ANÁLISIS MICROLOCAL
UNA BREVE REVISIÓN

CRISTÓBAL LOYOLA

Resumen. Este documento pretende ser una muestra superficial sobre lo que se conoce como Análisis Microlocal, no sólo desde un punto de vista algebráico, sino que también desde el análisis, motivado por las diversas aplicaciones que esta área ha alcanzado en los últimos años tanto en matemática como en física. Dicha presentación no es disjunta, pues las ideas provenientes desde ambas áreas ven su punto común desde la teoría de haces, lo cual enriquece la presentación del tópico, dejando además entrever la potencia de esta teoría.

1. Introducción

El análisis microlocal es el análisis local en el fibrado cotangente. Una parte importante del progreso que se ha hecho en teoría de ecuaciones diferenciales parciales, se debe a la aplicación de la idea de microlocalización. Ciertamente existe una motivación física en lo anterior, debido a que gran parte de los conceptos centrales mecánica analítica, tales como sistemas Hamiltonianos, variedades Lagrangianas, transformaciones canónicas, etc. son también los conceptos naturales bajo los cuales, por ejemplo, se describe la evolución de las singularidades de soluciones de ecuaciones diferenciales. Asímismo, conceptos tales como el de operador pseudo-diferencial aparece de manera natural bajo la acción de transformaciones canónicas en ecuaciones diferenciales que modelan un determinado proceso.

A continuación mencionaremos dos lugares donde el espacio cotangente adquiere gran importancia en el estudio de ecuaciones diferenciales y funciones (generalizadas).

1.1. Resolución de ecuaciones diferenciales. Consideremos la ecuación $P(x,\partial)u(x)=0$ donde P es un operador diferencial. Al tratar de solucionar dicha ecuación, si suponemos que u es singular a lo largo de la hipersuperficie $f(x)=0$, entonces la forma más simple de u es

$$u(x)=c_0(x)f(x)^s+c_1(x)f(x)^{s+1}+...$$

Entonces si $p_m(x,\xi)=\sum_{|\alpha|=m}a_\alpha(x)\xi^\alpha$, al reemplazar en $Pu=0$ se ve que p_m debe ser un múltiplo de $f(x)$ (es decir, $P_m(x,df)=0$ sobre $f^{-1}(0)$). En este caso $f^{-1}(0)$ se conoce como la característica. La hipersuperficie $f^{-1}(0)$ no es arbitraria y la singularidad de la solución de $Pu=0$ tiene una forma definida.

Si $p_m(x,\xi)\neq 0$ para todo $\xi\neq 0$, entonces P se dice elíptico. En este caso podemos resolver la ecuación $P(x,\partial)u(x)=f(x)$ al menos localmente. A partir de la descomposición en ondas planas de la delta de Dirac, es posible construir un kernel (singular en la diagonal) $\mathcal{K}=\mathcal{K}(x,y)$ tal que

$$P(x,\partial)\mathcal{K}(x,y)=\delta(x-y).$$

Si $u(x)=\int\mathcal{K}(x,y)f(y)dy$ entonces u satisface la ecuación inicial, pues

$$P(x,\partial)u(x)=\int P(x,\partial)\mathcal{K}(x,y)f(y)dy=\int\delta(x-y)f(y)dy=f(x).$$

Date: 28 de noviembre de 2020.
Key words and phrases. MAT426 Curvas Algebraicas 2020-S2, Universidad Técnica Federico Santa María.

Con esta motivación, Mikio Sato reconoce de manera explícita la importancia del fibrado cotangente en el estudio de ecuaciones diferenciales parciales, introduciendo el espectro singular de funciones y microfunciones. Si M es una variedad real analítica, sea $\mathscr{A}_M$ el haz de funciones reales analíticas y $\mathscr{B}_M$ el haz de hiperfunciones. Sea $\pi : T^*M \to M$ el fibrado cotangente de M. Entonces Sato construyó el haz $\mathscr{C}_M$ de microfunciones y la sucesión exacta

$$0 \to \mathscr{A}_M \to \mathscr{B}_M \xrightarrow{sp} \pi_*\mathscr{C}_M \to 0.$$

La acción del operador diferencial $P(x, \partial)$ sobre $\mathscr{B}_M$ se extiende a una acción sobre $\mathscr{C}_M$.

Más aún, $P : \mathscr{C}_M \to \mathscr{C}_M$ es un isomorfismo fuera del conjunto

$$\{(x, \xi) \in T^*M : P_m(x, \xi) = 0\}.$$

En la situación anterior $u(x) = c_0(x)f(x)^s + ...$ satisface $\operatorname{supp}\operatorname{sp}(u(x)) = \{\pm df(x)\}$. Entonces $P_m(x, df)$ es cero cuando $P(x, \partial(u(x)) = 0$. En otro caso, la biyectividad de $P : \mathscr{C}_M \to \mathscr{C}_M$ implica $\operatorname{sp}(u) = 0$.

1.2. Una idea sobre la propagación de singularidades. Uno de los tantos problemas importantes en la teoría de ecuaciones diferenciales es la que aborda el estudio de las singularidades que poseen las soluciones. Parte de la motivación de su estudio, es que las singularidades reflejan fenómenos de importancia desde una perspectiva física de dichos procesos, por ejemplo, las soluciones de las ecuaciones de campo de Einstein corresponden a métricas en el espacio tiempo, y las singularidades de dichas métricas (bajo ciertas condiciones) pueden reflejar la existencia de agujeros negros.

Para estudiar dichos procesos físicos, la idea es introducir un principio más general que el principio de *localidad*, el cual se denomina como principio de *microlocalidad*. Es de interés estudiar el proceso en una región acotada del espacio de fase, pues al conocer el estado del proceso en un determinado momento, es posible describir la propagación de dicho proceso en una región acotada, pero más pequeña que la región inicial en la que el fenómeno toma lugar. Estos procesos no se ven afectados por lo que ocurra fuera de la región inicial debido a que el proceso se propaga con velocidad finita.

La definición de que una propiedad sea *local*, requiere que esta sea examinada a través de funciones regulares, por lo cual el lugar natural de estudio en un principio es el espacio de las distribuciones. Para entender un poco la idea de la microlocalización, consideramos el siguiente ejemplo. Sea f una función definida sobre $\mathbb{R}^n$ con $n \geq 2$ por $f(x) = g(\alpha \cdot x)$ donde α es un vector no nulo y g es una función de una única variable. Si $g = g(t)$ tiene una singularidad, e.g. g no es diferenciable en $t = t_0$, entonces todo x tal que $\alpha \cdot x = t_0$ son puntos singulares de f. Sin embargo, f es regular en cada dirección del plano, por lo cual la singularidad solo estará en la dirección de α. Utilizando la transformada de Radón, es un hecho que podemos representar una distribución $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ como una integral de ondas planas

$$f(x) = \int_{|x|=1} g_\alpha(\alpha \cdot x) d\alpha.$$

Entonces en cada punto x las direcciones α serán singulares donde la distribución $g_\alpha(t)$ tenga una singularidad en el punto $t = \alpha \cdot x$. Si, en vez de esta representación aplicamos transformada de Fourier, f puede ser escrita como una integral de ondas planas

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} g(\alpha) e^{i\alpha \cdot x} d\alpha.$$

Ahora, aquellas direcciones de α singulares para f son tales que $g(t\alpha)$ no decrece suficientemente rápido cuando $t \to \infty$.

