Proyecto Curvas Algebraicas: Grupos Algebraicos
MAT426 2021-2

Profesor: Pedro Montero
Patricio Rubilar y Cristián Pérez

Viernes, 10 de Diciembre del 2021

1. Motivación y Preliminares

1.1. Motivación:

El objetivo de los Grupos Algebraicos es poder ver cómo dotar de estructura de grupo a las Variedades Algebraicas, i.e, poder cocientar, estudiar sub-grupos normales, acciones de grupos, etc.
Una de las importancias que tiene este objeto matemático, es que permite dar estudio a lo que son las Álgebras de Lie el cual tiene interesantes aplicaciones en la física.

Resumen : Definiremos los grupos algebraicos , presentando algunas propiedades importantes y demostrando algunos resultados , veremos los grupos algebraicos afines , morfismos de grupos algebraicos , grupos algebraicos lineales (aquí veremos un resultado muy importante que caracterizara a los grupos algebraicos) , acciones de grupos algebraicos en una variedad algebraica , algebras de Lie de un grupo algebraico , cocientes (categorico y de chevalley) y finalmente presentaremos un resultado que dará pie a definir las variedades abelianas.

1.2. Preliminares:

En esta sección se recopilan definiciones y resultados que son utilizados de forma recurrente en este texto. Además de estas, se utilizarán diversos resultados de álgebra lineal, teoría de grupos y curvas algebraicas. Se detallan referencias útiles tanto para estos tópicos como para lo que se aborda en este apunte en las referencias del capítulo que se encuentran al final del mismo.

[Definición 1.3.1 Morfismo de Grupos] Un morfismo de grupos (u homomorfismo) es una aplicación $f : G \to G$‘ entre grupos tal que

$$f(g_1g_2) = f(g_1)f(g_2) \ para \ g_1, g_2 \in G$$

[Definición 1.3.2 Cociente] Sea G un grupo y $H \leqslant G$ un subgrupo, entonces $G/\sim$ es el cociente formado por las clases laterales izquierdas de G denotadas por

$$G/H = \{gH, g \in G\}$$

Análogamente se definen las clases laterales derechas

$$H \setminus G = \{Hg, g \in G\}$$

Definición 1.3.3 : el indice de un subgrupo H de un grupo G es el cardinal del cociente G/H y denotamos por $[G : H]$ a esta cantidad.

[1.3.4 Subgrupo Normal] Sea G un grupo y $H \leqslant G$ un subgrupo. Decimos que H es un sub-grupo normal de G y escribimos $H \trianglelefteq G$ si:

$$"Para \ todo \ g \in G \ y \ todo \ h \in H, \ ghg^{-1} \in H"$$

Definición 1.3.5 : El subgrupo conmutador de un grupo G es el subgrupo generado por todos los elementos de la forma $[a, b] = aba^{-1}b^{-1}$ denominado conmutador de a con b
[Definición 1.3.6 Acción de Grupo] Una Acción (izquierda) de un grupo G sobre un conjunto X $\neq \emptyset$ es :

$$G \times X \to X$$

$$(g, x) \mapsto gx$$

[Definición 1.3.7 Órbita] Sea $G \curvearrowright X$ una acción. Diremos que la clase de $x \in X$ es llamada la órbita de $x \in X$

$$Gx = \{gx, g \in G\}$$

[Definición 1.3.8 Estabilizador] Dada $G \curvearrowright X$ una acción y $x \in X$, el estabilizador de x es el subgrupo de G

$$G_x = \{g \in G \ tal \ que \ gx = x\}$$

[Definición 1.3.9 Acción Transitiva] Dada $G \curvearrowright X$ una acción. Decimos que la Acción es Transitiva si:

$$Posee\ solo\ 1\ orbita,\ i.e,\ que\ para\ todos\ x, y \in X\ existe\ g \in G\ tq\ y = gx.$$

