $|\cdot|_\infty$.

Definición 5.13 (Valuaciones p-ádicas)**.** Sea p un numero primo y $0 < c < 1$ (por defecto, $c = \frac{1}{p}$). En $\mathbb{Q}$, la *valuación p-ádica* $|\cdot|_{p,c}$ se define para $x \in \mathbb{Q}$ como

$$|x|_{p,c} = c^n$$

donde $n \in \mathbb{Z}$ esta únicamente determinado por la factorización $x = p^n \frac{a}{b}$ con $a, b \in \mathbb{Z} : b \neq 0$ tales que p no divide a a ni a b.

Proposición 5.11. Las valuaciones p-ádicas son no-arquimedianas.

Ejemplo 5.3 (Números p-ádicos)**.** Los numeros p-ádicos $\mathbb{Q}_p$ son la completación de $\mathbb{Q}$ con respecto a alguna valuación p-ádica.

Teorema 5.7 (Teorema de Ostrowski)**.** Las únicas valuaciones sobre $\mathbb{Q}$ son

$$|\cdot|_\infty^\varepsilon, \quad |\cdot|_{p,c} \quad \text{y} \quad |\cdot|_0$$

para todo $0 < \varepsilon \leq 1$, $0 < c < 1$ y p número primo.

5.2.2. Cuerpos no-arquimedianos

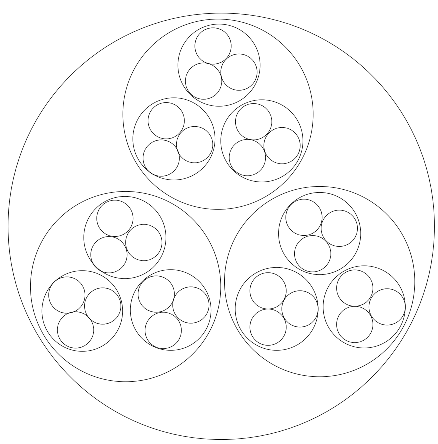
Teorema 5.8. Sea $(k, |\cdot|)$ un cuerpo valuado no arquimediano. Si $x \in k$ y $r > 0$, entonces

$$B(x,r) = B(y,r) \iff y \in B(x,r)$$

Corolario 5.8.1. Si $x, y \in k$, $r_x, r_y > 0$, entonces

$$B(x,r_x) \subseteq B(y,r_y) \quad \vee \quad B(x,r_x) \subseteq B(y,r_y) \quad \vee \quad B(x,r_x) \cap B(y,r_y) = \emptyset$$

Visualmente:



Corolario 5.8.2. La topología inducida en k es totalmente disconexa.

5.3. Introducción a los espacios de Berkovich

Sea $(k, |\cdot|)$ un cuerpo valuado. Recordemos que, en geometría algebraica, definimos el *espacio afín* $\mathbb{A}_k^n$ y lo dotamos de la topología de Zariski. De la misma manera, podemos tratar de definir el espacio de las funciones considerando que son localmente analíticas. El problema es que heredarán las propiedades topológicas de k^n. En el caso de cuerpos no-arquimedianos, la topología sería totalmente disconexa y no daría un *"buen espacio"*.

Para ello, podemos pensar en el dibujo anterior y tratar de añadir más bolas para volverlo conexo. De manera inocente, podemos añadir las contracciones de las bolas, es decir, añadir las generadas por $r|\cdot|$ donde $r \leq 1$ para que esten acotadas por $|\cdot|$. Esto nos conducirá naturalmente a considerar añadir las bolas de toda otra seminorma que sea acotada por $|\cdot|$.

Finalmente, con esto, podremos recuperar la noción de espacio.

Definición 5.14 (Espacio afín de Berkovich)**.** Sea $(k, |\cdot|)$ un cuerpo valuado. El *espacio afín de Berkovich* se define como

$$\mathbb{A}_k^{n,\mathrm{an}} := \{|\cdot|_x \text{ seminorma multiplicativa para } \mathbb{A}_k^n : |a|_x = |a| \quad \forall a \in k\}$$

donde *an* hace alusión a *analitificación*.