1.3. Organización del documento. En la primera sección nos centraremos en definir y desarrollar algunas de las propiedades de los *Operadores microdiferenciales*, donde la principal referencia es Masaki Kashiwara [3]. En la segunda sección desarrollamos los conceptos principales en lo que respecta a las propiedades microlocales de las distribuciones, donde la principal referencia es Yuri Egorov [5]. Por último, damos una mirada desde la Teoría de Categorías al concepto de microlocalización, donde la principal referencia es Pierre Schapira [6].

2. Operadores microdiferenciales

2.1. Sistema de ecuaciones diferenciales. Sea X una variedad compleja. Un sistema de ecuaciones diferenciales puede ser escrito de la forma

$$\sum_{j=1}^{n} P_{ij}(x,\partial)u_j = 0,\ i = 1, ..., m. \tag{1}$$

donde $u_1, ..., u_n$ denotan las funciones incógnitas y $P_{ij}(x,\partial)$ son los operadores diferenciales sobre X. Las soluciones de (1) se pueden interpretar como el kernel del homomorfismo[1]

$$\begin{array}{cccc} P: & \mathscr{O}_X^n & \longrightarrow & \mathscr{O}_X^m, \\ & (u_1, ..., u_n) & \longmapsto & (v_1, ..., v_m), \end{array}$$

donde $v_i = \sum_j P_{ij}(x,\partial)u_j$. Denotar por $\mathscr{D}_X$ el anillo de operadores diferenciales cuyos coeficientes son holomorfos. Entonces

$$\begin{array}{cccc} P: & \mathscr{D}_X^m & \longrightarrow & \mathscr{D}_X^n, \\ & (q_1, ..., q_m) & \longmapsto & (p_1, ..., p_n), \end{array}$$

donde $p_j = \sum_i q_i P_{ij}$, es un homomorfismo por izquierda $\mathcal{D}_X$-lineal. Si denotamos por $\mathscr{M}$ el cokernel de P, entonces $\mathscr{M}$ es un $\mathcal{D}_X$-módulo por izquierda y $Hom_{\mathscr{D}_X}(\mathscr{M}, \mathcal{O}_X)$ es el kernel de $P : \mathcal{O}_X^n \to \mathcal{O}_X^m$ y por tanto el conjunto solución de $Pu = 0$ depende sólo de $\mathscr{M}$.

Por esta razón se dice que un sistema de ecuaciones diferenciales es un $\mathscr{D}_X$-módulo por la izquierda.

2.2. Operadores diferenciales. Sea $(x_1, ..., x_n)$ un sistema de coordenadas locales de X. Un operador diferencial P puede ser escrito en la forma

$$P(x,\partial) = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n} a_\alpha(a)\partial^\alpha, \tag{2}$$

donde $\partial^\alpha = \partial_{x_1}^{\alpha_1}...\partial_{x_n}^{\alpha_n}$, $|\alpha| = \alpha_1 + ... + \alpha_n$ y cada $a_\alpha(x)$ es una función holomorfa. Para $j \in \mathbb{N}$ denotamos por

$$p_j(x,\xi) = \sum_{|\alpha|=j} a_\alpha(x)\xi^\alpha$$

donde $\xi^\alpha = \xi_1^{\alpha_1}...\xi_n^{\alpha_n}$ y el conjunto $\{p_j(x,\xi)\}_j$ se denomina el símbolo total de P. El entero más grande m tal que $p_m \neq 0$ es llamado el orden de P y p_m corresponde al símbolo principal de P, denotado por $\sigma(P)$. Escribiremos en algunas ocasiones $P = \sum_j p_j(x,\partial)$.

[1] $\mathscr{O}_X$ es el haz de funciones holomorfas en X.

2.2.1. El operador diferencial y su relación con el fibrado cotangente. Sea M una variedad real analítica y X su complexificación como variedad $n-$dimensional.

Ejemplo 1. Considerar $M = \mathbb{R}^n \hookrightarrow X = \mathbb{C}^n$.

Denotamos por T^*X el fibrado cotangente de X y el sistema de coordenadas asociado por

$$(x, \xi) = (x_1, ..., x_n, \xi_1, ..., \xi_n)$$

Sea P un operador diferencial en X. Cuando $\sigma(P)(x, \xi) \neq 0$ para $(x, \xi) \in \mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$, decimos que P es un operador diferencial elíptico.

Observación 2. Si consideramos $\sigma(P)$ como una función en T^*X, ésta no depende de la elección de coordenadas locales $(x_1, ..., x_n)$.

Antes de enunciar el resultado que nos permitirá establecer cómo se relacionan P y T^*X, requerimos construir un espacio de funciones generalizadas, conocidas como *hiperfunciones*. Primero, sea Ω es un intervalo abierto de $\mathbb{R}$ y V una vecindad abierta de Ω en el plano complejo $\mathbb{C}$ tal que $V \cap \mathbb{R} = \Omega$. El espacio de hiperfunciones $\mathscr{B}(\Omega)$ viene dado por

$$\mathscr{B}(\Omega) = \mathscr{O}(V \setminus \Omega)/\mathscr{O}(V).$$

Es decir, una hiperfunción en Ω es una función holomorfa en $V \setminus \Omega$, y que se considera 0 si se extiende a todo V. Se puede ver que la definición de este espacio sólo depende de Ω y no de V. Más aún, la correspondencia $I \mapsto \mathscr{B}(I)$ donde I es un abierto de Ω define un haz blando en Ω.

Ejemplo 3. Informalmente la delta de Dirac en 0 es el valor frontera de $\frac{1}{2\pi i}1/z$. En efecto, si φ es continua en $\mathbb{R}$ se tiene

$$\varphi(0) = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{\varphi(x)}{x - i\varepsilon} - \frac{\varphi(x)}{x + i\varepsilon} \right) dx,$$

y podemos escribir formalmente

$$\delta(0) = \frac{1}{2\pi i} \left(\frac{1}{x - i0} - \frac{1}{x + i0} \right).$$

Eso quiere decir que toda distribución u con soporte compacto $K \subset \mathbb{R}$ es el valor frontera de la función $u * \left(\frac{1}{2\pi i}1/z\right)$ holomorfa en $\mathbb{C} \setminus K$ y que toda distribución en $\mathbb{R}$ es el valor frontera de una función holomorfa en $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Sin embargo, existe una función holomorfa en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ que no tiene valor frontera como distribución, tal como $\exp(1/z)$ en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Con la idea anterior en mente, a pesar de que no es posible definir las hiperfunciones para el caso general de la misma forma, utilizando cohomología local, Mikio Sato definió el haz $\mathscr{B}_M$ como

$$\mathscr{B}_M = H^n_X(\mathscr{O}_X) \otimes \mathrm{or}_M,$$

luego de probar que los grupos $H^j_M(\mathscr{O}_X)$ son 0 para $j \neq n$, donde or_M es el haz orientación en M. Por otro lado, el haz de funciones reales analíticas se define por

$$\mathscr{A}_M = \mathbb{C}_M \otimes \mathscr{O}_X.$$

Por último, es de importancia mencionar que el haz de distribuciones $\mathscr{D}b$ está contenido en el haz de hiperfunciones $\mathscr{B}$.

Proposición 4. *Si u es una hiperfunción (o distribución) en M y Pu es real analítica, entonces u es real analítica. Más precisamente, $P : \mathscr{B}_M/\mathscr{A}_M \to \mathscr{B}_M/\mathscr{A}_M$ (resp. $P : \mathscr{D}b_M/\mathscr{A}_M \to \mathscr{D}b_M/\mathscr{A}_M$) es un isomorfismo de haces.*

Este resultado sugiere que si $\sigma(P)(x,\xi) \neq 0$, es posible considerar la inversa P^{-1} en algún sentido y puesto que (x,ξ) es un punto en el fibrado cotangente, P^{-1} se alcanza en fibrado cotangente.