Definición 1.3.10 : X^g es el conjunto de los puntos fijos de X por g , i.e , $X^g = \{x \in X \mid gx = x\}$.
[Definición 1.3.11 Elemento Integral y Clausura Integral] Sea B un anillo conmutativo y A un sub-anillo. Diremos que un elemento $b \in B$ es integral sobre A si existen $n \in \mathbb{N}$ y a_j tal que

$$b^n + a_{n-1}b^{n-1} + ... + a_1 b + a_0 = 0$$

i.e, que b es una solución para el polinomio mónico sobre A.
Se dice que el conjunto de todos los elementos $b \in B$ que son integrales sobre A es llamado la clausura integral de A en B.
Observación 1.3.12: Un anillo conmutativo R contenido en un anillo conmutativo S se dice integralmente cerrado en S si R es igual a la clausura integral de R en S.
[1.3.13 Grupo Anillo] Sea G un grupo multiplicativo y R un anillo. El grupo anillo de G sobre R, que se denota $R[G]$ (ó RG) es el conjunto de todas las aplicaciones $f : G \to R$ de soporte finito donde el producto módulo escalar con $\alpha \in R$ está definido por el mapeo $x \mapsto \alpha f(x)$ y la suma módulo grupo de dos aplicaciones está definido por el mapeo $x \mapsto f(x) + g(x)$.
Para transformar el grupo aditivo $R[G]$ en un anillo, se define el producto de f y g como el mapeo:

$$x \mapsto \sum_{uv=x} f(u)g(v) = \sum_{u \in G} f(u)g(u^{-1}x)$$

Observación 1.3.14 : Notemos que si R es un cuerpo K, entonces la estructura de módulo del grupo anillo $R[G]$ es de un espacio vectorial sobre K.
Definición 1.3.15 : Una coalgebra sobre un cuerpo K es un espacio vectorial C sobre K junto con funciones K-lineales $\Delta : C \to C \otimes C$ y $\varepsilon : C \to K$ tales que
1. $(id_C \otimes \Delta)\ o\ \Delta = (\Delta \otimes id_C)\ o\ \Delta$
2. $(id_C \otimes \varepsilon)\ o\ \Delta = id_C = (\Delta\ o\ id_C)\ o\ \Delta$
Δ es llamado multiplicación (ó coproducto) de C y ε counidad de C.

Definición 1.3.16 : $(B, \bigtriangledown, \eta, \Delta)$ es una bialgebra sobre K si :
B es un K-e.v. , existen aplicaciones K-lineales (multiplicación) $\bigtriangledown : B \otimes B \to B$ y una unidad $\eta : K \to B$ tales que $(B, \bigtriangledown, \eta)$ es un algebra asociativa con unidad . Existen aplicaciones K-lineales (coproducto) $\Delta : B \to B \otimes B$ y counidad $\varepsilon : B \to K$ tales que (B, Δ, ε) es una coalgebra.
Y se cumplen las siguientes condiciones de compatibilidad :
(1) $\Delta\ o \bigtriangledown = (\bigtriangledown \otimes \bigtriangledown) o (id \otimes \tau \otimes id) o (\Delta \otimes \Delta)$, donde $\tau : B \otimes B \to B \otimes B$ es la aplicación lineal que viene dada por $\tau(x \otimes y) = y \otimes x$, $\forall x, y \in B$.
(2) $\varepsilon\ o \bigtriangledown = \varepsilon \otimes \varepsilon$
(3) $\eta \otimes \eta = \Delta o \eta$
(4) $\varepsilon\ o\ \eta = id$
Definición 1.3.17 : Un algebra de Lie $\mathfrak{a}$ es un e.v. sobre un cuerpo k junto con una operación binaria $[.,.] : \mathfrak{a} \otimes \mathfrak{a} \to \mathfrak{a}$ llamada corchete de Lie (ó bracket de Lie) que satisface las siguientes propiedades : es bilineal
satisface la identidad de jacobi : $[[x, y], z] + [[z, x], y] + [[y, z], x] = 0$
$[x, x] = 0$

Ejemplo 1.3.18 : $\mathbb{R}^3$ con corchete de Lie igual al producto cruz es un algebra de Lie.

