INTRODUCCIÓN A LA TEORÍA DE HODGE

SEBASTIÁN FUENTES, MARIO PASTRANA Y ERNESTO TREUMÚN

Resumen. En este artículo introduciremos el lenguaje necesario para el estudio de la teoría de Hodge, además de enunciar importantes teoremas de dicha teoría: El teorema de descomposición de Hodge y el teorema del isomorfismo de Hodge.

Índice

> El arte de hacer matemáticas consiste en encontrar ese caso especial que contiene todos los gérmenes de la generalidad.
>
> *David Hilbert*

1. Introducción

La teoría de Hodge busca, entre otras cosas, ser una herramienta para el estudio de EDP's definidas sobre variedades diferenciables. Particularmente, en este artículo estudiaremos el operador estrella de Hodge $\star$ definido en el espacio $\Omega^k(M)$ de las $k-$formas sobre una variedad suave, y veremos que es justamente el operador adjunto de una $k-$forma (entendiendo el operador adjunto como la generalización natural del operador adjunto usual definido en análisis funcional). Posteriormente, veremos importantes teoremas de la teoría de Hodge, como el Teorema de descomposición de Hodge y el Teorema de dualidad de Poincaré, enunciados justamente en un lenguaje propio en función del operador $\star$, del operador derivada exterior d y de la cohomología de de Rham. Finalmente, mostraremos notables aplicaciones tanto a física, particularmente al electromagnetismo, como a la teoría de ecuaciones diferenciales parciales.

2. Notación

- Dado un espacio vectorial V, denotaremos por V^* al dual algebraico de V, i.e., al conjunto de formas lineales.
- En algunos ejemplos utilizaremos el convenio de suma de Einstein: Si es entendido en el contexto el valor de n, escribimos

$$a_i v^i := \sum_{i=1}^{n} a_i v^i, \qquad a_{ij} v^i u^j := \sum_{1 \le i,j \le n} a_{ij} v^i u^j, \qquad \text{etc.}$$

- Dado $d \in \mathbb{N}$, denotaremos por S_d al grupo simétrico de d elementos.
- Si es entendido en el contexto, k denotará el cuerpo $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$.

3. Preliminares

3.1. Tópicos sobre geometría diferencial. Comenzamos presentando la definición fundamental sobre la cual se trabajará.

Definición 3.1 (Variedad diferenciable)**.** Sea M un espacio topológico Hausdorff $IIAN$. Decimos que M es una **variedad topológica de dimensión** n si para cada $x \in M$ existe una vecindad abierta U de x homeomorfa a un abierto de $\mathbb{R}^n$. El par (U, φ_U), donde $\varphi_U : U \to \varphi_U(U)$ es el homeomorfismo anterior, se conoce como **carta**. Decimos entonces que M es una C^r**-variedad diferenciable** si está dotado de una **estructura diferenciable**, es decir, una colección de cartas $\mathcal{A} = \{(U_\lambda, \varphi_\lambda)\}_{\lambda \in \Lambda}$ tales que

1. Los abiertos $\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ cubren M, es decir, $M = \bigcup_\lambda U_\lambda$.
2. Para todos $(\alpha, \beta) \in \Lambda \times \Lambda$ la composición $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}|_{\varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)} : \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \to \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$ es de clase C^r.
3. La colección es maximal en el sentido de la propiedad 2., esto es, si (U, φ) es tal que $\varphi \circ \varphi_\lambda^{-1}, \varphi_\lambda \circ \varphi^{-1}$ son de clase C^r para todo $\lambda \in \Lambda$, entonces $(U, \varphi) \in \mathcal{A}$.

Si M es una variedad diferenciable de clase $\mathcal{C}^\infty$, se dirá entonces que M es **suave**.

Un primer objeto que es de interés estudiar sobre variedades diferenciables son las funciones etre ellas, las cuales se desea tengan cierta regularidad compatible con su estructura.

Definición 3.2 (Funciones suaves)**.** Sea M una variedad suave y sea $f : M \to \mathbb{R}^n$. Decimos que f es **suave** si para cada $p \in M$ existe una carta (φ, U) tal que $f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \to \mathbb{R}^n$ es suave en el sentido real. Denotaremos por $C^\infty(M)$ a las funciones suaves $f : M \to \mathbb{R}$.
Adicionalmente, si N es otra variedad suave, decimos que $F : M \to N$ es **suave** si para cada $p \in M$ existen cartas locales (φ, U) y (ψ, V) tal que $p \in U$ y $F(p) \in V$ y $\psi \circ F \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \to \psi(V)$ es suave. Denotaremos por $C^\infty(M, N)$ al conjunto de funciones suaves $f : M \to N$.

Observación 3.3. Se puede probar que si $f : M \to N$ es suave, entonces $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ es suave para cada carta φ, ψ. Es por ello que la definición de función suave entre variedades generaliza la definición para funciones $f : M \to \mathbb{R}^n$, pues basta tomar $N = \mathbb{R}^n$ y $\psi = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n}$ según la definición anterior.

Dado que en $\mathbb{R}^n$ se tienen sólidas intuiciones y definiciones formales acerca de los conceptos de vectores y planos tangentes, es que deseamos exportar estas nociones a variedades más generales. El concepto de espacio tangente, cuya definición se presenta a continuación, viene a generalizar dicho concepto y a sentar las bases de lo que se hará de aquí en adelante.

Definición 3.4 (Espacio tangente)**.** Sea M una $\mathcal{C}^k$-variedad y $p \in M$. Se define el **espacio tangente en** p, denotado por T_pM, como el conjunto de formas lineales $v : C^\infty(M) \to \mathbb{R}$ que satisfacen la regla del producto, i.e., si para cada $f, g \in C^\infty(M)$,

$$v(fg) = f(p)vg + g(p)vf.$$

Se puede probar que si M es una variedad suave de dimensión n, entonces la dimensión del espacio tangente T_pM es n para cualquier $p \in M$.

Definición 3.5. Si fijamos $\varphi = (x_1, \cdots, x_m)$ coordenadas locales alrededor de $p \in M$, podemos definir la **derivada en la dirección** x_i **de** f como

$$\partial_{x_i} f := \frac{\partial}{\partial x_i}(f \circ \varphi^{-1}),$$

la cual permite probar que

$$\{\partial_{x_1}, \cdots, \partial_{x_m}\}$$

forma una base para el espacio tangente en p.

Definición 3.6 (Fibrado tangente)**.** Dada una variedad suave M, se define el **fibrado tangente** TM como

$$TM := \coprod\nolimits_{p \in M} T_pM.$$

El fibrado tangente lleva consigo la proyección

$$\pi : TM \to M,\ v \in T_pM \mapsto p,$$

Luego podemos considerar la topología sobre TM más pequeña que hace a esta proyección continua. Una carta $\varphi = (x_1, \ldots, x_n) : U \subseteq M \to \mathbb{R}^n$, induce una carta sobre TM

$$\tilde{\varphi} : \pi^{-1}(U) \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n,\ v = \sum v_i\, \partial_{x_i}\big|_q \mapsto (\varphi(q), (v_i)_i)$$

por lo tanto, TM adquiere una estructura de variedad topológica. Más aún, podemos probar que los cambios de cartas son suaves dotando así a TM de una estructura de variedad suave de dimensión $2n$.

Ya con la noción de espacio tangente de una variedad, es natural preguntarse cómo definir la derivada de una función $F : M \to N$, esta tiene que ser una aproximación lineal de F entre los espacios tangentes respectivos.

Definición 3.7 (Derivada)**.** Sean M, N variedades suaves y $F : M \to N$ una función suave, definimos la derivada de F en $p \in M$ como la aplicación lineal $d_pF : T_pM \to T_{F(p)}N$ definida como sigue: Dada una derivación $v \in T_pM$, definimos $d_pF(v)$ como la derivación en $F(p) \in N$ que actúa sobre $f \in C^\infty(N)$ mediante

$$d_pF(v)(f) := v(f \circ F).$$

No es difícil verificar que lo anterior está bien definido. La siguiente observación permite entender mejor la derivada d_pF.

Observación 3.8. Si $F : M \to N$ es suave, y $(x_1, \ldots, x_m)$ e $(y_1, \ldots, y_n)$ son coordenadas locales de $p \in M$ y $F(p) \in N$ respectivamente, entonces d_pF en coordenadas locales está dada por la matriz

$$\begin{pmatrix} \partial_{x_1} F^1(p) & \cdots & \partial_{x_m} F^1(p) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_{x_1} F^n(p) & \cdots & \partial_{x_m} F^n(p) \end{pmatrix}$$

donde F^i es la i-ésima componente de F respecto a las coordenadas locales $(y_1, \ldots, y_m)$, es decir, $F^i := y_i \circ F$.

En el caso particular que F sea una función suave $F : U \subset \mathbb{R}^n \to V \subset \mathbb{R}^m$, la expresión local de dF_p coincide con la matriz jacobiana *jacobiana*.

Definición 3.9 (Espacio cotangente)**.** Definimos el espacio cotangente en p como

$$T_p^*M := (T_pM)^* =: \mathcal{L}(T_pM, \mathbb{R}),$$

el cual tiene como base

$$\{dx_1, \ldots, dx_m\},$$

donde $\{dx_i\}_i$ corresponde a la base dual de $\{\partial_{x_i}\}_i$.

Definición 3.10 (Fibrado cotangente)**.** Similar a la definición de fibrado tangente, se define el fibrado cotangente como

$$T^*M := \coprod_{p \in M} T_p^*M.$$

Al igual que TM, se puede probar que T^*M tiene una estructura de variedad suave de dimensión $2n$.