Dotamos a $\mathbb{A}_k^{n,\mathrm{an}}$ *con la topología más débil que hace continuas a sus elementos.*

Teorema 5.9. $\mathbb{A}_k^{n,\mathrm{an}}$ es un espacio topológico localmente compacto, Hausdorff y conexo por caminos.

Teorema 5.10. Considerando $(\mathbb{C}, |\cdot|_\infty)$ como el cuerpo valuado,

$$\mathbb{A}_{\mathbb{C}}^{n,\mathrm{an}} \cong \mathbb{C}^n$$

Observación: Recuperamos los espacios afines.

Demostración. Usar el teorema de Gelfand-Mazur. □

Definición 5.15 (Recta afín de Berkovich)**.** Sea $(k, |\cdot|)$ un cuerpo valuado. La *recta afín de Berkovich* se define como $\mathbb{A}_k^{1,\mathrm{an}}$.

Lema 5.1 (Lema de Fekete)**.** Sea $(\mathcal{A}, \|\cdot\|)$ un anillo de Banach. Para todo $x \in \mathcal{A}$, el siguiente límite existe:

$$\rho(x) := \lim_{n\to\infty} \|x^n\|^{1/n} = \inf_{n\in\mathbb{N}} \|x^n\|^{1/n}$$

Definición 5.16. Sea $\mathcal{A}$ un anillo de Banach y $\|\cdot\|$ su norma. Se define para $x \in \mathcal{A}$ el *radio espectral* como

$$\rho(x) := \lim_{n\to\infty} \|x^n\|^{1/n}$$

Proposición 5.12. Sea $(\mathcal{A}, \|\cdot\|)$ un anillo de Banach. Para todo $f, g \in \mathcal{A}$,

$$\rho(f^n) = \rho(f)^n$$

$$\rho(f-g) \leq \rho(f) + \rho(g)$$

Si $\mathcal{A}$ es no-arquimidiano,

$$\rho(f-g) \leq \text{máx}\{\rho(f), \rho(g)\}$$

Por lo tanto, ρ es una seminorma.

Definición 5.17. Sea $\mathcal{A}$ un anillo de Banach. Se define $\mathcal{A}^u$ como la *unifomalización* de A esta es la completación de $\mathcal{A}$ con respecto a la seminorma ρ.

Definición 5.18 (Espectro de Berkovich)**.** Sea $(\mathcal{A}, \|\cdot\|)$ un anillo de Banach. Se define el *espectro de Berkovich* del anillo como

$$\mathcal{M}(\mathcal{A}) := \{|\cdot| \text{ seminorma multiplicativa para } \mathcal{A} : |f| \leq \|f\| \quad \forall f \in \mathcal{A}\}$$

Lo dotamos de la topología más débil que hace continua a sus elementos. Esta topología es la topología de Berkovich.

Sea $x \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$ denotaremos por $|\cdot|_x$ a la seminorma correspondiente.

Para $f \in \mathcal{A}$, denotaremos por $|f(x)|$ a $|f|_x$.

Nota: más adelante veremos que esa notación es porque las seminormas de la forma $|f|_a := |f(a)|$ *con* a *un punto son densas.*

Proposición 5.13. Sea $\mathcal{A}$ es un anillo de Banach. Si $\mathcal{A} = \{0\}$, entonces $\mathcal{M}(\mathcal{A}) = \emptyset$.

Teorema 5.11. Sea $\mathcal{A}$ es un anillo de Banach. Si $\mathcal{A} \neq \{0\}$, entonces $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ es un espacio topológico no vacío, compacto y Hausdorff.

Proposición 5.14. Si $\mathcal{A}$ es un cuerpo valuado, entonces el espectro es un punto, es decir, $\mathcal{M}(\mathcal{A}) = \{pt\}$.