Teorema 1.3.19 : Sea $\varphi : X \to Y$ un morfismo dominante de variedades irreducibles, y $r = dimX - dimY$. Entonces
(i) $Im(\varphi)$ contiene un subojunto abierto U de Y.
(ii) Si todos los anillos locales de los puntos en Y son integralmente cerrados, entonces podemos escoger U definido en (i) el cual sigue la siguiente propiedad: Si $W \subset Y$ es un sub-conjunto cerrado irreducible el cual "meets"U, y Z es un componente de $\varphi^{-1}(W)$ el cual "meets"$\varphi^{-1}(U)$, entonces $dimZ = dimW + r$.
Teorema 1.3.20 : Sea $\varphi : X \to Y$ un morfismo de variedades. Entonces φ mapea conjuntos constructibles en conjuntos constructibles. En particular $Im(\varphi)$ es constructible.
Teorema 1.3.21 : Sea $\varphi : X \to Y$ un morfismo dominante de variedades irreducibles, y $r = dimX - dimY$. Asumamos que para cada sub-conjunto cerrado irreducible $W \subset Y$ son todos componentes irreducibles de $\varphi^{-1}(W)$ tienen dimensión $r + dimW$. Entonces φ es abierto.
Teorema 1.3.22 . Sea $\varphi : X \to Y$ un morfismo de variedades irreducibles.
(i) Asumamos que $x \in X$ e $y = \varphi(x) \in Y$ son puntos simples y que $d\varphi_x$ es sobreyectiva. Entonces φ es un morfismo

dominante separable.
(ii) Asumamos que φ es un morfismo dominante separable. Luego los puntos simples $x \in X$ con $\varphi(x)$ simple y $d\varphi_x$ sobreyectiva forman un sub-conjunto abierto no-vacío de X.
Proposición 1.3.23. Si $f : X \to Y$ es una función continua , entonces f lleva subconjuntos irreducibles de X a subconjuntos irreducibles de Y.
Proposición 1.3.24: Si un e.t. X es conexo , entonces los únicos subconjuntos abiertos y cerrados a la vez son X y $\emptyset$.
Definición 1.3.25: Un subconjunto D de un e.t. X se dice que es denso en X si $\overline{D} = X$.
Definición 1.3.26 : Un subconjunto de un e.t. X se dice que es localmente cerrado si es la intersección de un cerrado y un abierto de X. **Definición 1.3.27:** Un subconjunto de un e.t. X se dice que es constructible si es unión finita de subconjuntos localmente cerrados de X
Definición 1.3.28: Una variedad algebraica afín sobre un cuerpo k es un espacio anillado $(X, \mathscr{O}_X)$ que es isomorfo (en la categoría de espacios anillados en k-algebras) a un cerrado de Zariski de un espacio afín junto con su haz de funciones regulares.
Definición 1.3.29: Una variedad algebraica (reducida) sobre k es un espacio anillado $(X, \mathscr{O}_X)$ t.q. :
(1) X es un e.t. noetheriano .
(2) todo punto de X admite una vecindad abierta $U \subseteq X$ t.q. el espacio anillado $(U, \mathscr{O}_U)$ es una variedad algebraica afín , donde $\mathscr{O}_U = \mathscr{O}_X|_U$. En tal caso decimos que U es un abierto afín de X.
Definición 1.3.30: Sean X e Y dos variedades algebraicas . Una función continua $f : X \to Y$ es un morfismo regular si $\forall V \subseteq Y$ abierto ,$\forall u \in \mathscr{O}_Y(V)$, $f^*(u) \in f_*\mathscr{O}_X(V) = \mathscr{O}_X(f^{-1}(V))$.
Definición 1.3.31: Decimos que un morfismo regular $f : X \to Y$ entre variedades algebraicas es un isomorfismo (ó también un morfismo birregular) si f es una función biyectiva y $f^{-1} : Y \to X$ es un morfismo regular.
Definición 1.3.32: Un morfismo de variedades algebraicas $(X, \mathscr{O}_X) \to (Y, \mathscr{O}_Y)$ es un morfismo entre los espacios anillados subyacentes.
Proposición 1.3.33: Todo morfismo de variedades algebraicas es un morfismo regular , entonces dos variedades algebraicas son isomorfas si existe un morfismo birregular entre ellas.
Proposición 1.3.34: Sea X una variedad algebraica . Entonces todo abierto y todo cerrado de X posee una estructura inducida de variedad algebraica ($(U, \mathscr{O}_U)$, donde $\mathscr{O}_U = \mathscr{O}_X|_U$) .
Proposición 1.3.35: los singleton de las variedades algebraicas son cerrados . (ya que en un espacio afín , un punto $(a_1, ..., a_n)$ es la única raíz de todos los polinomios $x_1 - a_1, ..., x_n - a_n$).