Los nombres "fibrado tangente" y "fibrado cotangente" no son casuales, pues justamente dichos objetos están enmarcados dentro de una categoría llamada la categoría de fibrados vectoriales. A continuación se presentará la definición de fibrado vectorial y mostraremos que los fibrados anteriores son, efectivamente, fibrados vectoriales.

Definición 3.11 (Fibrado vectorial)**.** Sea M espacio topológico. Un **fibrado vectorial de rango r** (real) sobre M es un espacio topológico E junto con una proyección continua sobreyectiva $\pi : E \twoheadrightarrow M$ verificando las siguientes condiciones:

1. Para todo $p \in M$ la fibra $E_p := \pi^{-1}(p)$ es un espacio vectorial de dimensión r.
2. Para todo $p \in M$ existe una vecindad abierta U de p y un homeomorfismo $\theta_U : \pi^{-1}(U) \to U \times \mathbb{R}^r$ llamado **trivialización** tal que
   - $\pi_U \circ \theta_U = \pi$ donde $\pi_U : U \times \mathbb{R}^r \twoheadrightarrow U$ es la proyección en la primera coordenada.
   - para todo $q \in U$ la aplicación $\mathbb{R}^r \xrightarrow{\sim} E_q, v \mapsto \theta_U^{-1}(q, v)$ sea un isomorfismo de espacios vectoriales.

En el caso que M, E sean variedades suaves, π y las trivializaciones sean difeomorfismos (i.e., biyecciones suaves de inversa suave), diremos que E es un **fibrado vectorial suave**.

La primera observación clave es notar que el fibrado tangente es, en efecto, un fibrado vectorial. Dada una variedad M de dimensión n, su fibrado tangente TM posee la proyección natural $\pi : TM \to M$ y una topología como se definen en 3.6. Notar que para cada $p \in M$ la fibra corresponde al espacio vectorial $\pi^{-1}(p) = T_pM$ de dimensión n. Ahora, dada una carta suave (U, φ) de M de coordenadas (x^i), definimos el mapeo

$$\theta_U : \pi^{-1}(U) \to U \times \mathbb{R}^n, \qquad \theta_U\left(v^i \partial_{x^i}\right) = (p, (v^1, \ldots, v^n))$$

El mapeo anterior resulta ser lineal en cada fibra y además la composición

$$\pi^{-1}(U) \xrightarrow{\theta_U} U \times \mathbb{R}^n \xrightarrow{\varphi \times \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n}} \varphi(U) \times \mathbb{R}^n$$

corresponde al mapeo $\tilde{\varphi}$ definido en 3.6, el cual es suave y por tanto θ_U es suave. Se tiene entonces que TM define un fibrado vectorial de rango n sobre M. Utilizando ideas similares se puede probar que el fibrado cotangente es también un fibrado vectorial de rango n.

Definición 3.12 (Sección de un fibrado vectorial)**.** Sea $\pi : E \to M$ un fibrado vectorial. Una **sección** de E corresponde a una aplicación continua $\sigma : M \to E$ de tal forma que $\pi \circ \sigma = \mathrm{Id}_M$, es decir, para cada $p \in M$ $\sigma(p)$ pertenece a la fibra E_p. Si M es una variedad suave hablaremos de **secciones suaves** de E.

Ejemplo 3.13 (Sección cero)**.** Sea $\pi : E \to M$ un fibrado vectorial, existe siempre una sección que podemos escoger trivialmente, llamada la **sección cero**. Para cada $p \in M$, definimos $s(p) = 0 \in T_pM$ como el elemento cero del espacio tangente respectivo. En particular, la variedad M se puede identificar como la sección cero del fibrado vectorial $\pi : E \to M$.

Observación 3.14. Dada una variedad suave M y un fibrado vectorial suave $E \to M$, denotamos por $\Gamma(E)$ al $\mathcal{C}^\infty(M)-$módulo de secciones suaves.

En lo que sigue recordamos el concepto de partición de la unidad, el cual tiene su origen en el contexto de la topología, y que se necesitará próximamente para desarrollar la teoría de integración sobre variedades.

Definición 3.15. Sea X un espacio topológico.

1. Un recubrimiento de abiertos $(U_i)_{i\in I}$ de X se dice localmente finito si para todo $p \in X$, se tiene que $p \notin U_i$ salvo para finitos $i \in I$.
2. Un recubrimiento de abiertos $(V_j)_{j\in J}$ se dice un refinamiento del recubimiento $(U_i)_{i\in I}$ si para todo $j \in J$, existe $i \in I$ tal que $V_j \subseteq U_i$.

Definición 3.16 (Partición de la unidad)**.** Sea M una variedad suave y $(U_i)_{i\in I}$ un recubrimiento de abiertos. Una partición de la unidad sobre M subordinado a $(U_i)_{i\in I}$ es una colección de funciones suaves $\{f_j : M \to \mathbb{R}\}_{j\in J}$ tal que

1. $\{\operatorname{supp} f_j\}_{j\in J}$[1] es un refinamiento localmente finito de $(U_i)_{i\in I}$.
2. $f_j(p) \geq 0$, para todo $j \in J$ y $p \in M$,
3. $\sum_{j\in J} f_j(p) = 1$, para todo $p \in M$.

La propiedad IIAN que poseen las variedades permite probar el siguiente teorema.

Teorema 3.17. Sea M una variedad suave y $(U_i)_{i\in I}$ un recubrimiento de abiertos. Luego existe una partición de la unidad numerable sobre M subordinado a $(U_i)_{i\in I}$. Más aún, si I es numerable, podemos asumir que $J = I$ y que $\operatorname{supp} f_i \subseteq V_i$ para todo $i \in I$.

Definición 3.18 (Variedad riemanniana)**.** Sea M una variedad suave $n-$dimensional. Definimos el **fibrado covariante de k-tensores** como

$$T^kT^*M = \coprod_{p\in M} T^k(T_p^*M)$$

Una sección del fibrado anterior se conocerá como un **campo tensorial suave**. Se define entonces una **métrica riemanniana** como un campo $2-$tensorial covariante suave (esto es, una sección de T^2T^*M) y simétrico (su valor en cada punto es un tensor simétrico) el cual es definido positivo en cada punto.

[1]supp hace referencia a los puntos donde la función no se anula.

La definición anterior nos dice que, localmente (i.e., en una carta de coordenadas locales (x_i)) una métrica riemmaniana g se puede escribir como[2]

$$g = g_{ij} dx^i \otimes dx^j$$

donde (g_{ij}) es una matriz simétrica definida positiva cuyos coeficientes son funciones suaves. A modo de aclaración, se presenta el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3.19 (métrica euclideana)**.** *La métrica euclideana g en $\mathbb{R}^n$ en las coordenadas estándar se escribe como*

$$g = \delta_{ij} dx^i dx^j$$

donde δ_{ij} denota la función delta de Kronecker. Si $v, w \in T_p\mathbb{R}^n$ se tiene que

$$g_p(v, w) = \delta_{ij} v^i w^j = v^i w^i = v \cdot w$$

es el producto interno usual.

Teorema 3.20. Toda variedad suave admite una métrica Riemanniana.

Demostración. Queremos definir una métrica sobre TM. Usando la proyección π del fibrado tangente, para cada $p \in M$ podemos encontrar una vecindad abierta U_p tal que $\pi^{-1}(U_p) \cong U_p \times \mathbb{R}^n$. Podemos fácilmente encontrar una métrica g_p en $\pi^{-1}(U_p)$ inducida por el producto interno de $\mathbb{R}^n$, definiendo

$$g_p(u, v) := \langle u, v \rangle_{T_pM}, \quad \forall p \in U_p.$$

Consideremos ahora $\{U_{p_j}\}_{j \in J}$ cubrimiento abierto de M localmente finito. La partición de la unidad nos da la existencia de funciones $\{\psi_j\}_{j \in J}$ subordinadas a $\{U_{p_j}\}$. Un pequeño ejercicio es verificar que

$$g := \sum_j \psi_j g_{p_j}$$

es la métrica deseada. ■

Lo anterior revela la importancia de contar con particiones de la unidad, pues nos permite *pegar suavemente* resultados locales que tengamos en la variedad.

Del álgebra lineal, se tiene que toda forma bilineal no degenerada $V \times V \to \mathbb{R}$ induce un isomorfismo $V \to V^*$. En particular, la métrica g de una variedad Riemanniana induce un isomorfismo de fibrados vectoriales $TM \cong T^*M$ el cual define naturalmente una métrica sobre T^*M.

Proposición 3.21 (Métrica dual)**.** *Sea (M, g) una variedad de Riemann. Entonces existe una única métrica g^* sobre el fibrado cotangente T^*M tal que el isomorfismo inducido por la métrica $TM \cong T^*M$ es una isometría sobre cada fibra.*

3.2. Tópicos sobre álgebra.

Definición 3.22 (Álgebra exterior)**.** Sea T^dV la **d-ésima potencia tensorial** de V y recordemos que el álgebra tensorial de V está dada por $TV := \bigoplus_{d \geq 0} T^dV$. Si tomamos el ideal $I := \langle a \otimes v \otimes v \otimes b \rangle \subset TV$, con $a, b \in TV$ y $v \in V$, se define el **álgebra exterior** de V, denotada como $\bigwedge V$, como la k-álgebra $\bigwedge V := TV/I$. Adicionalmente, se define la **d-ésima potencia exterior** de V como $\bigwedge^d V := T^dV/(I_d)$, donde $I_d := I \cap T^dV$.
Se puede probar que $\bigwedge V \cong \bigoplus_{d \in \mathbb{N}} \bigwedge^d V$, y en todo lo que sigue consideraremos dicha identificación. En particular, el álgebra exterior es un álgebra graduada.