De hecho, como veremos luego, podemos construir un haz de anilos $\mathscr{E}_X$ en T^*X tal que $\mathscr{D}_X \subset \pi_*\mathscr{E}_X$, donde π_X es la proyección canónica $T^*X \to X$. Más aún, si $P \in \mathscr{D}_X$ es elíptico en $(x,\xi) \in T^*X$, entonces P^{-1} existe como sección de $\mathscr{E}_X$ en una vecindad de (x,ξ).

2.2.2. Álgebra de operadores diferenciales. Sea $Q = \sum q_j(x,\partial)$ otro operador diferencial. Si $S = P+Q$ y $R = PQ$, entonces los símbolos totales respectivos $\{s_j\}$ y $\{r_j\}$ son

$$s_j = p_j + q_j \tag{3}$$

$$r_j = \sum_{\substack{l=j+k-|\alpha| \\ |\alpha|\in\mathbb{N}^n}} \frac{1}{\alpha!}\left(\partial_\xi^\alpha p_j\right)\left(\partial_x^\alpha q_k\right) \tag{4}$$

donde $\partial_\xi^\alpha = \partial_{\xi_1}^{\alpha_1}...\partial_{\xi_n}^{\alpha_n}$ y $\partial_x^\alpha = \partial_{x_1}^{\alpha_1}...\partial_{x_n}^{\alpha_n}$.

El símbolo total $\{p_j(x,\xi)\}$ de un operador diferencial P se comporta de la siguiente forma bajo transformaciones de coordenadas. Sean $(x_1,...,x_n)$ y $(\widetilde{x}_1,...,\widetilde{x}_n)$ dos sistemas de coordenadas en X, y sean $(\xi_1,...,\xi_n)$ y $(\widetilde{\xi}_1,...,\widetilde{\xi}_n)$

$$\xi_k = \sum_j \widetilde{\xi}_j \frac{\partial \widetilde{x}_j}{\partial x_k},$$

es decir, $(x_1,...,x_n,\xi_1,...,\xi_n)$ y $(\widetilde{x}_1,...,\widetilde{x}_n,\widetilde{\xi}_1,...,\widetilde{\xi}_n)$ son los sistemas de coordenadas del fibrado cotangente T^*X. Si $\{\widetilde{p}_k(\widetilde{x},\widetilde{\xi})\}$ es el símbolo total de P en el sistema de coordenadas $(\widetilde{x}_1,...,\widetilde{x}_n)$, entonces

$$\widetilde{p}_k(\widetilde{x},\widetilde{\xi}) = \sum_{v,\alpha_1,...,\alpha_v} \frac{1}{v!\alpha_1!...\alpha_v!}\langle\widetilde{\xi},\partial_x^{\alpha_1}\widetilde{x}\rangle...\langle\widetilde{\xi},\partial_x^{\alpha_v}\widetilde{x}\rangle\partial_\xi^{\alpha_1+...+\alpha_v}p_j(x,\xi), \tag{5}$$

donde los índices corren sobre $j \in \mathbb{Z}$, $v \in \mathbb{N}$, $\alpha_1,...,\alpha_v \in \mathbb{N}^n$ tal que $|\alpha_1|,...,|\alpha_v| \geq 2$ y $k = j+v-|\alpha_1|-...-|\alpha_v|$. Para $\beta \in \mathbb{N}^n$ la expresión $\langle\widetilde{\xi},\partial_x^\beta\widetilde{x}\rangle$ denota $\sum_j \widetilde{\xi}_j\partial^\beta\widetilde{x}_j$.

2.3. Operadores microdiferenciales. El símbolo total $\{p_j(x,\xi)\}$ de un operador diferencial es un polinomio en la variable ξ. Definiremos operadores microdiferenciales bajo el supuesto de que p_j es holomorfa en ξ. Para $\lambda \in \mathbb{C}$ sea $\mathscr{O}_{T^*X}(\lambda)$ el haz de funciones holomorfas de grado λ en T^*X, es decir, funciones holomorfas en $f(x,\xi)$ satisfaciendo

$$\sum_j \xi_j\partial_{\xi_j}f(x,\xi) = \lambda f(x,\xi).$$

Definición 5. Para $\lambda \in \mathbb{C}$ definimos el haz de *operadores microdiferenciales* $\mathscr{E}_X(\lambda)$ en T^*X tal que

$$\Omega \longmapsto \{(p_{\lambda-j}(x,\xi))_{j\in\mathbb{N}} : p_{\lambda-j} \in \Gamma(\Omega,\mathcal{O}_{T^*X}(\lambda-j)) \text{ y satisface (6)}\}$$

donde se tiene la condición de crecimiento

$$\text{para todo compacto } K \subset \Omega, \text{ existe } C_K > 0 \text{ tal que } \sup_K |p_{\lambda-j}| \leq C_K^{-j}j!,\ \forall j > 0. \tag{6}$$

Observación 6. La condición de crecimiento (6) asegura una buena convergencia del operador microdiferencial asociado al símbolo.

Se tienen las siguientes propiedades para el haz $\mathscr{E}_X(\lambda)$.

Proposición 7. *1. $\mathscr{E}_X(\lambda)$ contiene $\mathscr{E}_X(\lambda-m)$ como un subhaz para $m \in \mathbb{N}$.*

2. Pegando las secciones de manera adecuada utilizando la regla de cambio de coordenadas (5), *$\mathscr{E}_X(\lambda)$ es un haz definido globalmente en T^*X.*

3. *A partir de* (3), $\mathscr{E}_X(\lambda)$ *es un haz de* $\mathbb{C}-$*espacios vectoriales en* T^*X.
4. *A partir de* (4), *podemos definir un homorfismo producto*
$$\mathscr{E}_X(\lambda) \otimes_{\mathbb{C}} \mathscr{E}_X(\mu) \to \mathscr{E}_X(\lambda+\mu).$$
Dicho producto es asociativo.
5. *En particular,* $\mathscr{E}_X(0)$ *y* $\mathscr{E}_X = \bigcup_{m\in\mathbb{Z}} \mathscr{E}_X(m)$ *son haces de anillos (no conmutativos) con unidad en* T^*X. *La unidad es dada por el símbolo* $(p_j(x,\xi))$ *con* $p_j = 1$ *para* $j = 0$ *y* $p_j = 0$ *para* $j \neq 0$.

Definimos el homomorfismo
$$\begin{array}{rccc} \sigma_\lambda : & \mathscr{E}_X(\lambda) & \to & \mathscr{O}_{T^*X}(\lambda) \\ & (p_{\lambda-j}) & \mapsto & p_\lambda. \end{array}$$
Entonces σ_λ es un homomorfismo bien definido en T^*X (es decir, compatible con transformaciones de coordenadas) y se tiene la sucesión exacta
$$0 \to \mathscr{E}_X(\lambda-1) \to \mathscr{E}_X(\lambda) \xrightarrow{\sigma_\lambda} \mathscr{O}_{T^*X}(\lambda) \to 0.$$
Ahora tenemos la siguiente proposición, que nos dice que el anillo $\mathscr{E}_X$ es un tipo de localización de $\mathscr{D}_X$.