Definición 1.3.36: Sea X una variedad algebraica . Decimos que X es una variedad algebraica separada si la diagonal $\Delta X := \{(x, x) \mid x \in X \}$ es un cerrado de Zariski de $X \times X$ con respecto a la topología dada por

Consideramos los abiertos afines $\{U_i\}_{i\in I}$ de X , sabemos que $U_i \times U_j$ es una variedad algebraica afín , luego , definimos la siguiente topología en $X \times X$:
Un abierto de $X \times X$ es un subconjunto t.q. su intersección con cada $U_{ij} = U_i \times U_j$ es abierta en U_{ij}.

Proposición 1.3.37: Los conjuntos constructibles de una variedad algebraica contiene a un abierto denso de su clausura.

Definición 1.3.38: Sea $\mathscr{F}$ un prehaz en un e.t. X . El tallo de $\mathscr{F}$ en un punto $x \in X$ está dado por

$$\mathscr{F}_x := \varinjlim_{U \ni x} \mathscr{F}(U) = \Big(\coprod_{U \subseteq X \; abto. \; t.q. \; x \in U} \mathscr{F}(U) \Big) / \sim$$

, donde $\forall s \in \mathscr{F}(U)$ y $t \in \mathscr{F}(V)$ se tiene que $(s, U) \sim (t, V)$ en $\mathscr{F}_x$ si existe $W \subseteq U \cap V$ abierto t.q. $x \in W$ y t.q. $s|_W = t|_W$ en $\mathscr{F}(W)$.
Si U es una vecindad abierta del punto $x \in X$ y $s \in \mathscr{F}(U)$ es una sección de $\mathscr{F}$ sobre U , entonces denotamos por $s_x = [(s, U)]$ a la clase de s en el tallo $\mathscr{F}_x$ y lo llamamos el germen de la sección s en el punto $x \in X$.
Sea X una variedad algebraica y $x \in X$ un punto . Recordemos que el tallo $\mathscr{O}_{X,x}$ de gérmenes de funciones regulares en $x \in X$ es una k-algebra que posee un único ideal maximal
$\mathfrak{m}_x = \{f \in \mathscr{O}_{X,x} \mid f(x) = 0\}$ i.e. , $\mathscr{O}_{X,x}$ es un anillo local , donde $\mathscr{O}_{X,x}/\mathfrak{m}_x \cong k$.
Definición 1.3.39: Un vector tangente en x (también llamado derivación en x) es una aplicación k-lineal $D : \mathscr{O}_{X,x} \to k$ que cumple la regla de leibnitz
$D(fg) = f(x)D(g) + g(x)D(f)$, $\forall f, g \in \mathscr{O}_{X,x}$. Además definimos el espacio tangente (de Zariski) en el punto $x \in X$ como el k-espacio vectorial dado por
$T_xX := \{D : \mathscr{O}_{X,x} \to k \; vector \; tangente \; en \; x \in X\}$

Definición 1.3.40: Sea $f : X \to Y$ un morfismo regular , y sea $x \in X$. Entonces, el morfismo de k-algebras

$f^* : \mathscr{O}_{Y,f(x)} \to \mathscr{O}_{X,x}$, $u \to u\ f$ induce una aplicación k-lineal
$d_x f : T_x X \to T_{f(x)} Y$ llamada el diferencial de f en x (ó derivada de f en x).

Observación 1.3.41 Cuando nosotros usemos el espacio tangente $T_e G$ con G un grupo algebraico y e su identidad , las derivaciones X tendrán en su dominio a clases de funciones $[f]$ (en el tallo de $\mathscr{O}_G$ en e) , pero a veces simplemente las consideraremos como funciones $f \in \mathscr{O}_G(G)$ haremos ese abuso de notación , pero más aún , a veces estaremos considerando a funciones $[f] \in k[G]/I(H)$ (con H un subgrupo cerrado de G) que entonces vista como elementos de un tallo de e seria la clase $[[f]]$, y en muchos de esos casos también nos referiremos a la clase de la clase de f como f.
Sea k un cuerpo fijo. Dada una extensión de cuerpos $k \subseteq K$ (i.e. , k es un subcuerpo de K) , decimos que un conjunto $B \subseteq K$ es una base de trascendencia del cuerpo K sobre k si :
(1) los elementos de B son algebraicamente independientes sobre k (i.e. , los elementos de B no verifican ninguna ecuación polinomial no trivial con coeficientes en k) .
(2) la extensión de cuerpos $k(B) \subseteq K$ es algebraica (i.e. todo elemento de K es la raíz de algún polinomio no nulo con coeficientes en $k(B)$) .
Más aún , si $K = k(x_1, ..., x_r)$ es una extensión de k finitamente generada (i.e. , K se obtiene al agregar a k finitos elementos $x_1, ..., x_r \in K$) entonces : (i) el cuerpo K posee una base de trascendencia finita.
(ii) Dos bases de trascendencia poseen la misma cantidad de elementos.
Dicho cardinal se llama el grado de trascendencia de K sobre k , y se denota $tr.deg_k(K)$.