[2]Aquí utilizamos el convenio de suma de Einstein.

Proposición 3.23. *Sea V un k-espacio vectorial. Entonces:*

1. *El producto exterior es* **anti-simétrico***, esto es, para cada $\sigma \in S_d$ se tiene*
$$v_{\sigma(1)} \wedge ... \wedge v_{\sigma(d)} = \varepsilon(\sigma) v_1 \wedge ... \wedge v_d.$$
Particularmente, si $\alpha \in \bigwedge^d V$ y $\beta \in \bigwedge^e V$, entonces $\beta \wedge \alpha = (-1)^{de} \alpha \wedge \beta$.
2. *Se tiene que $\mathrm{Alt}^d(V) \cong (\bigwedge^d V)^*$.*

Además, si V es de dimensión finita, entonces:

1. *Si $(e_1, \ldots, e_n)$ es una base de V, entonces la colección $(e_{i_1} \wedge \ldots, \wedge e_{i_d})_{1 \leq i_1 < \ldots < i_d \leq n}$ resulta ser una base de $\bigwedge^d V$. Además, $\bigwedge^d V = 0$ si $d > n$, y si $d \leq n$, luego $\dim_k(\bigwedge^d V) = \binom{n}{d}$.*
2. *La aplicación*
$$\bigwedge^d (V^*) \times \bigwedge^d V \to k$$
$$(f_1 \wedge ... \wedge f_d, v_1 \wedge ... \wedge v_d) \mapsto \det((f_i(v_j))_{1 \leq i,j \leq d}$$
es bilineal y no degenerada. En particular, $(\bigwedge V^*) \cong \bigwedge V^*$.

Otra de las propiedades más importantes del producto exterior es que este producto se puede ver dentro del espacio tensorial, propiedad que se utilizará bastante en de aquí en adelante. Veamos explícitamente la identificación:

Definición 3.24 (Tensor anti-simétrico)**.** Dado $\sigma \in S_d$ grupo simétrico, y dado $v_1 \otimes ... \otimes v_d \in T^d V$ se define $\tilde{\sigma}(v_1 \otimes ... \otimes v_d) := v_{\sigma(1)} \otimes ... \otimes v_{\sigma(d)}$. Dado $T \in T^d V$, decimos que T es **anti-simétrico** si $\tilde{\sigma}(T) = \varepsilon(\sigma) T$. Se denota por $A^d V \subset T^d V$ al sub-espacio vectorial de **tensores anti-simétricos**.

Proposición 3.25. *Existe un isomorfismo canónico entre $\bigwedge^d V$ y $A^d V$ mediante la aplicación*
$$\bigwedge^d V \xrightarrow{\sim} A^d V$$
$$v_1 \wedge ... \wedge v_d \mapsto \frac{1}{d!} \sum_{\sigma \in S_d} \varepsilon(\sigma) \tilde{\sigma}(v_1 \otimes ... \otimes v_d).$$

4. Álgebra exterior

Consideraremos durante esta sección V un espacio euclideano de dimensión n, esto es, un espacio vectorial real de dimensión n dotado de una aplicación $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ bilineal simétrica definida positiva, conocida como producto interno. Dado que $\bigwedge^d V = 0$ si $d > n$, la identificación del álgebra exterior introducida anteriormente se reduce a $\bigwedge V = \bigoplus_{0 \leq p \leq n} \bigwedge^d V$.

Proposición 4.1. *Los elementos en $\bigwedge^d V$ se pueden ver como $d-$formas multilineales alternadas sobre V^* mediante la identificación natural 3.25 del producto exterior sobre el producto tensorial $T^d V$.*

Demostración. En efecto, denotemos $W^d := \prod_{i=1}^d W$ y considere el mapeo

$$T : (V^*)^d \times V^d \to \mathbb{R}$$
$$((f_1, ..., f_d), (v_1, ..., v_d)) \mapsto \det((f_i(v_j))_{1 \leq i,j \leq n}$$

y observe que, para $V = (v_1, ..., v_d) \in V^d$ fijo, el mapeo $T_v(f_1, ..., f_d) := T(f_1, ..., f_d, v)$ es multilineal alternado por propiedades del determinante, esto es, existe $V \to \mathrm{Alt}^d(V^*)$ dado por

$v \mapsto T_v$. Observando que dicho mapeo es $d-$multilineal y recordando la propiedad universal del producto tensorial T^dV, tenemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Alt}^d(V^*) \\ T^d(V) \arrow[ur, dashed, "\exists!"'] & \end{tikzcd}$$

Para finalizar, se puede observar que el kernel de la aplicación $T^dV \to \mathrm{Alt}(d)$ es justamente el subespacio I generado por los tensores simples que tienen coordenadas repetidas ($v \otimes w \otimes v \in I$ por ejemplo). Así, gracias al isomorfismo de Noether y la propiedad alternante del producto exterior obtenemos el diagrama

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Alt}^d(V^*) \\ T^d(V^*) \arrow[ur, dashed, "\exists!"'] \arrow[d] & \\ T^dV/I = \bigwedge^d V \cong A^dV \arrow[uur, dashed, bend right] & \end{tikzcd}$$

donde $\bigwedge^d V \to \mathrm{Alt}^d(V^*)$ es inyectivo. No obstante, como ambos espacios tienen la misma dimensión, se obtiene el isomorfismo deseado. ■

Observación 4.2. La identificación $\bigwedge^d V \cong \mathrm{Alt}^d(V^*)$ está explícitamente dada por

$$(v_1 \wedge ... \wedge v_d)(f_1, ..., f_d) = \det((f_i(v_j))_{ij}).$$

Si consideramos $f_1 \wedge \ldots \wedge f_d \in \bigwedge^d V^*$, la identificación $V^{**} \cong V$ nos permite ver a $f_1 \wedge \ldots \wedge f_d$ como una aplicación $d-$alternada en V dada por

$$(f_1 \wedge \ldots \wedge f_d)(v_1, \ldots v_d) = \det((f_i(v_j))_{ij}),$$

por lo que usaremos indistintamente esta identidad en lo que sigue.

Ahora bien, a partir de la estructura de V dada por el producto interno, se induce de forma natural un producto interno en ΛV como

$$\langle v_1 \wedge \ldots \wedge v_d, w_1 \wedge \ldots \wedge w_d \rangle := \det(\langle v_j, w_k \rangle) \qquad v_j, w_k \in V$$

Si $d \neq d'$ entonces se definen $\bigwedge^d V, \bigwedge^{d'} V$ como ortogonales.

5. El operador estrella de Hodge

Por construcción, se tiene que $\bigwedge^0 V = \mathbb{R}$, y no existe ambiguedad en distinguir el semi espacio $\mathbb{R}^+ \subset \bigwedge^0 V$. En el caso del espacio $\bigwedge^n V \cong \mathbb{R}$ no existe una forma canónica de elegir un semiespacio. Introducimos entonces la siguiente noción.

Definición 5.1 (Orientación)**.** Se define una **orientación** del espacio euclideano V como una componente conexa de $\bigwedge^m (V^*) \setminus \{0\}$. Denotaremos dicha componente por $\bigwedge^m V^+$.

Para aterrizar la definición anterior, entederemos esta en términos de cambios de base. Dado el conjunto de bases de V, se define la relación de equivalencia $\mathscr{B} \sim \mathscr{B}' \iff \det_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}') > 0$. Se puede probar entonces que dicha relación posee únicamente dos clases de equivalencia, las cuales nombraremos como **orientaciones** de V. Ahora, la observación clave es notar que la elección de un $\omega \in \bigwedge^n(V^*)$ determina una orientación en V, pues si (e_i) es una base de V entonces para cualquier otra base (e'_i) de V

$$\omega(e'_1, \ldots, e'_n) = \det_{e_i}(e'_i)\omega(e_1, \ldots, e_n)$$

por lo que $\det_{e_i}(e'_i) > 0$ (i.e., están correctamente orientadas) si y sólo si $\omega(e_1, \ldots, e_n), \omega(e'_1, \ldots, e'_n)$ poseen el mismo signo.

Recordemos que si $(e_i), (f_j)$ es una base ortonormal de V, entonces es posible encontrar un cambio de base ortogonal entre ellos. Más aún, si V está orientado y elegimos una base ortogonal $(e_i) \subset \bigwedge^m V^+$, entonces dicha base está definida de forma única módulo un cambio de base ortogonal de determinante 1.