Proposición 8. 1. *Para* $P \in \mathscr{E}(\lambda)$ *y* $Q \in \mathscr{E}(\mu)$ *se tiene* $\sigma_{\lambda+\mu}(PQ) = \sigma_\lambda(P)\sigma_\mu(Q)$.
2. *Si* $P \in \mathscr{E}(\lambda)$ *satisface* $\sigma_\lambda(P)(q) \neq 0$ *en* $q \in T^*X$, *entonces existe* $Q \in \mathscr{E}(-\lambda)$ *tal que* $PQ = QP = 1$.

Observación 9. En efecto, el segundo inciso de la proposición anterior nos indica que las secciones elípticas tienen inversa.

Las relaciones entre $\mathscr{E}_X$ y $\mathscr{D}_X$ se resumen en el siguiente teorema.

Proposición 10. 1. $\mathscr{E}_X$ *contiene* $\pi^{-1}\mathscr{D}_X$ *como subanillo y es plano sobre* $\pi^{-1}\mathscr{D}_X$.
2. $\mathscr{E}_X\big|_{T^*_XX} \simeq \mathscr{D}_X$ *donde* T^*_XX *es la sección nula de* T^*X.
3. *Para un* $\mathscr{D}_X$*-módulo coherente* $\mathscr{M}$, *la variedad característica de* $\mathscr{M}$ *coincide con el soporte de*
$$\mathscr{E}_X \bigotimes_{\pi_X^{-1}\mathscr{D}_X} \pi_X^{-1}\mathscr{M}.$$

2.3.1. Propiedades algebraicas de $\mathscr{E}$. El anillo $\mathscr{E}$ de operadores microdiferenciales tiene buenas propiedades algebraicas, similares a las del anillo de funciones holomorfas. A continuación recordamos un par de propiedades.

Definición 11. Sea $\mathscr{A}$ un haz de anillos sobre un espacio topológico S.
1. Un $\mathscr{A}$-módulo $\mathscr{M}$ se dice de *tipo finito* (resp. *presentación finita*) si para cada $x \in X$ existe una vecindad abierta U y una sucesión exacta $\mathscr{A}^p|_U \to \mathscr{M}|_U \to 0$ ($\mathscr{A}^q|_U \to \mathscr{A}^p|_U \to \mathscr{M}|_U \to 0$).
2. $\mathscr{M}$ se dice *seudo-coherente* si para cada submódulo de tipo finito definido sobre un abierto es de presentación finita. Si $\mathscr{M}$ es seudo-coherente y de tipo finito, entonces $\mathscr{M}$ es *coherente.*
3. $\mathscr{M}$ se dice *Noetheriano* si
   - $\mathscr{M}$ es coherente.
   - Para cada $x \in X$, $\mathscr{M}_x$ es un $\mathscr{A}_x-$módulo Noetheriano.
   - Para cada abierto U, toda sucesión creciente de submódulos coherentes ($\mathscr{A}|_U$) de $\mathscr{M}|_U$ es localmente estacionario.

Teorema 12. *Sea* ${}^cT^*X$ *el complemento de la sección nula en* T^*X.

1. *$\mathscr{E}_X$ y $\mathscr{E}_X(0)$ son anillo Noetherianos en T^*X.*
2. *$\mathscr{E}_X$ es plano sobre $\pi^{-1}\mathscr{D}_X$.*
3. *$\mathscr{E}_X(\lambda)|_{{}^cT^*X}$ es Noetheriano $\mathscr{E}_X(0)|_{{}^cT^*X}$-módulo.*
4. *Para $p \in T^*X$, $\mathscr{E}_X(0)_p$ es un anillo local con cuerpo residual $\mathbb{C}$.*
5. *Un $\mathscr{E}_X$-módulo coherente es seudo-coherente sobre $\mathscr{E}_X(0)$.*

2.3.2. Referencias. Mayores detalles sobre las propiedades de los operadores microdiferenciales desde la teoría de haces, además de [3] y las referencias que ahí se encuentran, nos referimos también a Björk [4].

2.4. Estructura simpléctica del fibrado cotangente. Debido a que el anillo $\mathscr{E}_X$ es no conmutativo, existen fenómenos que no se tienen en anillos conmutativos, tales como el anillo de funciones holomorfas. Estos fenómenos están relacionados con la estructura simpléctica del fibrado cotangente.

2.4.1. Geometría simpléctica de una variedad. Sea M una variedad $n-$dimensional. Una *1-forma canónica* en T^*M es una sección $\alpha \in C^\infty(T^*M; T^*(T^*M))$ definida por

$$\alpha_{(x,\xi)}(v) = \xi(\pi_* v), (x,\xi) \in T^*M, v \in T_{(x,\xi)}(T^*M),$$

donde $\pi : T^*M \to M$ es la proyección. La *forma canónica simpléctica* en T^*M es

$$\omega := d\alpha \in C^\infty(T^*M; \Lambda^2(T^*M)).$$

En coordenadas locales $x \in \mathbb{R}^n$ y las correspondientes coordenadas $\xi \in \mathbb{R}^n$ sobre las fibras de T^*M, se tiene $\pi_*\big(\sum_k a_k\partial_{x_k} + b_k\partial_{\xi_k}\big) = \sum_k a_k\partial_{x_k}$, por tanto

$$\alpha = \sum_{k=1}^n \xi_k dx_k,\ \omega = \sum_{k=1}^n d\xi_k \wedge dx_k.$$

Esta última es una $2-$forma no degenerada: $v \in T(T^*M) \mapsto v \vdash \omega = \omega(v, -) \in T^*(T^*M)$ es un isomorfismo e identifica tanto campos vectoriales como $1-$formas en T^*M a través de

$$\sum_k a_k\partial_{x_k} + b_k\partial_{\xi_k} \xrightarrow{\vdash} \sum_k b_k\partial_{x_k} - a_k\partial_{\xi_k}.$$

Definición 13. Sea $p \in C^\infty(T^*M)$. El *Hamiltoniano* de p es el único campo vectorial $H_p \in C^\infty(T^*M; T(T^*M))$ tal que

$$H_p \vdash \omega = dp.$$

El *corchete de Poisson* de los campos $f, g \in C^\infty(T^*M)$ se define por

$$\{f, g\} := H_f g = -H_g f.$$

En coordenadas locales se ve que

$$H_f = \sum_{k=1}^n (\partial_{\xi_k} f)\partial_{x_k} - (\partial_{x_k} f)\partial_{\xi_k}.$$

2.4.2. Operadores microdiferenciales y estructura simpléctica. Como habíamos mencionado anteriormente, hay una estrecha relación entre el anillo de operadores diferenciales y la estructura simpléctica de una variedad. El primer resultado que muestra una relación entre ambos es el siguiente.

Proposición 14. *Sean $P \in \mathscr{E}(\lambda)$, $Q \in \mathscr{E}(\mu)$ y su conmutador $[P, Q] \in \mathscr{E}(\lambda + \mu - 1)$. Entonces*

$$\sigma_{\lambda+\mu-1}([P, Q]) = \{\sigma_\lambda(P), \sigma_\mu(Q)\}.$$

Un conjunto analítico $V \subset T^*X$ se dice *involutivo* si $f|_V = g|_V = 0$ implica $\{f, g\}|_V = 0$. El siguiente teorema exhibe un fenómeno que no tiene su análogo en el caso conmutativo.