Definición 1.3.42: Sea X una variedad algebraica. Si X es irreducible , entonces definimos su dimensión mediante $\dim(X) := tr.deg_k(k(X))$, i.e. , el grado de trascendencia del cuerpo de funciones racionales de X sobre k.
En general , si $X = X_1 \cup ... \cup X_m$ son las componentes irreducibles de X , definimos $\dim(X) := \text{máx}_{1 \leq i \leq m} \dim(X_i)$
En particular , decimos que X es de dimensión pura d si $\dim(X_i) = d$ para cada $i = 1, ..., m$ **Definición 1.3.43:** $\dim_x(X) = \text{máx}\{\dim(X_i)\ |X_i \subset X esunacomponenteirreduciblet.q.x \in X_i\ \}$ Es la dimensión de X en x
Observación Importante !!! (1.3.44) Asumiremos que todos las variedades algebraicas con las que trabajemos serán separadas (a menos que se diga explicitamente lo contrario) aunque tal véz esto no sea estrictamente necesario para algunos resultados .
Definición 1.3.45: Sea X una variedad algebraica. Decimos que $x \in X$
(1) es un punto suave si $\dim_x(X) = dim_k(T_x X)$
(2) es un punto singular si $\dim_x(X) < dim_k(T_x X)$
Una variedad algebraica es suave si todos sus puntos son suaves , y es singular si existe un punto singular , i.e. , sino es suave .

Teorema 1.3.46 : Sea $f : X \to Y$ morfismo regular sobreyectivo y cerrado entre variedades algebraicas. Sunpongamos que .
(1) Y es irreducible ,y que
(2) Todas la fibras de f son irreducibles de la misma dimensión $d \in \mathbb{N}$. Entonces X es irreducible y $\dim(X) = \dim(Y) + d$.
Definición 1.3.47 : Sea X una variedad algebraica . Diremos que X es una variedad algebraica proyectiva si es isomorfa a una subvariedad cerrada de algún espacio proyectivo $\mathbb{P}^n$. Más generalmente, una variedad algebraica quasi-proyectiva es una variedad algebraica isomorfa a un abierto de Zariski de una variedad algebraica proyectiva.

2. Grupos Algebraicos

Definición 2.1: Un **grupo algebraico** es una variedad algebraica X junto con dos morfismos regulares

$$\begin{array}{c} m : X \times X \ \to \ X \quad \text{e} \\ \iota : X \ \to X \end{array}$$

Satisfaciendo las reglas usuales de la multiplicanción e inversión en grupos.

$GL_n(k)$ matrices invertibles
Sea $(\mathbb{A}^{n^2}, \mathscr{O}_{\mathbb{A}^{n^2}})$ el espacio afín (k^{n^2} dotado de la topología de Zariski) junto con su haz de funciones regulares

Sea $f : \mathbb{A}^{n^2} \to M_{n \times n}(k)$ la función que a cada elemento $(a_1, ..., a_{n^2}) \in \mathbb{A}^{n^2}$ le asocia la matriz

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & . & . & . & a_n \\ a_{n+1} & a_{n+1} & & & & \\ . & & . & & & \\ . & & & . & & \\ . & & & & . & \\ a_{n^2-n+1} & a_{n^2-n+2} & . & . & . & a_{n^2} \end{pmatrix} \quad (1)$$