Definición 5.2 (Elemento de volumen)**.** Dado el espacio euclideano orientado $(V, \langle,\rangle, \bigwedge^n V^+)$ con base ortonormal (e_i), se define el **elemento de volumen** como

$$dV := e_1 \wedge \ldots \wedge e_n \in \bigwedge^n V^+$$

Teorema 5.3 (Operador $\star$)**.** *Sea $(V, \langle,\rangle, \bigwedge^n V^+)$ espacio euclideano orientado de dimensión n. Entonces existe un único isomorfismo lineal*

$$\star : \bigwedge V \xrightarrow{\sim} \bigwedge V$$

de tal forma que

$$\star : \bigwedge^d V \xrightarrow{\sim} \bigwedge^{n-d} V, \qquad u \wedge \star v = \langle u, v\rangle dV \qquad \forall u, v \in \bigwedge^d V, \forall d$$

Demostración. Consideremos en primer lugar la forma bilineal

$$\bigwedge^d V \times \bigwedge^{n-d} V \to \bigwedge^n V \cong \mathbb{R}, \quad (u, v) \mapsto (u \wedge v)/dV$$

la cual resulta ser no degenerada. Dado que los conjuntos

$$(e_{i_1} \wedge \ldots, \wedge e_{i_d})_{1\le i_1<\ldots<i_d\le n}, (e_{i_1} \wedge \ldots, \wedge e_{i_{n-d}})_{1\le i_1<\ldots<i_{n-d}\le n}$$

son bases de $\bigwedge^d V, \bigwedge^{n-d} V$ respectivamente, para $u \in \bigwedge^d V, v \in \bigwedge^{n-d} V$ se tiene que

$$u = \sum_{1\le i_1<\ldots<i_d\le n} u_{i_1,\ldots,i_d} e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_d} \qquad v = \sum_{1\le j_1<\ldots<j_{n-d}\le n} v_{j_1,\ldots,j_{n-d}} e_{j_1} \wedge \ldots \wedge e_{j_{n-d}}$$

Luego, por propiedades del producto exterior

$$\begin{aligned} u \wedge v &= \sum_{\substack{1\le i_1<\ldots<i_d\le n \\ 1\le j_1<\ldots<j_{n-d}\le n}} u_{i_1,\ldots,i_d} v_{j_1,\ldots,j_{n-d}} e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_d} \wedge e_{j_1} \wedge \ldots \wedge e_{j_{n-d}} \\ &= \sum_I u_I v_J e_I \wedge e_J \\ &= \sum_I \varepsilon(I, J) u_I v_J dV \end{aligned}$$

donde $I = \{i_1, \ldots, i_d\}$ denota los conjuntos de índices tales que $1 \le i_1 < \ldots < i_d \le n$, I^c su complemento ordenado (en forma creciente) en $\{1, \ldots, n\}$, $e_I = e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_d}$ y $\varepsilon(I, J)$ la signatura de la permutación (I, J). Si $v = \sum_J v_J e_J \in \bigwedge^d V$ (donde $J = \{j_1, \ldots, j_d\}$ con $1 \le j_1 < \ldots < j_d \le n$) se define entonces

$$\star v = \sum_J \varepsilon(J, J^c) v_J e_{J^c}$$

se verifica entonces

$$\begin{aligned} u \wedge \star v &= \left(\sum_I u_I e_I \right) \wedge \left(\sum_J \varepsilon(J, J^c) v_J e_{J^c} \right) \\ &= \sum_{I,J} \varepsilon(J, J^c) u_I v_J e_I \wedge e_{J^c} \\ &= \sum_I \varepsilon(I, I^c) u_I v_I e_I \wedge e_{I^c} \\ &= \sum_I \varepsilon(I, I^c)^2 u_I v_I dV \\ &= \sum_I u_I v_I dV = \langle u, v \rangle dV \end{aligned}$$

Hemos probado así la existencia de un operador $\star$.
Supongamos a continuación la existencia de un operador $\star'$ el cual posee las mismas propiedades. Entonces

$$u \wedge (\star - \star')(v) = (\langle u, v\rangle - \langle u, v\rangle) dV = 0 \quad \forall u, v$$

lo cual implica que $\star = \star'$. ■

Observación 5.4. Cabe recalcar que es natural la existencia del isomorfismo $\star : \bigwedge^d \xrightarrow{\sim} \bigwedge^{n-d}$, pues el producto exterior es **functorial** y las dimensiones de ambos espacios son $\binom{n}{d}$ y $\binom{n}{n-d}$, las cuales coinciden.

A continuación se listan algunas propiedades del operador $\star$.

Proposición 5.5. *Sea $(V, \langle,\rangle, \bigwedge^n V^+)$ espacio euclideano orientado de dimensión n. Entonces el operador $\star : \bigwedge V \to \bigwedge V$ es una isometría, y además para todos $u, v \in \bigwedge^p V$, $0 \leq p \leq m$ se verifica*

1. $\star(1) = dV$ *y* $\star(dV) = 1$
2. $\star(e_1 \wedge \ldots \wedge e_p) = e_{p+1} \wedge \ldots \wedge e_n$
3. $\star\star|_{\bigwedge^p V} = (-1)^{p(n-p)} \operatorname{Id}_{\bigwedge^p V}$
4. $\langle u, v\rangle = \star(v \wedge \star v)$

6. Cohomología de de Rham

En esta sección introduciremos un concepto clave: las p-formas.

Definición 6.1 (p-formas)**.** Sea M una variedad suave, T^*M su fibrado cotangente. Definimos el espacio vectorial de las **p-formas** como

$$\Omega^p(M) := \Gamma(\textstyle\bigwedge^p T^*M)$$

el espacio vectorial de las secciones de la variedad suave

$$\bigwedge^p T^*M = \coprod_{q \in M} \bigwedge^p (T_q^* M)$$

Notemos que la definición anterior significa que localmente (i.e., en cada carta) una p-forma ω se escribe como

$$\omega = \sum_{1 \leq j_1 < \ldots < j_k \leq n} \omega_{j_1, \ldots, j_k} dx_{j_1} \wedge \ldots \wedge dx_{j_k}$$

donde $\omega_{j_1,\dots,j_k}$ son suaves.

Con la finalidad de introducir el complejo de de Rham, recordamos a continuación las siguientes definiciones del álgebra abstracta.

Recuerdo 6.2 (complejo, grupo de cohomología)**.** *Sea* $\{V^i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ *una colección de espacios vectoriales reales. y* $\{d^i : V^i \to V^{i+1}\}$ *una colección de aplicaciones lineales. Un* **complejo** *corresponde a una sucesión*

$$\dots \longrightarrow V^{i-1} \xrightarrow{d^{i-1}} V^i \xrightarrow{d^i} V^{i+1} \longrightarrow \dots$$

de tal forma que $d^i \circ d^{i-1} = 0$ *para todo* $i \in \mathbb{Z}$*. Dicho complejo se denotará por* $(V^\bullet, d)$
Se pueden entonces definir los **grupos de cohomología** *del complejo*

$$H^i(V^\bullet) := \frac{\ker(d^i)}{\operatorname{Im}(d^{i-1})}$$

Definición 6.3 (formas cerradas/exactas)**.** Sea M una variedad suave, $u \in \Omega^p(M)$ una p-forma. Decimos que u es **cerrada** si $du = 0$, y que es **exacta** si existe $v \in \Omega^{p-1}(M)$ si $dv = u$.

Definición 6.4 (complejo de de Rham)**.** Sea M variedad suave. Se define su complejo de de Rham como

$$0 \longrightarrow \Omega^0(M) \xrightarrow{d} \Omega^1(M) \xrightarrow{d} \cdots \xrightarrow{d} \Omega^{n-1}(M) \xrightarrow{d} \Omega^n(M) \longrightarrow 0$$

donde $d : \Omega^p(M) \to \Omega^{p+1}(M)$ denota el operador de derivada exterior dado por la siguiente relación: Si localmente en una carta $(U; x_1, \dots, x_n)$ $u = \sum_{|I|=p} u_I dx_I$ es una forma diferencial, entonces

$$dw = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial u_I}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_I.$$

Proposición 6.5. *El complejo de de Rham es efectivamente un complejo, esto es,* $d^2 = 0$*.*

Demostración. Para simplificar notación probaremos el caso $\Omega^0(M) \xrightarrow{d} \Omega^1(M)$, pues la demostración es análoga para $\Omega^r(M) \xrightarrow{d} \Omega^{r+1}(M)$ arbitrarios. Sea $u \in \mathcal{C}^\infty(M) = \Omega^0(M)$. Entonces

$$\begin{aligned}
du &\overset{\text{def}}{=} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_j} dx_j \\
d^2u &\overset{\text{def}}{=} \sum_{j=1}^{n} d\left[\frac{\partial u_j}{\partial x_j}\right] \wedge dx_j \\
&= \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_i} dx_i \right) \wedge dx_j \\
&= \sum_{j=1}^{n} \sum_{i\neq j} \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_i} dx_i \wedge dx_j.
\end{aligned}$$

Así, la anticonmutatividad del producto exterior y el teorema de Schwartz (válido también para variedades suaves) nos permite afirmar que la última expresión es nula. ∎

Una interesante propiedad de la derivada exterior que será útil más adelante es la siguiente.

Proposición 6.6. *Si* $\alpha \in \Omega^p(M)$ *es una p-forma y* $\beta \in \Omega^q(M)$ *es una q-forma, entonces*

$$d(\alpha \wedge \beta) = d\alpha \wedge \beta + (-1)^p \alpha \wedge d\beta.$$

Una definición central de la teoría de Hodge corresponde a los grupos de cohomología de de Rham, pues uno de los principales teoremas que se presentarán dan información acerca de estos objetos.

Definición 6.7. Se define el i-ésimo grupo de cohomología de de Rham como

$$H^p_{dR}(M) := \frac{\ker(d : \Omega^p(M) \to \Omega^{p+1}(M))}{\mathrm{Im}(d : \Omega^{p-1}(M) \to \Omega^p(M))} = \frac{\{\text{p-formas cerradas en } M\}}{\{\text{p-formas exactas en } M\}}$$

El hecho de que $d^2 = 0$ nos dice que toda forma exacta es cerrada. El resultado recíproco dista mucho de ser cierto, pero el Lema de Poincaré (que se enuncia a continuación) da un resultado parcial acerca de esto.

Teorema 6.8 (Lema de Poincaré)**.** *Sea $p > 0$. Toda p-forma cerrada u sobre una variedad suave M es localmente exacta, es decir, para todo $q \in M$ existe una vecindad abierta U de q tal que $v \in \Omega^{p-1}(U)$ y $u|_U = dv$.*

7. Orientación e integración

Dada una variedad suave M de dimensión n, podemos incrustar M dentro de $\bigwedge^n(T^*_M)$ como la sección cero, luego $\bigwedge^n(T^*_M) \setminus M$ tiene a lo más dos componentes conexas.