Teorema 15. *Sea $\mathscr{M}$ un $\mathscr{E}_X$-módulo coherente definido sobre un abierto $\Omega \subset {}^cT^*X$ y sea $\mathscr{L}$ un $\mathscr{E}_X(0)|_\Omega$-módulo que es la unión de $\mathscr{E}_X(0)-$módulos coherentes. Entonces $V = \{p \in \Omega :$ $\mathscr{L}$ no es coherente sobre $\mathscr{E}_X(0)$ para ninguna vecindad de $p\}$ es un subconjunto analítico involutivo de Ω.*

Corolario 16. *Para todo $\mathscr{E}_X-$módulo coherente $\mathscr{M}$, $\operatorname{supp}\mathscr{M}$ es involutivo.*

Dado que todo subconjunto involutivo tiene codimension menor o igual a la dimensión de X, se obtiene el siguiente corolario.

Corolario 17. *El soporte de un $\mathscr{E}_X$-módulo coherente tiene dimensión menor o igual a la dimensión de X.*

Notablemente este último corolario implica el siguiente resultado cohomológico.

Teorema 18. *Para todo $p \in T^*X$, $\mathscr{E}_{X,p}$ tiene dimensión cohomológica global dim(X).*

Un subconjunto analítico $\Lambda \subset T^*X$ se dice *Lagrangiano* si Λ es involutivo y tiene la misma dimensión que X. Un $\mathscr{E}_X-$módulo coherente se dice *holonómico* si su soporte es Lagrangiano.

Observación 19. Es posible también establecer una relación entre la estructura simpléctica de T^*X y operadores microdiferenciales a través de lo que se conoce como *transformaciones cuantizadas.* No ahondaremos en ello.

2.4.3. Motivación física: mecánica analítica. Un sistema de partículas puede ser descrito utilizando coordenadas generalizadas (i.e. posición, velocidad) y su Lagrangiano $\mathcal{L}$. Es posible estudiar el mismo sistema pero sobre el *espacio de fase* (i.e. en el fibrado cotangente) con coordenadas canónicas (i.e. posición, momentum) a través del Hamiltoniano $\mathcal{H}$, donde las coordenadas generalizadas y las coordenadas canónicas se relacionan a través de las ecuaciones de Hamilton-Jacobi. En vista del Teorema de Noether, uno de los objetivos es buscar las cantidades conservadas del sistema, las cuales se pueden obtener a través de las ecuaciones de Euler-Lagrange satisfechas por $\mathcal{L}$. Sin embargo, en muchas ocasiones es más fácil obtener dichas cantidades conservadas a través de las ecuaciones de Hamilton satisfechas por $\mathcal{H}$. Una observación importante, es que, como era de esperar, las formulaciones Lagrangiana y Hamiltoniana de la mecánica son equivalentes (y no únicas).

La formulación Hamiltoniana de la mecánica es generalizada por la geometría simpléctica, que como ha quedado en evidencia, está en estrecha relación con el estudio de ecuaciones diferenciales parciales a través del análisis microlocal. No es de extrañar que muchos de los conceptos definidos anteriormente tengan su análogo en la mecánica analítica. Del mismo modo, dicha generalización es de importancia pues esta idea puede ser aplicada a otras áreas de la física, tales como física de partículas, mecánica cuántica, termodinámica, etc. Una referencia sobre geometría simpléctica y dinámica Hamiltoniana es Hofer & Zehnder [9].

3. Propiedades microlocales de las distribuciones

Una de las principales aplicaciones de la idea de microlocalidad en el contexto de ecuaciones diferenciales parciales es poder estudiar las singularidades de las soluciones. Sin embargo, dependiendo del problema bajo estudio, el referirnos a un punto singular puede tener más de un significado. En el contexto general de distribuciones, la siguiente definición es la más natural.

Definición 20. Un punto x_0 es un punto no singular de la distribución u si existe $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que $\varphi(x_0) \neq 0$ y $\varphi u \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. El conjunto de puntos singulares de una distribución u se conoce como *soporte singular* de u y se denota por sing supp(u).

Observación 21. El soporte singular es un conjunto cerrado e invariante bajo difeomorfismos, luego se puede extender dicha definición a distribuciones sobre variedades diferenciales.

Como es usual denotamos por $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ el espacio de distribuciones y por $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ el espacio de distribuciones a soporte compacto. Por otro lado, para una variedad X denotamos por T^*X el fibrado cotangente y por $T^*X\backslash 0$ el mismo espacio, pero con la sección nula removida. A continuación introducimos el concepto fundamental del análisis microlocal para distribuciones: el frente de onda.

Definición 22. Un punto $(x_0, \xi_0) \in T^*(\mathbb{R}^n) \setminus 0$ no pertenece al *frente de onda* de una distribución $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ si existe una función $\varphi(x_0) \neq 0$ y un cono $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ con vértice en el origen, que contiene en su interior el rayo $\{\xi : \xi = t\xi_0\}_{t>0}$, de modo que se satisface

$$|\widehat{\varphi u}(\xi)| \leq C_N(1+|\xi|)^{-N}, \ \forall \xi \in \Gamma, \ \forall N \in \mathbb{N}.$$

El frente de onda de una distribución u se denota por $\mathrm{WF}(u)$.

Ejemplo 23. Si la distribución u es una onda plana, es decir, $u(x) = g(\alpha \cdot x)$, con α un vector no nulo y $g \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$, entonces toda dirección ξ_0 no colineal con α, es no singular para u. Es decir $\mathrm{WF}(u)$ sólo puede contener puntos (x_0, ξ_0) tales que $\xi_0 = t\alpha$ con $t \in \mathbb{R}$ no nulo y $\alpha \cdot x_0 \in \operatorname{sing\,supp}(g)$.

3.1. Localización del frente de onda. Se pueden establecer las siguientes propiedades del frente de onda.

1. Si $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ y $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, entonces
$$\mathrm{WF}(\varphi u) \subset \mathrm{WF}(u).$$
2. Si $\pi : T^*(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}^n$ es la proyección natural, entonces $\pi \mathrm{WF}(u) = \operatorname{sing\,supp}(u)$ para cada $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$.

3.2. Frente de ondas y operaciones en distribuciones.

3.2.1. Frente de onda de la solución de una EDP. Dado un operador diferencial P con coeficientes regulares, se define el conjunto característico de P como

$$\mathrm{char}(P) = \{(x, \xi) \in T^*(\mathbb{R}^n) \setminus 0 : \sigma(P)(x, \xi) = 0\},$$

donde $\sigma(P)$ es el símbolo principal de P.

Ejemplo 24. Sobre $\mathbb{R}^{n+1} = \mathbb{R}_t \times \mathbb{R}^n_x$, con variables canónicas $\eta \in \mathbb{R}$, $\zeta \in \mathbb{R}^n$ el operador de ondas $\Box = \partial_t^2 - \Delta$ tiene como símbolo característico $\sigma(\Box)(\eta, \zeta) = \eta^2 - \zeta^2$. Luego su conjunto característico viene dado por el doble cono

$$\mathrm{char}(\Box) = \{(t, x, \eta, \zeta) \in \mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^{n+1} : \eta^2 - |\zeta|^2 = 0, \ (\eta, \zeta) \neq (0, 0)\}.$$

A continuación se establece el primer resultado en líneas de caracterizar el frente de ondas de la solución de una ecuación diferencial parcial.

Teorema 25. *Sea $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ y $P(x, \partial)$ un operador diferencial con coeficientes regulares. Sea $P(x, \partial)u = f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Entonces*

$$\mathrm{WF}(u) \subset \mathrm{char}(P).$$

En el caso general, se verifica que

$$\mathrm{WF}(u) \subset \mathrm{WF}(Pu) \cup \mathrm{char}(P).$$

Por otro lado

1. Si p es un operador elíptico, es decir, $\mathrm{char}(P) = \emptyset$ entonces $\mathrm{WF}(Pu) = \mathrm{WF}(u)$.
2. Un operador p se dice hipoelíptico si $\operatorname{sing\,supp}(u) \subset \operatorname{sing\,supp}(Pu)$. Si $\mathrm{WF}(u) \subset \mathrm{WF}(Pu)$ para cada $u \in \mathcal{E}'(X)$, el operador P se dice microlocalmente hipoelíptico.