en $M_{n\times n}(k)$

notemos que f es biyectiva , luego en $M_{n\times n}(k)$ podemos definir la siguiente topología $f(\tau_{\mathbb{A}^{n^2}}) = \{f(U) \mid U \in \tau_{\mathbb{A}^{n^2}}\} = \{f(U) \mid U \subseteq \mathbb{A}^{n^2}$ es un abierto de Zariski $\}$
Efectivamente es una topología para $M_{n\times n}(k)$, porque de hecho este espacio dotado con esta topología es homeomorfo al espacio afín $\mathbb{A}^{n^2}$ (k^{n^2} dotado de la topología de Zariski) por su construcción , pues f es biyectiva
Para cada abierto $V \subseteq M_{n\times n}(k)$ definimos el conjunto

$$\mathscr{O}_{M_{n\times n}(k)}(V) := \{p \ o \ f^{-1} : V \to k \mid p \in \mathscr{O}_{\mathbb{A}^{n^2}}(f^{-1}(V))\}$$

,
Notemos que $\mathscr{O}_{M_{n\times n}(k)}(V) = (f^{-1})^*(\mathscr{O}_{\mathbb{A}^{n^2}}(f^{-1}(V)))$ y adicionalmente para cada inclusión de abiertos $U \hookrightarrow V$ definimos la aplicación $r_{V,U} : \mathscr{O}_{M_{n\times n}(k)}(V) \to \mathscr{O}_{M_{n\times n}(k)}(U)$ por

$$r_{V,U}(s) = s|_U$$

, donde $|_U$ denota la restricción usual de funciones en este caso a U .
Entonces $\mathscr{O}_{M_{n\times n}(k)}$ es un prehaz en $M_{n\times n}(k)$ (ya que la restricción usual de funciones satisface la conmutatividad que se le pide a las aplicaciones de restricción , es decir , $(g|_V)|_U = g|_U$ siempre que g este definida en un conjunto W t.q. $U \hookrightarrow V \hookrightarrow W$)

PD : $\mathscr{O}_{M_{n\times n}(k)}$ es un haz en $M_{n\times n}(k)$

Sea $V \subseteq M_{n\times n}(k)$ un abierto. Si $V = \cup_{i\in I} V_i$ es un cubrimiento abierto , y si $s_i \in \mathscr{O}_{M_{n\times n}(k)}(V_i)$ son secciones tales que $s_i|_{V_i\cap V_j} = s_j|_{V_i\cap V_j}$ para todos $i,j \in I$
Entonces , $s_i = p_i \ o \ f^{-1}$ para cierto $p_i \in \mathscr{O}_{\mathbb{A}^{n^2}}(f^{-1}(V_i))$ (único , pues si $p,q \in \mathscr{O}_{\mathbb{A}^{n^2}}(f^{-1}(V_i))$ son distintos , entonces $p \ of^{-1} \neq q \ of^{-1}$) , luego

$$(p_i \ o \ f^{-1})|_{V_i\cap V_j} = (p_j \ o \ f^{-1})|_{V_i\cap V_j}$$

, para todos $i,j \in I$ entonces ,

$$p_i|_{f^{-1}(V_i)\cap f^{-1}(V_j)} \ o \ f^{-1}|_{V_i\cap V_j} = p_j|_{f^{-1}(V_i)\cap f^{-1}(V_j)} \ o \ f^{-1}|_{V_i\cap V_j}$$

, para todos $i,j \in I$ entonces ,

$$p_i|_{f^{-1}(V_i)\cap f^{-1}(V_j)} = p_j|_{f^{-1}(V_i)\cap f^{-1}(V_j)}$$

, para todos $i,j \in I$
entonces , como $\mathscr{O}_{\mathbb{A}^{n^2}}$ es un haz en $\mathbb{A}^{n^2}$ y tenemos el cubrimiento abierto $f^{-1}(V) = \cup_{i\in I} f^{-1}(V_i)$, con $p_i \in \mathscr{O}_{\mathbb{A}^{n^2}}(f^{-1}(V_i))$ secciones tales que

$$p_i|_{f^{-1}(V_i)\cap f^{-1}(V_j)} = p_j|_{f^{-1}(V_i)\cap f^{-1}(V_j)}$$

, para todos $i,j \in I$
Entonces , por Pegado y Unicidad tenemos que existe un unico $p \in \mathscr{O}_{\mathbb{A}^{n^2}}(f^{-1}(V))$ t.q. $p|_{f^{-1}(V_i)} = p_i$, para todo $i \in I$