Definición 7.1 (Orientación)**.** Una variedad suave M de dimensión n se dice orientable si $\bigwedge^n(T^*_M) \setminus M$ tiene dos componentes conexas, y se dirá no orientable en otro caso.

Si M es orientable, la elección de una componente de $\bigwedge^n(T^*M) \setminus M$ se dice una orientación de M.

Proposición 7.2. Sea M una variedad suave de dimensión n. Luego, son equivalentes:

1. M es orientable.
2. Existe una colección de cartas locales $\{U^\alpha, (x^\alpha_1, \ldots, x^\alpha_n)\}$ tales que
$$\det\left(\frac{\partial x^\beta_i}{\partial x^\alpha_j}(x^\alpha)\right)_{i,j \le n} > 0, \quad \text{sobre } U^\alpha \cap U^\beta.$$
3. Existe una $n-$forma de M que no se anula nunca.

La colección de cartas en el item 2 de la proposición anterior se dice que *preserva la orientación*. Teniendo en cuenta la identificación 4.2, podemos orientar M escogiendo la componente conexa de $\bigwedge^n(T^*_M) \setminus M$ contenida en los vectores $\tau^*_\alpha(dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n)(q) = (dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n)(\tau_\alpha(q))$, donde $\tau_\alpha : U_\alpha \to \mathbb{R}^n$ es una carta del atlas, $q \in U_\alpha$ y $dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$ es la orientación canónica de $\mathbb{R}^n$. De aquí en adelante, si M es orientable, le daremos la orientación por el procedimiento anterior.

En todo lo que sigue, consideraremos M una variedad orientable de dimensión n. Como ya vimos, M posee particiones de la unidad, y gracias a esto podremos definir la integración de $n-$formas con soporte compacto definidas sobre M y que más aún, verificarán el Teorema de Stokes. Para ello, necesitamos introducir algunas definiciones previas:

Definición 7.3 (Pullback de formas diferenciales)**.** Sean M, N dos variedades suaves y $F : M \to N$ suave. Si ω es una $d-$forma diferencial sobre N, definimos el **pullback** de ω sobre F, denotado como $F^*\omega$, por la siguiente relación:

$$(F^*\omega)_p(v_1, ..., v_d) := \omega_{F(p)}(dF_p(v_1), ..., dF_p(v_d)).$$

En particular, $F^*\omega$ define una $d-$forma diferencial sobre M.

Observación 7.4. Siendo estrictamente formales, $(F^*\omega)_p$ está definida sobre $(T_pM)^d$, ie, como una d-forma alternada sobre T_pM, pero la observación 4.2 nos permite ver a $(F^*\omega)_p$ como un elemento en $\bigwedge^d(T_p^*M)$. Ocurre un caso similar para la evaluación en $\omega_{F(p)}$, pues la podemos ver como una aplicación $d-$alternada sobre $T_{F(p)}N$.

Visto lo anterior, sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto y $\omega : \Omega \to \bigwedge^n(T^*\mathbb{R}^n)$ una $n-$forma de soporte compacto. Entonces, $\omega = f dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n$ con $f \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$. Definimos la integral de la forma diferencial ω como

$$\int_\Omega \omega := \int_\Omega f dx,$$

donde dx denota la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^n$.

Proposición 7.5. *Sean $\Omega_1, \Omega_2 \subset \mathbb{R}^n$ son dos abiertos y $G : \Omega_1 \to \Omega_2$ es un difeomorfismo, entonces si ω es una $n-$forma de soporte compacto sobre Ω_2, se tiene que*

$$\int_{\Omega_1} G^*\omega = \pm \int_{\Omega_2} \omega,$$

donde la segunda integral toma el signo positivo si G preserva la orientación, y el negativo si no lo hace.

Ahora bien, si ω es una $n-$forma definida sobre la $n-$variedad suave M y suponemos que ω tiene soporte compacto contenido en alguna carta (U, φ), entonces $(\varphi^{-1})^*\omega$ tiene también soporte compacto en $\varphi(U)$, y luego podemos entender a dicha aplicación como definida globalmente (siendo 0 fuera de su soporte). En dicho caso, definimos la integral

$$\int_M^U \omega := \pm \int_{\mathbb{R}^n} (\varphi^{-1})^*\omega = \pm \int_{\varphi(U)} (\varphi^{-1})^*\omega,$$

donde el signo positivo si φ preserva la orientación, y negativo en otro caso.

El gran problema con esta definición es que depende, a priori, de la carta elegida. No obstante, esto no es cierto, pues la elección de signos en la definición anterior no es "al azar" como veremos a continuación:

Sea (V, ψ) otra carta. Si ψ y φ preservan la orientación o si ninguna lo hace, entonces $\psi \circ \varphi^{-1}$ es un difeomorfismo entre $\varphi(U \cap V)$ y $\psi(U \cap V)$ que preserva la orientación. Así, si ω tiene soporte compacto contenido en $U \cap V$, por 9.3 obtenemos

$$\begin{aligned} \int_{\psi(V)} (\psi^{-1})^*\omega = \int_{\psi(U\cap V)} (\psi^{-1})^*\omega &= \int_{\varphi(U\cap V)} (\psi \circ \varphi^{-1})^*(\psi^{-1})^*\omega \\ &= \int_{\varphi(U\cap V)} (\varphi^{-1})^*(\psi)^*(\psi^{-1})^*\omega \\ &= \int_{\varphi(U)} (\varphi^{-1})^*\omega. \end{aligned}$$

Si ψ y φ tienen orientaciones opuestas, entonces $\psi \circ \varphi^{-1}$ invierte la orientación, y luego haciendo el mismo cálculo obtendremos una integral con el signo negativo. No obstante, gracias a 9.3 dicho signo se neutraliza.

Ahora estamos en condiciones de poder definir la integral de $n-$formas con soporte compacto:

Definición 7.6 (Integración de formas diferenciales)**.** Sea ω una $n-$forma suave con soporte compacto contenido en M. Sea $\{(U_\alpha, \tau_\alpha)\}$ una colección de cartas que preservan orientación

y $\{\rho_\alpha\}$ una partición de la unidad subordinada al cubrimiento abierto $\{U_\alpha\}$. Así, podemos finalmente definir
$$\int_M \omega := \sum_\alpha \int_{U_\alpha} \rho_\alpha \omega.$$
La definición anterior está bien definida, es decir, no depende del cubrimiento abierto ni de la partición de la unidad sobordinada a este. La demostración de este hecho se puede encontrar en [Lee13]

Observación 7.7. Si M es una variedad orientada y denotamos por $-M$ a la variedad con la orientación opuesta, entonces
$$\int_M \omega = -\int_{-M} \omega$$
Por ello, no basta que la variedad M sea orientable, debemos escoger una orientación para poder integrar sobre ella.

Teorema 7.8 (Teorema de Stokes)**.** *Sea M una variedad orientada de dimensión n y ω una $(n-1)-$forma de M con soporte compacto. Luego*[3]*,*
$$\int_M d\omega = 0.$$

Si tenemos una métrica Riemanniana sobre nuestra variedad orientada M, podemos definir el *elemento de volumen Riemanniano* asociado a (M, g) como la única $m-$forma dV sobre M tal que para todo $q \in M$, dV_q es el elemento de volumen en la definición 5.2 para la métrica dual g_p^* sobre $T_{M,q}^*$,

Si la integral
$$\int_M dV$$
converge, su valor es positivo y será llamado el volumen de la variedad orientada de Riemann M.

8. Teoría de Hodge sobre variedades de Riemann, orientadas y compactas

Durante esta sección (M, g) será una variedad de Riemann compacta orientada de dimensión n.

Por la proposición 3.21, la métrica Riemanniana g sobre M induce un producto interno sobre el fibrado álgebra exterior $\bigwedge(T_M^*)$ que varía suavemente sobre sus fibras.

En el capítulo 5 vimos que la orientación de M induce el operador $\star$ que nos da un isomorfismo entre las p y $n-p$ formas diferenciables de M:
$$\star : \Omega^p(M) \to \Omega^{n-p}(M).$$

Dicho operador está definido puntualmente, pues dada una $p-$forma $u : M \to \bigwedge^p T^*M$ y $q \in M$, se tiene que $u_q := u(q) \in \bigwedge^p T_q^*M$, espacio donde el operador $\star$ definido en el capítulo 5 tiene sentido, pues la orientación de la variedad induce una orientación en dicho espacio, mientras que la métrica riemanniana induce un producto interno.

[3]El teorema anterior es un caso particular para las llamadas variedades sin borde (cuya definición es la que se presenta en este texto). De forma general, el teorema de Stokes establece que
$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega$$

Definición 8.1. Definamos un producto interno sobre el espacio de $p-$formas con soporte compacto contenido en M mediante

$$\langle\langle u, v\rangle\rangle := \int_M \langle u, v\rangle dV = \int_M u \wedge \star v.$$

donde la última igualdad se obtiene de las propiedades que define el operador $\star$.

Ya equipado con un producto interno, podemos estudiar los operadores adjuntos. Recordemos la siguiente definición en nuestro contexto particular.