A pesar de se ahondará un poco más sobre la propagación de singularidades de soluciones de ecuaciones diferenciales, notablemente se tiene el siguiente resultado de regularidad.

Teorema 26. *Suponer que* $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^{n+1})$ *y sea* $P(t, x, \partial_t, \partial_x) = f \in C^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$ *con* $t \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^n$. *Si el plano* $t = 0$ *no es característico, es decir, si* $P(0, x, 1, 0) \neq 0$, *entonces las trazas* $\partial_t^k u(0, x) \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ *está definidas para todo* $k \geq 0$. *Más aún,*

$$u \in C^\infty(\mathbb{R}; \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)).$$

3.2.2. Frente de ondas y Operadores Integrales. Sean Ω_1 y Ω_2 dos dominios contenidos en $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}^m$ respectivamente. Sea $\mathcal{A} : \mathcal{D}(\Omega_2) \to \mathcal{D}(\Omega_1)$ un operador lineal con kernel (de Schwartz) $\mathcal{K} \in \mathcal{D}'(\Omega_1 \times \Omega_2)$. Considere los conjuntos

$$M_1 = \{(x, \xi) : \exists y \in \Omega_2, (x, y, \xi, 0) \in \mathrm{WF}(\mathcal{K})\}, \tag{7}$$

$$M_2 = \{(y, \eta) : \exists x \in \Omega_1, (x, y, 0, -\eta) \in \mathrm{WF}(\mathcal{K})\}. \tag{8}$$

Teorema 27. *Suponer que* $\mathcal{K} \in \mathcal{D}'(\Omega_1 \times \Omega_2)$, $u \in \mathcal{E}'(\Omega_2)$ *con* $M_1 = \emptyset$ *y* $M_2 \cap \mathrm{WF}(u) = \emptyset$. *Entonces la distribución*

$$\mathcal{A}u(x) = \int \mathcal{K}(x, y) u(y) dy \in \mathcal{D}'(\Omega_1)$$

está bien definida y

$$\mathrm{WF}(\mathcal{A}u) \subset \{(x, \xi) : \exists (y, \eta), (x, y, \xi, -\eta) \in \mathrm{WF}(\mathcal{K}), (y, \eta) \in \mathrm{WF}(u)\}.$$

3.3. Operadores pseudo-diferenciales. Un operador pseudo-diferencial se puede ver como la generalización del operador diferencial definido en (2). Decimos que $\mathcal{A}$ es un operador *pseudo-diferencial* si es de la forma

$$\mathcal{A}u(x) = (2\pi)^{-n} \int a(x, \xi) \widehat{u}(\xi) e^{ix\cdot\xi} d\xi,$$

donde $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ y $\widehat{u}(\xi) = \int u(y) e^{iy\cdot\xi} dy$ es su transformada de Fourier. La función a se llama *símbolo* de $\mathcal{A}$ y se asume que

$$|\partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta a(x, \xi)| \leq C_{\alpha,\beta} (1 + |\xi|)^{m - |\alpha|},\ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+^n,$$

donde $C_{\alpha,\beta}$ puede depender del compacto K donde está contenido x.

La importancia de introducir este tipo de operadores, radica en que es usual trabajar con operadores integrales singulares al estudiar, por ejemplo, soluciones de ecuaciones diferenciales parciales. Los operadores pseudo-diferenciales proveen un marco general para tratar con dichos casos.

Observación 28. Aspectos naturales tales como el álgebra de operadores pseudo-diferenciales, continuidad, etc., no serán tratados en este documento.

3.3.1. Pseudo-localidad y Microlocalidad. Es un hecho conocido que los operadores diferenciales son los únicos operadores lineales locales que actuan desde $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ hacia $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, es decir, que satisfacen $\mathrm{supp}(Pu) \subset \mathrm{supp}(u)$ para toda $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Los operadores pseudo-diferenciales poseen una propiedad aún más débil llamada *pseudo-localidad*, es decir,

$$\mathrm{sing\ supp}(\mathcal{A}u) \subset \mathrm{sing\ supp}(u),$$

así como la propiedad de *microlocalidad*, es decir,

$$\mathrm{WF}(\mathcal{A}u) \subset \mathrm{WF}(u).$$

El frente de ondas de una distribución u puede ser definida por medio de operadores pseudo-diferenciales como sigue: para una distribución u con soporte compacto en $\mathbb{R}^n$, un punto (x_0, ξ_0) no pertenece a $\mathrm{WF}(u)$ si y solo si existe un operador pseudo-diferencial $\mathcal{A}$ con símbolo principal $a(x, \xi)$ tal que $a(x_0, \xi_0) \neq 0$ y $\mathcal{A}u \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$.

3.4. Propagación de singularidades. Una de las primeras aplicaciones en las que el análisis microlocal ha sido de amplia utilidad, es en el estudio de la regularidad y solubilidad de ecuaciones diferenciales parciales.

3.4.1. Regularidad microlocal. A continuación haremos más precisos algunas propiedades del frente de ondas con la ayuda de los espacios de Sobolev.

Definición 29. Una distribución $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ pertenece al espacio $H^s(x_0, \xi_0)$ con $s \in \mathbb{R}$ y $(x_0, \xi_0) \in T^*\Omega \setminus 0$, si $u = u_1 + u_2$ donde

$$u_1 \in H^s(\Omega) \text{ y } (x_0, \xi_0) \notin \mathrm{WF}(u_2).$$

El conjunto de puntos $(x, \xi) \in T^*\Omega \setminus 0$ donde u no pertenence a H^s se denota por $\mathrm{WF}^s(u)$.

Observación 30. Ciertamente se puede reemplazar el espacio H^s por otros espacios, tales como C^k, $C^{k,\alpha}$, etc. Sin embargo, para estudiar ecuaciones diferenciales es natural utilizar espacios de Sobolev.

Los siguientes resultados establecen relación entre propiedades del frente de onda de una distribución y su imagen bajo un operador pseudo-diferencial.

Proposición 31. *Sea $\mathcal{A}$ un operador pseudo-diferencial de orden m y $u \in \mathcal{E}'(\Omega)$ tal que $u \in H^s(x_0, \xi_0)$ donde $(x_0, \xi_0) \in T^*\Omega \setminus 0$. Entonces $\mathcal{A}u \in H^{s-m}(x_0, \xi_0)$.*

Proposición 32. *Si $u \in H^s(x_0, \xi_0)$ para todo $(x_0, \xi_0) \in T^*\Omega \setminus 0$, entonces $u \in H^s_{loc}(\Omega)$.*

Proposición 33. *Si $(x_0, \xi_0) \in \mathrm{WF}(u)$ entonces existe s tal que $(x_0, \xi_0) \in \mathrm{WF}_{s+\varepsilon}(u)$ pero $(x_0, \xi_0) \notin \mathrm{WF}_{s-\varepsilon}(u)$ para cada $\varepsilon > 0$.*

Gran parte de los resultados existentes para $\mathrm{WF}(u)$ son también válidos para $\mathrm{WF}^s(u)$.

3.4.2. Regularidad de soluciones en un punto no característico. Sea $u \in \mathcal{E}'(\Omega)$ y la ecuación $P(x, \partial)u = f$ donde P es un operador pseudo-diferencial de orden m.