Demostración. Usar que la valuación es multiplicativa. □

Definición 5.19. Sea $\mathcal{A}$ es un anillo de Banach. Sea $x \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$. Definimos

$$\mathfrak{p}_x := \ker(|\cdot|_x) := \{f \in \mathcal{A} : |f(x)| = 0\}$$

$$\mathcal{K}(x) := \text{Frac}(\mathcal{A}/\mathfrak{p}_x)$$

$$\mathcal{H}(x) := \text{La completación de } \mathcal{K}(x) \text{ con respecto a } |\cdot|_x$$

Obtenemos el homomorfismo $\mathcal{A} \to \mathcal{H}(x)$ y denotamos a la imagen de f por $f(x)$. Así, el homomorfismo es $\mathcal{A} \to \mathcal{H}(x) : f \mapsto f(x)$.

Definición 5.20 (Transformada de Gelfand)**.** Se define la *transformada de Gelfand* como la función $\mathcal{A} \to \prod_{x\in\mathcal{M}(\mathcal{A})} \mathcal{H}(x)$ definida por

$$f \mapsto (f(x))_{x\in\mathcal{M}(\mathcal{A})}$$

Dotamos a $\prod_{x\in\mathcal{M}(\mathcal{A})} \mathcal{H}(x)$ con la norma del supremo:

$$\|(f(x))_{x\in\mathcal{M}(\mathcal{A})}\| := \sup_{x\in\mathcal{M}(\mathcal{A})} |f(x)|$$

Notar que el supremo existe pues cada seminorma esta acotada.

Teorema 5.12. Si $\mathcal{A}$ es un *Álgebra de Banach*, entonces tenemos la biyección:

$$\operatorname{Sp}\mathcal{A} \xrightarrow{\sim} \mathcal{M}(\mathcal{A})$$

Teorema 5.13. Sea $\mathcal{A}$ un anillo de Banach. Si $f \in \mathcal{A}$, entonces

$$\rho(f) = \max_{x\in\mathcal{M}(\mathcal{A})} |f(x)|$$

Definición 5.21 (Disco general)**.** Sea $(k, |\cdot|)$ un cuerpo valuado y $r > 0$. Definimos el *disco general* como

$$k\langle r^{-1}T\rangle := \left\{ f = \sum_{n=0}^{\infty} a_n T^n \;\middle|\; a_n \in k,\ \|f\| := \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| r^n < \infty \right\}$$

Lo equipamos con aquella norma $\|\cdot\|$.

Proposición 5.15. Cuando $(k, |\cdot|)$ es un cuerpo no-arquimediano,

- $\rho(f) = \max_{n\in\mathbb{N}} |a_n| r^n$ para todo $f \in k\langle r^{-1}T\rangle$.
- La uniformalización de $\mathcal{A} = k\langle r^{-1}T\rangle$ es

$$\mathcal{A}^u = k\{r^{-1}T\} := \left\{ f = \sum_{n=0}^{\infty} a_n T^n \;\middle|\; a_n \in k,\ \lim_{n\to\infty} |a_n| r^n = 0 \right\}$$

  y esta equipada naturalmente con la norma $\|f\| = \rho(f) = \max_{n\in\mathbb{N}} |a_n| r^n$.

Lema 5.2 (Lemma de Gauss)**.** Sea k un cuerpo no-arquimediano completo. La norma $\|\cdot\|$ de $k\{r^{-1}T\}$ es multiplicativa.

Definición 5.22 (Disco cerrado rígido)**.** Sea $(k, |\cdot|)$ un cuerpo no-arquimediano completo. Definimos el *disco cerrado rígido* de radio r como

$$\overline{D}(r) = \{a \in k \mid |a| \leq r\}$$

Definición 5.23 (Disco cerrado de Berkovich)**.** Sea k un cuerpo no-arquimediano completo. Definimos el *disco cerrado de Berkovich* de radio r como

$$E(r) := \mathcal{M}(k\{r^{-1}T\})$$

Definición 5.24. La *inclusión* $\overline{D}(r) \to E(r)$ esta dada por $a \in \overline{D}(r) \mapsto |\cdot|_a$ donde $|f|_a := |f(a)|$. *Notar que son seminormas y su kernel es* $T - a$.

Definición 5.25 (Puntos tipo I)**.** Los puntos en la imagen de $\overline{D}(r) \to E(r)$ se llamarán *puntos tipo I*.

Proposición 5.16.

- La *inclusión* $\overline{D}(r) \to E(r)$ es un homomorfismo y su imagen es densa.
- $E(r)$ es conexo por caminos.