Definición 8.2 (Adjunto formal)**.** Sea $T : \Omega^p(M) \to \Omega^{p'}(M)$ una aplicación lineal. Decimos que la aplicación lineal

$$T^\star : \Omega^{p'}(M) \to \Omega^p(M)$$

es el adjunto de T si, para todo $u \in \Omega^p(M)$ y $v \in \Omega^{p'}(M)$ formas con soporte compacto, se tiene que

$$\langle\langle Tu, v\rangle\rangle = \langle\langle u, T^\star v\rangle\rangle.$$

Definición 8.3 (Codiferencial)**.** Definimos el codiferencial $d^\star : \Omega^p(M) \to \Omega^{p-1}(M)$ como

$$d^\star := (-1)^{n(p+1)+1} \star d \star .$$

Observación 8.4. En muchos textos se denota al codiferencial como δ. La notación que adoptamos no es arbitraria. En efecto, veremos que $d^\star$ es justamente el operador adjunto de la derivada exterior, es decir, $d^\star = (d)^\star$.

Observación 8.5. Notemos que la derivada exterior d sube en 1 el grado de las formas, mientras que el codiferencial $d^\star$ lo va bajando en 1. Por ello, las composiciones $dd^\star$ y $d^\star d$ son operadores que van desde $\Omega^p(M)$ al mismo espacio $\Omega^p(M)$.

Se demuestran a continuación algunas propiedades calculatorias de la derivada exterior y su codiferencial, que serán de ayuda prontamente.

Proposición 8.6. Se tiene que $\star d^\star = (-1)^p d\star$ y $d^\star\star = (-1)^{p+1} \star d$, donde p es el grado de la forma cuando se evalúa los operadores anteriores.

Demostración.
Por la proposición 5.5 sabemos que $\star\star = (-1)^{p(n-p)}$, luego

$$\star d^\star = \star(-1)^{n(p+1)+1} \star d\star = (-1)^{n(p+1)+1} \star\star d\star = (-1)^{n(p+1)+1}(-1)^{p(n-p)} d\star = (-1)^p d\star,$$

donde la última igualdad se obtiene al separar los casos en que n sea par o impar y congruencia módulo 2. De manera análoga, se obtiene la otra igualdad

$$d^\star\star = (-1)^{n(p+1)+1} \star d \star\star = (-1)^{n(p+1)+1}(-1)^{p(n-p)} \star d = (-1)^{p+1} \star d.$$

■

Proposición 8.7. El codiferencial $d^\star$ es el operador adjunto de la derivada exterior d.

Demostración. Sean $u \in \Omega^p(M)$ una p-forma y $v \in \Omega^{p+1}(M)$ una $(p+1)$-forma. Notemos que

$$du \wedge \star v = d(u \wedge \star v) - (-1)^p u \wedge d(\star v) = d(u \wedge \star v) + u \wedge \star d^\star v,$$

donde las igualdades son gracias a las proposiciones 6.6 y 8.6 respectivamente. Luego, integrando sobre M y ocupando el Teorema de Stokes se obtiene que

$$\langle\langle du, v\rangle\rangle = \int_M du \wedge \star v = \int_M d(u \wedge \star v) + u \wedge \star d^\star v = \int_M u \wedge \star d^\star v = \langle\langle u, d^\star v\rangle\rangle$$

De forma análoga, si v fuese una $(p-1)-$forma, entonces se tiene que

$$\langle\langle u, dv\rangle\rangle = \langle\langle d^\star u, v\rangle\rangle$$

∎

Proposición 8.8. $(d^\star)^2 = 0$

Demostración.
Es directo del hecho que $d^2 = 0$, pues por definición se tiene que

$$(d^\star)^2 = \star d \star \star d \star = (-1)^{p(m-p)} \star d^2 \star = 0.$$

∎

Así como el operador Laplaciano en $\mathbb{R}^n$ es muy importante por su ubicuidad en la matemática, se define un análogo en el contexto más general de variedades, el cual cobrará importancia en lo que sigue.

Definición 8.9 (Laplaciano)**.** El *operador de Laplace-Beltrami*, o simplemente Laplaciano, se define como

$$\Delta : \Omega^p(M) \to \Omega^p(M),$$

por la fórmula

$$\Delta := d^\star d + dd^\star = (-1)^{mp+1} \star d \star d + (-1)^{m(p-1)+1} d \star d \star .$$

Dado que $d^2 = (d^\star)^2 = 0$, podemos escribir el operador de Laplace-Beltrami simplemente como

$$\Delta = (d + d^\star)^2.$$

A continuación probaremos algunas propiedades que son de utilidad del operador de Laplace-Beltrami.

Proposición 8.10. El operador estrella y el Laplaciano conmutan, es decir, $\star\Delta = \Delta\star$.

Demostración.
Es cálculo es directo de la proposición 8.6,

$$\begin{aligned}
\star\Delta &= \star[d^\star d + dd^\star] \\
&= \star d^\star d + \star dd^\star \\
&= (-1)^p d \star d - (-1)^{p+1} d^\star \star d^\star \\
&= -(-1)^{p+1}(-1)^p dd^\star \star - (-1)^{p+1}(-1)^p d^\star d \star \\
&= dd^\star \star + d^\star d \star \\
&= [d^\star d + dd^\star]\star \\
&= \Delta\star
\end{aligned}$$

∎

Observación 8.11. Notemos que la proposición 8.10 nos dice que u es armonica si y solo si $\star u$ es armonica.

Proposición 8.12. El Laplaciano es auto-adjunto, esto es, $\Delta^\star = \Delta$.

Demostración.

Es directo usando que $d^\star$ es el adjunto de d, en efecto,

$$\begin{aligned}\langle\langle \Delta u, v\rangle\rangle &= \langle\langle (d^\star d + dd^\star)u, v\rangle\rangle \\ &= \langle\langle d^\star du, v\rangle\rangle + \langle\langle dd^\star u, v\rangle\rangle \\ &= \langle\langle u, d^\star dv\rangle\rangle + \langle\langle u, dd^\star v\rangle\rangle \\ &= \langle\langle u, \Delta v\rangle\rangle\end{aligned}$$

■

Definición 8.13 (Formas armonicas)**.** Definimos el espacio de $p-$formas armonicas reales como

$$\mathcal{H}^p(M,\mathbb{R}) := \ker(\Delta : \Omega^p(M) \to \Omega^p(M)) = \{u \in \Omega^p(M) : \ \Delta u = 0\}.$$

Claramente, el espacio de formas armónicas depende de la métrica.

Observación 8.14. A pesar de la similitud notacional de $\mathcal{H}^p(M,\mathbb{R})$ con $H^p_{dR}(M,\mathbb{R})$ son a priori espacios distintos. Sin embargo, veremos que el Teorema del isomorfismo de Hodge nos dirá que estos espacios son isomorfos.

Proposición 8.15. *Sea $u \in \Omega^p(M)$ una $p-$forma, entonces*

$$u \text{ es armonica } \iff du = 0 \text{ y } d^\star u = 0.$$

Demostración. Usando que $d^\star$ es el adjunto de d se deduce que

$$\langle\langle \Delta u, u\rangle\rangle = \langle\langle (d^\star d + d^\star d)u, u\rangle\rangle = \langle\langle d^\star u, d^\star u\rangle\rangle + \langle\langle du, du\rangle\rangle,$$

luego, dado que $\langle\langle \cdot,\cdot\rangle\rangle$ es definido positivo, se sigue que $\Delta u = 0$ si y solo si $du = 0$ y $d^\star u = 0$. ■

Cuidado 8.16. *Notemos que el hecho de que si u es armónica entonces $du = d^\star u = 0$ es siempre verdadero. No obstante, el recíproco es cierto solo cuando M es compacta, pues no se puede garantizar la convergencia de las integrales (por ejemplo x sobre $\mathbb{R}$).*

El operador de Laplace-Beltrami es una generalización del operador de Laplace para funciones $\mathcal{C}^\infty$ (i.e. elementos de $\Omega^0(M)$) que conocemos de $\mathbb{R}^n$, en efecto, si consideramos la variedad $\mathbb{R}^n$ con la métrica usual, y $u = \sum_{|I|=p} u_I dx_I$, entonces se puede probar que

$$\Delta(u) = -\sum_I \sum_j \frac{\partial^2 u_I}{\partial x_j^2} dx_I.$$

Ya estamos en condiciones de poder enunciar y probar unos de los teoremas principales de la Teoría de Hodge; el **Teorema de Descomposición Ortogonal de Hodge** y el **Teorema del Isomorfismo de Hodge**.

Teorema 8.17 (Teorema de descomposición ortogonal de Hodge)**.** [4] *Sea (M,g) una variedad de Riemann compacta, orientada. Luego,*

$$\dim_{\mathbb{R}} \mathcal{H}^p(M,\mathbb{R}) < \infty,$$

y tenemos la siguiente descomposición de $\Omega^p(M)$ en suma directa de subespacios $\langle\langle\cdot,\cdot\rangle\rangle-$ortogonales

$$\Omega^p(M) = \mathcal{H}^p(M,\mathbb{R}) \oplus^\perp d(\Omega^{p-1}(M)) \oplus^\perp d^\star(\Omega^{p+1}(M)).$$

[4] En $\mathbb{R}^3$ se tiene el famoso teorema de descomposición de Helmhotz, el cual afirma que todo campo vectorial se puede escribir como suma de un campo irrotacional y otro incompresible. A pesar de que $\mathbb{R}^3$ no es compacto, exigiendo condiciones adecuadas de decaimiento en el infinito para las formas diferenciales, la descomposición de Hodge se puede considerar una generalización de la descomposición de Helmhotz a variedades diferenciables.

Dada la extensión de la demostración y los conceptos utilizados, no se presentará una demostración de la descomposición, pero puede ser encontrada en [War71]. Algo que sí haremos es verificar la ortogonalidad de la descomposición de Hodge.