Teorema 34. *Si $(x_0, \xi_0) \in T^*\Omega \setminus 0$, $p_0(x_0, \xi_0) \neq 0$ y $f \in H^s(x_0, \xi_0)$, entonces $u \in H^{s+m}(x_0, \xi_0)$.*

El resultado anterior establece una conexión entre la regularidad del lado derecho de la ecuación y su solución. Este tipo de resultados es natural, por ejemplo, para el caso de operadores elípticos. Sin embargo, en este caso el resultado es establecido a través del estudio local del fibrado cotangente, que ciertamente es el objetivo del análisis microlocal. En esta línea, se tienen los siguientes dos corolarios.

Corolario 35. *Si $Pu = f$, entonces*

$$\mathrm{WF}^s(u) \subset \mathrm{char}(P) \cup \mathrm{WF}^{s-m}(f).$$

Corolario 36. *Si P es un operador elíptico, entonces*

$$\mathrm{WF}^s(u) = \mathrm{WF}^{s-m}(Pu).$$

3.4.3. Solubilidad de ecuaciones de tipo principal real. Un operador $P(x, \partial)$ de orden m es de tipo principal real si su símbolo principal $\sigma(P)$ es real valuado y la forma $d\sigma(P)(x, \xi)$ no es proporcional a la forma ξdx.

Ejemplo 37. El operador $P(x, \partial) = \partial_1$ es un operador no-elíptico de tipo real principal.

Las curvas bicaracterísticas de P corresponden a las curvas integrales del sistema

$$\begin{cases} \dfrac{dx_j}{dt} = \partial_{\xi_j} p_0(x(t), \xi(t)), \\ \dfrac{d\xi_j}{dt} = -\partial_{x_j} p_0(x(t), \xi(t)), \; j = 1, ..., n, \end{cases} \tag{9}$$

tales que $p_0(x(t), \xi(t)) \equiv 0$.

Primero consideremos la siguiente condición técnica:

(B) Sea $K \subset\subset \Omega$ compacto. Cada bicaracterística nula que pasa por (x, ξ) con $x \in K$ y $\xi \neq 0$, contiene puntos cuya proyección sobre Ω se encuentran fuera de K.

A continuación enunciamos un Teorema obtenido por Duistermaat y Hörmander, que establece la solubilidad semiglobal, i.e. solubilidad en cada compacto, de la ecuación tipo de estudio $Pu = f$.

Teorema 38. *Sea P un operador pseudo-diferencial de orden m, con símbolo principal p_0 en un dominio $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ y sea $K \subset\subset \Omega$. Asumir que se tiene la condición (B). Entonces el conjunto*

$$\mathcal{N}(K) = \{\varphi \in C_0^\infty(K) : P^*\varphi = 0\}$$

tiene dimensión finita. Si $f \in H^s(\Omega)$ y $\int f\overline{\varphi}dx = 0$ para todo $\varphi \in \mathcal{N}(K)$, entonces existe una función $u \in H^{s+m-1}(\Omega)$ satisfaciendo la ecuación $Pu = f$ en K, que satisface la estimativa

$$\|u\|_{s+m-1} \leq C\|f\|_s,$$

donde la constante C no depende de f.

Observación 39. Del mismo modo, existen resultados en relación a la solubilidad local de la ecuación $Pu = f$.

Uno de los ingredientes de la demostración del resultado anterior, corresponde al siguiente resultado.

Teorema 40. *Si $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$, I es una parte conexa de la bicaracterística y $I \cap \mathrm{WF}^s(Pu) = \emptyset$, donde P es un operador pseudo-diferencial de tipo real principal de orden m, entonces $I \subset \mathrm{WF}^{s+m-1}(u)$ o $I \cap \mathrm{WF}^{s+m-1}(u) = \emptyset$.*

El teorema anterior nos dice que en el complemento de $\mathrm{WF}^s(Pu)$, el conjunto $\mathrm{WF}^{s+m-1}(u)$ es invariante bajo traslaciones a lo largo de las trayectorias del sistema Hamiltoniano (9).

Observación 41. Nuevamente se ve como ciertos conceptos conocidos de física tienen lugar en tópicos relativos al análisis microlocal.

4. Microlocalización: una mirada categórica

4.1. Especialización. Sea $\boldsymbol{k}$ un anillo Noetheriano y M una variedad real de dimensión n. Sea $V \to M$ un fibrado vectorial real. Identificamos M con la sección nula de V. Para $Z \subset V$ denotamos por Z^a la imagen de Z bajo el mapeo antipodal $(x; v) \mapsto (x; -v)$. Diremos que Z es cónico si es invariante por la acción de $\mathbb{R}^+$ en V.

Sea X una variedad real y denotar por $\iota : M \hookrightarrow X$ la inclusión natural de una subvariedad cerrada M. Denotar por $\tau_M : T_M X \to M$ el fibrado normal de M en X definido por la sucesión exacta

$$0 \to TM \to M \times_X TX \to T_M X \to 0.$$

Si $\mathscr{F}$ es un haz en X, su restricción $\mathscr{F}|_M$ se puede interpretar como un objeto global, como la imagen directa bajo τ_M del haz cónico[2] $\nu_M \mathscr{F}$ en $T_M X$, el cual se conoce como *especialización* de F a lo largo de M. Intuitivamente, $T_M X/\mathbb{R}^+$ es el conjunto de rayos emitidos desde M en X y el germen de $\nu_M F$ en el vector normal $(x; v) \in T_M X$ es el germen de x de la restricción de $\mathscr{F}$ a lo largo del rayo v.

[2]Localmente constante en la órbita de la acción de $\mathbb{R}^+$.

4.1.1. Cono normal de Whitney. El siguiente diagrama conmutativo de variedades se conoce conoce como la deformación normal de X a lo largo de M

$$\begin{tikzcd} T_M X \arrow[r, hook, "s"] \arrow[d, "\tau_M"'] & \widetilde{X}_M \arrow[d, "p"] & \Omega \arrow[l, hook', "j"'] \arrow[dl, "\widetilde{p}"] \\ M \arrow[r, hook, "\iota"'] & X & \end{tikzcd}$$

En dicho diagrama $t : \widehat{X}_M \to \mathbb{R}$, $\Omega = t^{-1}(\mathbb{R}^+)$ y $T_M X \simeq t^{-1}(0)$. Eligiendo un sistema de coordenadas (x_1, x_2) en X tal que $M = \{x_1 = 0\}$, se tiene que $\widetilde{X}_M = X \times \mathbb{R}$, $t : \widetilde{X}_M \to \mathbb{R}$ es la proyección $p(x_1, x_2, t) = (tx_1, x_2)$.

Sea $S \subset X$ un conjunto localmente cerrado. El cono normal de Whitney corresponde al cono cerrado $C_M(S) \subset T_M X$ dado por

$$C_M(S) = \overline{\widetilde{p}^{-1}(S)} \cap T_M X. \tag{10}$$

Ejemplo 42. Si $M = \{x_0\}$, entonces $C_{x_0}(S)$ corresponde al cono tangente a S.

4.1.2. Functor de especialización. En analogía a (10), el functor de especialización

$$\nu_M : D^b(\boldsymbol{k}_X) \to D^b(\boldsymbol{k}_{T_M X})$$

es dado por[3]

$$\nu_M \mathscr{F} := s^{-1} Rj_* \widetilde{p}^{-1} \mathscr{F}.$$

Como $\nu_M \mathscr{F} \in D^b(\boldsymbol{k}_{T_M X})$, se tiene que $\nu_M \mathscr{F}$ es un haz $\mathbb{R}^+-$cónico.