Definición 5.26 (Discos)**.** Sea $a \in \overline{D}(r)$ y $0 \leq \rho \leq r$. Se definen

$$\overline{D}(a, \rho) := \{b \in k : |b - a| \leq \rho\}$$
$$E(a, \rho) := \{x \in E(r) : |(T - a)(x)| \leq \rho\}$$

Definición 5.27 (Polidisco)**.** Sea k un cuerpo no-arquimediano completo y r un poliradio, es decir, $r = (r_1, ..., r_n) \in \mathbb{R}^n_+$. Se define el *polidisco con poliradio* r como

$$k\{r^{-1}T\} := k\{r_1 T_1, ..., r_n T_n\} := \left\{ f = \sum_{\nu=(\nu_1,...,\nu_n)\in(\mathbb{N}\cup\{0\})^n} a_\nu T_1^{\nu_1} \cdots T_n^{\nu_n} \;\middle|\; a_\nu \in k,\ \lim_{|\nu|\to\infty} |a_\nu| r_1^{\nu_1} \cdots r_n^{\nu_n} = 0 \right\}$$

donde $|\nu| = \nu_1 + ... + \nu_n$.

Definición 5.28 (Álgebras k-afinoides)**.** Una *álgebra k-afinoide* $\mathcal{A}$ es una k-Álgebra de Banach tal que existe un homomorfismo admisible desde $k\{r^{-1}T\} \to$ para algún poliradio r.

Definición 5.29 (Espacios k-afinoides)**.** Diremos que X es *espacio k-afinoide* si $X = \mathcal{M}(\mathcal{A})$ con $\mathcal{A}$ una álgebra k-afinoide.

Definición 5.30 (homomorfismo entre espacios k-afinoides)**.** Un homomorfismo $\varphi : \mathcal{M}(\mathcal{A}) \to \mathcal{M}(\mathcal{B})$ entre espacios k-afinoides es un homomorfismo inducido por un homomorfismo entre las Álgebras de Banach $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$.

Observación: No definiremos el haz estructural de espacios k-afinoides, sino que daremos una noción. Esto pues se necesitaría definir una noción de abiertos compatibles.

Definición 5.31 (Haz estructural de espacios k-afinoides)**.** Sea $X = \mathcal{M}(\mathcal{A})$ un espacio k-afinoide. El haz $\mathcal{O}_X$ en un abierto $\mathcal{U} \subseteq X$ puede verse como funciónes

$$f : \mathcal{U} \to \coprod_{x\in\mathcal{U}} \mathcal{H}(x)$$
$$x \mapsto (f(x))_{x\in\mathcal{U}}$$

De la misma manera, que un haz puede verse como funciones continuas al espacio étale.

Definición 5.32 (Espacio de Berkovich)**.** Un espacio de Berkovich es un espacio anillado $(X, \mathcal{O}_X)$ que es localmente isomorfo a un espacio k-afinoide.

Referencias

[Ber09] Vladimir G. Berkovich. Non-archimedean Analytic Spaces, 2009. *http://www.wisdom.weizmann.ac.il/~vova/Trieste_2009.pdf*.

[DFN15] Antoine Ducros, Charles Favre, and Johannes Nicaise, editors. *Berkovich Spaces and Applications*. Springer International Publishing, 2015. doi:10.1007/978-3-319-11029-5.

[Ing64] Lars Ingelstam. Real banach algebras. *Arkiv för Matematik*, 5(3-4):239–270, May 1964. doi:10.1007/bf02591126. https://projecteuclid.org/euclid.afm/1485893446.

[Jon16] Mattias Jonsson. Math 731: Topics in Algebraic Geometry I Berkovich Spaces, 2016. *https://web.math.princeton.edu/~takumim/Berkovich.pdf*.

[Ron19] Piero Visconti Roncagliolo. Álgebras de Banach y Teoría Espectral, 2019.

[Wil09] Ivan Francis Wilde. C*-algebras Notes, 2009. *https://web.archive.org/web/20160603090657/http://homepage.ntlworld.com/ivan.wilde/notes/calg/index.html*.