Demostración. Sean $\omega \in \mathcal{H}^p(M,\mathbb{R})$, $\eta \in \Omega^{p-1}(M)$ y $\nu \in \Omega^{p+1}(M)$. Luego, usando que d y $d^\star$ son adjuntos y $d\omega = d^\star\omega = 0$ pues $\Delta\omega = 0$, se sigue que

$$\begin{aligned}\langle\langle \omega, d\eta\rangle\rangle &= \langle\langle d^\star\omega, \eta\rangle\rangle = \langle\langle 0, \eta\rangle\rangle = 0,\\ \langle\langle \omega, d^\star\nu\rangle\rangle &= \langle\langle d\omega, \nu\rangle\rangle = \langle\langle 0, \nu\rangle\rangle = 0,\\ \langle\langle d\eta, d^\star\nu\rangle\rangle &= \langle\langle d^2\eta, \nu\rangle\rangle = \langle\langle 0, \nu\rangle\rangle = 0,\end{aligned}$$

por lo tanto, ω, $d\eta$, $d^\star\nu$ son ortogonales entre sí. ∎

Observación 8.18. Decimos que una forma es coexacta si es que es $d^\star$-exacta (i.e., existe $\nu \in \Omega^{p+1}(M,\mathbb{R})$ tal que $\omega = d^\star\nu$). En este sentido, el teorema de descomposición ortogonal de Hodge nos dice que toda p-forma la podemos descomponer ortogonalmente y de manera única en tres partes: armonica, exacta y coexacta.

Con con este teorema a disposición somos capaces de probar varias consecuancias importantes.

Recuerdo 8.19. *Recordemos que el p-ésimo grupo de cohomología de De Rham es el cociente*

$$H^p_{dR}(M,\mathbb{R}) = \frac{\{p\text{-formas cerradas en } M\}}{\{p\text{-formas exactas en } M\}}$$

En particular, dos elementos $[\omega], [\omega'] \in H^p_{dR}(M,\mathbb{R})$ son iguales si es que $\omega - \omega'$ es una forma exacta.

Teorema 8.20 (Teorema del isomorfismo de Hodge)**.** *Sea (M, g) una variedad de Riemann compacta y orientada. Luego, la aplicación*

$$\mathcal{H}^p(M,\mathbb{R}) \to H^p_{dR}(M,\mathbb{R}),$$

dada por $\omega \mapsto [\omega]$ es un isomorfismo lineal entre espacios vectoriales. En otras palabras, cada clase de cohomología real en M tiene un representante armónico único. En particular,

$$\dim_{\mathbb{R}} H^p_{dR}(M,\mathbb{R}) < \infty.$$

Demostración. Primero notemos que toda forma armonica $\omega \in \mathcal{H}^p(M,\mathbb{R})$ es en particular cerrada, luego la aplicación $\omega \mapsto [\omega]$ entre $\mathcal{H}^p(M,\mathbb{R})$ a $H^p_{dR}(M,\mathbb{R})$ está bien definida.

Es directo ver que el morfismo es inyectivo, pues si ω es una $p-$forma armonica tal que en su clase de cohomologia de De Rham es 0, se tendrá que ω es exacta, es decir, existe $\eta \in \Omega^{p-1}(M)$ tal que $\omega = d\eta$, luego

$$\langle\langle \omega, \omega\rangle\rangle = \langle\langle d\eta, \omega\rangle\rangle = \langle\langle \eta, d^\star\omega\rangle\rangle = \langle\langle \eta, 0\rangle\rangle = 0,$$

por lo tanto, $\omega = 0$, probando así la inyectividad.

La sobreyectividad se sigue del teorema de descomposición de Hodge. Sea $\omega \in \Omega^p(M)$ una $p-$forma cerrada, y sea $\omega = \omega' + d\eta + d^\star\nu$ su descomposición de Hodge, luego tomando la derivada exterior se obtiene que

$$d\omega = d(\omega' + d\eta + d^\star\nu) = d\omega' + d^2\eta + dd^\star\nu,$$

pero ω es cerrada, ω' armónica (y en particular cerrada), y sabemos que $d^2 = 0$, se sigue entonces que

$$0 = dd^\star\nu,$$

y así,
$$0 = \langle\langle dd^\star\nu, \nu\rangle\rangle = \langle\langle d^\star\nu, d^\star\nu\rangle\rangle,$$
y por lo tanto, $d^\star\nu = 0$, luego
$$\omega = \omega' + d\eta \Longleftrightarrow \omega - \omega' = d\eta,$$
es decir, la diferencia entre ω y ω' es exacta y luego pertenece al grupo de cohomología $H^p_{dR}(M, \mathbb{R})$ y así $\omega' \mapsto [\omega]$, probando la sobreyectividad. Así, tenemos el siguiente isomorfismo
$$\mathcal{H}^p(M, \mathbb{R}) \cong H^p_{dR}(M, \mathbb{R}),$$
y por el teorema de descomposición de Hodge 8.17 se obtiene que, en particular,
$$\dim_{\mathbb{R}} H^p_{dR}(M, \mathbb{R}) < \infty.$$
■

El Teorema del isomorfismo de Hodge nos permite probar de manera sencilla el teorema de dualidad de Poncaré, un resultado puramente de cohomología.

Recuerdo 8.21. *Sean V, W espacios vectoriales de dimensión finita, y sea*
$$\langle\cdot,\cdot\rangle : V \times W \to \mathbb{R}$$
bilineal y no degenerada. Entonces $V \cong W^*$ y $W \cong V^*$ vía
$$i : V \to W^*, \quad i(v)(w) := \langle v, w\rangle \quad y \quad j : W \to V^*, \quad j(w)(v) := \langle v, w\rangle.$$

Teorema 8.22 (Dualidad de Poincaré)**.** *Sea M una variedad suave, compacta y orientada $n-$dimensional. Tenemos el siguiente isomorfismo*
$$H^{n-p}_{dR}(M, \mathbb{R}) \cong H^p_{dR}(M, \mathbb{R})^\vee.$$

Demostración. Consideremos la aplicación
$$([\omega], [\eta]) \mapsto \int_M \omega \wedge \eta, \quad \forall [\omega] \in H^p_{dR}, [\eta] \in H^{m-p}_{dR}.$$
No es difícil ver que está bien definida (i.e. no depende del representante) y claramente es bilineal. Si es que probamos que es no degenerada el resultado se seguirá por el recuerdo 8.21, pues los espacios vectoriales $H^p_{dR}(M, \mathbb{R})$ y $H^{n-p}_{dR}(M, \mathbb{R})$ son de dimensión finita por 8.20.

Sea $[\omega] \in H^p_{dR}$ un elemento no nulo del grupo de cohomología de De Rham, sabemos por el Teorema del isomorfismo de Hodge 8.20 que ω es una p-forma armonica, luego $\star\omega$ también lo es por la observación 8.11, así que nuevamente $[\star\omega] \in H^{n-p}_{dR}$. Luego,
$$([\omega], [\star\omega]) \mapsto \int_M \omega \wedge \star\omega = \langle\langle \omega, \omega\rangle\rangle = ||\omega||^2 \neq 0,$$
es decir, la aplicación bilineal es no degenerada, concluyendo la demostración. ■

Notemos que la demostración anterior nos dice que el operador $\star$ induce el isomorfismo
$$\star : \mathcal{H}^p(M, \mathbb{R}) \cong \mathcal{H}^{n-p}(M, \mathbb{R})$$
para cualquier variedad de Riemann suave, compacta y orientada. Luego, vía el Teorema del isomorfismo de Hodge se obtiene el isomorfismo a nivel de cohomología de De Rham:
$$H^p_{dR}(M, \mathbb{R}) \cong H^{n-p}_{dR}(M, \mathbb{R}).$$

Es importante notar que estos últimos isomorfismos no son canónicos, en contraste con el teorema de dualidad de Poincaré, cuyo isomorfismo sí es canónico y solo depende de la orientación.

9. Aplicaciones

9.1. Electromagnetismo. En esta sección veremos cómo aplicar los operadores que hemos visto de la Teoría de Hodge a electromegnetismo. Concretamente, mostraremos que las ecuaciones de Maxwell sobre $\mathbb{R}^4$, con la métrica Lorentziana, se pueden escribir de manera compacta en términos de formas diferenciables y el operador $\star$. Posteriormente, veremos algunas consecuencias en variedades de Lorentz generales.

Sobre $\mathbb{R}^4$, considere las coordenadas (x, y, z, t). Definimos

$$F = E_1 dx \wedge dt + E_2 dy \wedge dt + E_3 dz \wedge dt + B_1 dy \wedge dz + B_2 dz \wedge dx + B_3 dx \wedge dy,$$

la **fuerza de Lorentz** donde $E = (E_1, E_2, E_3)$ y $B = (B_1, B_2, B_3)$ son el **campo eléctrico** y **magnético** respectivamente. Sea además,

$$j = J_1 dx + J_2 dy + J_3 dz - \rho dt,$$

y $J = (J_1, J_2, J_3)$ la **densidad de corriente**. Sea e_1, e_2, e_3, e_4 la base canonica de $\mathbb{R}^4$ y definamos la metrica $g : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ por

$$g = de_1 \otimes de_1 + de_2 \otimes de_2 + de_3 \otimes de_3 - de_4 \otimes de_4.$$

A continuación se presentarán las ecuaciones de Maxwell escritas en el lenguaje de formas diferenciales. Dicha demostración no la presentaremos en este texto, principalmente porque involucra muchos cálculos engorrosos. De todas formas, si el lector lo desea, puede encontrar la demostración en [Ara10].