Observación 43. Si $V \subset T_M X$ es un cono abierto, una sección de $\nu_M \mathscr{F}$ es dado por una sección en $\mathscr{F}$ en un conjunto abierto (pequeño) U de X, en el cual, en algún sentido es tangente a V cerca de M.

4.2. Transformada de Fourier-Sato. La transformada de Fourier-Sato corresponde a una transformada integral en el lenguaje de las seis operaciones de Grothendieck para haces. De algún modo esta transformada recupera una idea fundamental de la transformada de Fourier, como isomorfismo entre espacios de funciones (generalizadas), pero en este caso, estableciendo una equivalencia entre las categorías subyacentes.

Considere el cono

$$P = \{(x, y) \in V \times_M V^* : \langle x, y \rangle \leq 0\}.$$

Denotar la subcategoría de haces cónicos de $D^b(\boldsymbol{k}_V)$ por $D^b_{\mathbb{R}^+}(\boldsymbol{k}_V)$. La transformada de Fourier-Sato de un haz cónico F es dada por

$$\mathscr{F}^\wedge = Rp_{2!}(p_1^{-1}\mathscr{F})_P.$$

Teorema 44. *El functor* $^\wedge$ *induce una equivalencia de categorías*

$$^\wedge : D^b_{\mathbb{R}^+}(\boldsymbol{k}_V) \xrightarrow{\sim} D^b_{\mathbb{R}^+}(\boldsymbol{k}_{V^*}).$$

4.3. Microlocalización. Denotamos por $\pi_M : T^*_M X \to X$ el fibrado conormal en M, dado por la sucesión exacta de fibrado vectoriales sobre M

$$0 \to T^*_M X \to M \times_X T^* X \to T^* M \to 0.$$

La microlocalización de $\mathscr{F}$ a lo largo de M, denotada por $\mu_M \mathscr{F}$, corresponde a la transformada de Fourier-Sato de $\nu_M \mathscr{F}$, por tanto es un objeto de $D^b_{\mathbb{R}^+}(\boldsymbol{k}_{T^*_M X})$.

[3]En términos de las seis operaciones de Grothendieck y categorías derivadas.

4.3.1. Frente de ondas y microfunciones. Sea M una variedad real analítica de dimension n y sea X la complexificación de M. Primero observemos que se tienen los isomorfismos

$$M \times_X T^*X \simeq \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} T^*M \simeq T^*M \otimes \sqrt{-1}T^*M,$$

de lo cual se deduce el isomorfismo

$$T^*_M X \simeq \sqrt{-1}T^*M.$$

Se define el haz de *microfunciones* $\mathscr{C}_M$ en $T^*_M X$ como

$$\mathscr{C}_M = H^n(\mu_M(\mathscr{O}_X)) \otimes \pi^{-1}\mathrm{or}_M.$$

Dicho haz es cónico en $T^*_M X$ y se tiene el isomorfismo natural

$$\mathscr{B}_M \xrightarrow{\sim} \pi_{M^*}\mathscr{C}_M.$$

Denotar por spec el mapeo natural

$$\mathrm{spec} : \Gamma(M, \mathscr{B}_M) \xrightarrow{\sim} \Gamma(T^*_M, \mathscr{C}_M).$$

Definición 45. Se define el frente de onda $\mathrm{WF}(u)$ de una hiperfunción $u \in \mathscr{B}(M)$ como el soporte de $\mathrm{spec}(u)$.

Observación 46. Puesto que el haz $\mathscr{B}_M$ contiene el haz de distribuciones $\mathscr{D}b_M$, se obtiene el *frente de onda analítico* para distribuciones.

Luego de que Mikio Sato definió el haz $\mathscr{C}_M$ y el frente de onda analítico para hiperfunciones, Lars Hörmander extendió el análisis al caso C^∞, donde definió el frente de onda para distribuciones utilizando la transformada de Fourier clásica, el cual fue estudiado en la sección anterior.

4.4. Teoría microlocal de haces. La idea de microlocalización fue extendida por Kashiwara y Schapira para el caso de haces. La idea base es que, dado un haz $\mathscr{F}$ y una variedad real M, se le asocia su *microsoporte* $\mu\,\mathrm{supp}\,\mathscr{F}$ que es un cono cerrado en el fibrado cotangente T^*M. El microsoporte describe las codirecciones de no-propagación de $\mathscr{F}$. Una de las importancias de el microsoporte es que es involutivo en T^*M, por lo cual esta teoría ha tenido varias aplicaciones en geometría simpléctica.

5. Conclusión

Hemos discutido un par de puntos de vista en torno al análisis microlocal, no sólo desde un punto de vista del análisis, sino también de un algebraico. La creación del análisis microlocal se debe a Mikio Sato entre los años 1960 y 1970, en donde introdujo el haz de hiperfunciones y desarrolló parte de la teoría en torno a este, pero no fue sino en los años 1970 y 1971 que gran parte de los resultados fueron establecidos [1] . Aquí Sato y sus colaboradores fueron capaces de establecer el esquema general de estudio: en vez de estudiar ecuaciones diferenciales y sus soluciones como hiperfunciones, estudiar la correspondiente ecuación microdiferencial y sus soluciones como microfunciones. Por otro lado, en 1971 Lars Hörmander introdujo el concepto de frente de onda de el marco de las distribuciones para estudiar operadores integrales de Fourier [2]. Desde 1980 Masaki Kashiwara y Pierre Schapira extendieron el análisis microlocal a la teoría de haces [7], [8].

Desde su desarrollo, el análisis microlocal ha tenido diversas aplicaciones, en diversas áreas, de la matemática desde la teoría de representaciones en álgebra hasta tópicos como teoría de control en EDP. Para un compilado general de resultados sobre análisis microlocal analítico y algebraico, referimos [10].

Referencias

[1] Sato, M. (1970). *Regularity of hyperfunction solutions of partial differential equations.* Actes Congr. Int. Nat. Nice, 2, 785-794.
[2] Hörmander, L. (1971). *Fourier integral operators. I.* Acta mathematica, 127(1), 79.
[3] Kashiwara, M. (1986). *Introduction to Microlocal Analysis: Lectures Given at the University of Berne in June 1984, Under the Sponsorship of the International Mathematical Union.* L'Enseignement Mathématique, Université de Genève.
[4] Björk, J. E. (1993). *Microdifferential operators.* In Analytic D-Modules and Applications (pp. 333-400). Springer, Dordrecht.
[5] Egorov, Y. V. (1993). *Microlocal analysis.* In Partial Differential Equations IV (pp. 1-147). Springer, Berlin, Heidelberg.
[6] Schapira, P. (2017). *Microlocal analysis and beyond.* arXiv preprint arXiv:1701.08955.
[7] Kashiwara, M., & Schapira, P. (1985). *Microlocal study of sheaves.* Société mathématique de France.
[8] Kashiwara, M., & Schapira, P. (1990). *Sheaves on manifolds.* Grund. der Math., 292.
[9] Hofer, H., & Zehnder, E. (2012). *Symplectic invariants and Hamiltonian dynamics.* Birkhäuser.
[10] Hitrik, M., Tamarkin, D., Tsygan, B., & Zelditch, S. (Eds.). (2018). *Algebraic and Analytic Microlocal Analysis: AAMA, Evanston, Illinois, USA, 2012 and 2013* (Vol. 269). Springer.

Email address: cristobal.loyola@sansano.usm.cl