Teorema 9.1 (Ecuaciones de Maxwell)**.** *Las ecuaciones de Maxwell*

$$\begin{aligned} \nabla \cdot E &= \rho \\ \nabla \cdot B &= 0 \\ \nabla \times E + \frac{\partial B}{\partial t} &= 0 \\ \nabla \times B - \frac{\partial E}{\partial t} &= J \end{aligned}$$

son equivalentes a

$$dF = 0 \quad y \quad d^{\star} F = j.$$

Es importante recalcar que la segunda forma de expresar las ecuaciones de Maxwell no existe referencia a la estructura de $\mathbb{R}^4$, por lo cual es un buen punto de partida al intentar generalizar esta formulación a variedades de Lorentz.

Por otro lado, para poder definir lo que es una variedad de Lorentz y extender nuestros resultados, necesitamos la siguiente definición:

Definición 9.2 (métrica y variedad de Lorentz)**.** [5] Sea M una variedad suave y sea g un campo 2-tensorial covariante, suave, no degenerado y simétrico[6]. Una vez escogidas cartas locales, sabemos que g admite localmente una escritura local

$$g_p = g_{ij}(p) dx^i \otimes dx^j.$$

Si formamos la matriz $(g_{ij}(p))$ de coeficientes, dada la simetría de g, la matriz anterior es simétrica y luego todos sus valores propios son reales. Así, decimos que g es un **métrica**

[5] Las variedades de Lorentz son un caso particular de lo que se conoce como variedades pseudo-riemannianas, cuya única diferencia es que la métrica no es definida positiva.

[6] Notar que al definir métrica riemanniana no se exige, a primera vista, que g sea no degenerada. No obstante, esto viene codificado en el hecho de que sea **definida positiva**.

lorentziana si para cada $p \in M$ la matriz $(g_{ij}(p))$ define una forma bilineal de signatura $(n-1,1)$, ie, posee exactamente un valor propio negativo. Decimos que una variedad M es una **variedad de Lorentz** si posee una métrica lorentziana.

Observación 9.3. Sea $p \in M$ y g es un campo 2-tensorial covariante, suave, no degenerado y simétrico. Si entendemos a g_p como una forma cuadrática, gracias al teorema de Sylvester podemos afirmar que existe una base $\{e_1, ..., e_n\}$ de T_pM positivamente orientada de tal suerte que

$$g_p = \sum_{i=1}^{n} c_i de_i \otimes de_i,$$

donde $c_i = \pm 1$. En particular, si g es una métrica Riemanniana entonces $c_i = 1$ para cada i, y si g es una métrica Lorentziana entonces existe un único i tal que $c_i = -1$.

Veamos ahora algunas propiedades de las variedades de Lorentz:

Definición 9.4. Sea (M, g) una variedad de Lorentz, definimos el conjunto de transformadas de Lorentz como

$$\mathcal{L} = \left\{\psi \in C^\infty(M, M) : \ g_p(v, w) = g_{\psi(p)}(\psi^* v, \psi^* w), \quad \forall p \in M, \ v, w \in T_pM\right\}$$

Proposición 9.5. *Si $\psi \in \mathcal{L}$, y $\omega \in \Omega^k(M)$ una $k-$forma, entonces $\star\psi^*\omega = \psi^* \star \omega$.*

Demostración.
Sea $p \in M$ y $\{e_1, \ldots, e_n\}$ una base $g-$ortonormal para g_p, denotemos $a_i := d\psi_p e_i \in T_{\psi(p)}M$ y c_i como en 9.3. Luego,

$$g_{\psi(p)}(a_i, a_j) = g_p(e_i, e_j) = c_i \delta_{ij},$$

y así $\{a_1, \ldots, a_n\}$ es una base $g-$ortonormal para $g_{\psi(p)}$.

Probemos el resultado para una base de $\Omega^k(M)$. Sea $\sigma \in S_n$, con $\sigma_1 < \cdots < \sigma_k$ y $\sigma_{k+1} < \cdots < \sigma_n$. Entonces $\omega = de_{\sigma(1)} \wedge \cdots \wedge de_{\sigma(k)}$,

$$\begin{aligned}
\star\omega &= (-1)^{\varepsilon(\sigma)} c_{\sigma(1)} \cdots c_{\sigma(k)} de_{\sigma(k+1)} \wedge \cdots \wedge de_{\sigma(n)} \\
\psi^* \star \omega &= (-1)^{\varepsilon(\sigma)} c_{\sigma(1)} \cdots c_{\sigma(k)} da_{\sigma(k+1)} \wedge \cdots \wedge da_{\sigma(n)} \\
\psi^*\omega &= da_{\sigma(1)} \wedge \cdots \wedge da_{\sigma(k)} \\
\star\psi^*\omega &= (-1)^{\varepsilon(\sigma)} c_{\sigma(1)} \cdots c_{\sigma(k)} da_{\sigma(k+1)} \wedge \cdots \wedge da_{\sigma(n)}
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\star\psi^*\omega = \psi^* \star \omega$. ■

Ahora somos capaces de probar la **invarianza de Lorentz de las ecuaciones de Maxwell**. Dado que este resultado es referente a las ecuaciones de Maxwell, M será una variedad de Lorentz $4-$dimensional. Para probar dicho resultado, usaremos un pequeño pero inocente lema, el cual nos dice que el pullback de conmuta con la derivada exterior, es decir, si ω es una forma diferenciable y $\psi \in C^\infty(M)$, entonces $d\psi^*\omega = \psi^* d\omega$.

Teorema 9.6. Sea (M, g) una variedad de Lorentz, y $F \in \Omega^2(M)$, $j \in \Omega^1(M)$ tales que $dF = 0$ y $d^\star F = j$. Si $\psi \in \mathcal{L}$, luego $d\psi^* F = 0$ y $d^\star \psi^* F = \psi^* j$.

Demostración.
Usando la proposición anterior:

$$\begin{aligned} d^\star \psi^* F = (-1)^{8+1+1} \star d \star \psi^* F = \star d\psi^* \star F &= \star \psi^*(d \star F) \\ &= \psi^* \star d \star F = \psi^* d^\star F \end{aligned}$$

Probando así que las ecuaciones de Maxwell son invariantes bajo las transformaciones de Lorentz. ■

9.2. Ecuaciones diferenciales parciales. Un inmediato pero sorprendente resultado de la teoría de Hodge, es que nos da una equivalencia de cuándo la ecuación $\Delta\omega = \alpha$ tiene solución. En efecto, gracias a que el laplaciano Δ es autoadjunto, entonces $\ker(\Delta) = \mathrm{Im}(\Delta)^\perp$, pues si $u \in \ker(\Delta) = \mathcal{H}^p(M, \mathbb{R})$ y $v \in \Omega^p(M)$ entonces

$$0 = \langle\langle \Delta u, v \rangle\rangle = \langle\langle u, \Delta^\star v \rangle\rangle = \langle\langle u, \Delta v \rangle\rangle$$

y luego $u \in \mathrm{Im}(\Delta)^\perp$. De manera completamente análoga, si $\Delta v \in \mathrm{Im}(\Delta)$ y $u \in \mathrm{Im}(\Delta)^\perp$ entonces

$$0 \overset{\text{def}}{=} \langle\langle u, \Delta v \rangle\rangle = \langle\langle \Delta^\star u, v \rangle\rangle = \langle\langle \Delta u, v \rangle\rangle.$$

Dada la arbitrariedad de v y el hecho de que $\langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle$ es producto interno, necesarimente $\Delta u = 0$, ie, $u \in \ker(\Delta)$. Por otra parte, el teorema de descomposición de Hodge nos dice que

$$\Omega^p(M) = \mathcal{H}^p(M, \mathbb{R}) \oplus^\perp d(\Omega^{p-1}(M)) \oplus^\perp d^\star(\Omega^{p+1}(M)).$$

Se sigue de los dos cálculos anteriores que

$$d(\Omega^{p-1}(M)) \oplus^\perp d^\star(\Omega^{p+1}(M)) = \mathrm{Im}(\Delta)$$

y que

$$\Omega^p(M) = \ker(\Delta) \oplus^\perp \mathrm{Im}(\Delta).$$

Así,

$$\begin{aligned} \Delta\omega = \alpha \text{ tiene solución en } \Omega^p(M) &\iff \alpha \in \mathrm{Im}(\Delta) \\ &\iff \alpha \in \ker(\Delta)^\perp \end{aligned}$$

Referencias

[Cat07] Cataldo, M.A. (2007). *The Hodge theory of projective manifolds.*

[Lee13] Lee, John. (2012). *Introduction to smooth manifolds. 2nd revised ed.*

[Lim14] Lima Elon. (2014). *Análise Real, v.3: Análise Vetorial*, IMPA, Rio de Janeiro.

[War71] Warner, Frank. (2021). Foundations of differentiable manifolds and Lie groups / Frank W. Warner. SERBIULA (sistema Librum 2.0).

[Ara10] Solomon Akaraka Owerre. (2010). *Maxwell's Equations in terms of Differential Forms.* African Institute for Mathematical Sciences (AIMS)

[Brac11] Bracken, Paul. (2011). *The Hodge-de Rham Decomposition Theorem and an Application to a Partial Differential Equation.* Acta Mathematica Hungarica.

[Nak18] Nakahara, Mikio. (2018). Geometry, Topology and Physics.

Departamento de Matemática, Universidad Técnica Federico Santa María, Valparaíso, Chile.

Email address: sebastian.fuenteso@usm.cl, mario.pastrana@usm.cl, ernesto.treumun@usm.cl