Luego , $s := p \ o \ f^{-1} \ \in \mathscr{O}_{M_{n\times n}(k)}(V)$ satisface

$s|_{V_i} = s_i$, para todo $i \in I$ y es unico (por la unicidad de p) . Por lo tanto $\mathscr{O}_{M_{n\times n}(k)}$ es un haz en $M_{n\times n}(k)$
Más aún , $(M_{n\times n}(k), \mathscr{O}_{M_{n\times n}(k)})$ es un espacio anillado en k-algebras
PD: $(M_{n\times n}(k), \mathscr{O}_{M_{n\times n}(k)})$ es una variedad algebraica afín
Para esto probaremos que $(M_{n\times n}(k), \mathscr{O}_{M_{n\times n}(k)})$ es isomorfo (en la categoría de espacios anillados en k-álgebras)

a $(\mathbb{A}^{n^2}, \mathscr{O}_{\mathbb{A}^{n^2}})$
Definamos $\varphi\ : \mathscr{O}_{M_{n\times n}(k)}\ \rightarrow\ f_*\mathscr{O}_{\mathbb{A}^{n^2}}$ que consiste en

para cada abierto $V \subseteq M_{n\times n}(k)$ un morfismo de k-algebras $\varphi_V :\ \mathscr{O}_{M_{n\times n}(k)}(V)\ \rightarrow\ f_*\mathscr{O}_{\mathbb{A}^{n^2}}(V) = \mathscr{O}_{\mathbb{A}^{n^2}}(f^{-1}(V))$ dado por
$\varphi_V(p\, f^{-1}|_V) = p$
Si en el haz imagen directa $f_*\mathscr{O}_{\mathbb{A}^{n^2}}$ consideramos la restricción común $p|_U = p|_{f^{-1}(U)}$ entonces dada una inclusión de abiertos en $M_{n\times n}(k)$, $U \ \hookrightarrow\ V$ se tiene que

$$\varphi_V(s)|_U\ =\ \varphi_V(p\ o\ (f^{-1}|_V))|_U\ =\ p|_U\ =\ p|_{f^{-1}(U)} = \varphi_U(p|_{f^{-1}(U)}\ o\ (f^{-1}|_U))$$

$$= \varphi_U(p|_{f^{-1}(U)}\ o\ ((f^{-1}|_V)|_U)) = \varphi_U((p\ o\ (f^{-1}|_V))|_U) = \varphi_U(s|_U)$$

, para todo $s \in \mathscr{O}_{M_{n\times n}(k)}(V)$
Por lo tanto φ es un morfismo de haces de k-algebras. Por lo tanto (f, φ) es un morfismo de espacios anillados en k-algebras entre $(\mathbb{A}^{n^2}, \mathscr{O}_{\mathbb{A}^{n^2}})$ y $(M_{n\times n}(k), \mathscr{O}_{M_{n\times n}(k)})$

Analogamente se puede probar que (f^{-1}, ψ) es un morfismo de espacios anillados en k-algebras entre $(M_{n\times n}(k), \mathscr{O}_{M_{n\times n}(k)})$ y $(\mathbb{A}^{n^2}, \mathscr{O}_{\mathbb{A}^{n^2}})$, donde $\psi :\ \mathscr{O}_{\mathbb{A}^{n^2}}\ \rightarrow\ f_*^{-1}(\mathscr{O}_{M_{n\times n}(k)})$ viene dado por

$\psi_U(q) :=\ q\ o\ (f^{-1}|_{f(U)})$ para todo $q \in \mathscr{O}_{\mathbb{A}^{n^2}}(U)$

$(f, \varphi) = (f, f^*)$ y $(f^{-1}, \psi) = (f^{-1}, f^{-1*})$
Entonces tenemos que ambos son morfismos en la categoría de espacios anillados en k-algebras y f es biyectiva

Por lo tanto $(M_{n\times n}(k), \mathscr{O}_{M_{n\times n}(k)})$ y $(\mathbb{A}^{n^2}, \mathscr{O}_{\mathbb{A}^{n^2}})$ son isomorfos en la categoria de espacios anillados en k-algebras y por lo tanto $(M_{n\times n}(k), \mathscr{O}_{M_{n\times n}(k)})$ es una variedad algebraica afín

En particular , $(M_{n\times n}(k), \mathscr{O}_{M_{n\times n}(k)})$ es una variedad algebraica , luego si consideramos al subconjunto de matrices invertibles $GL_n(k)$ que es un abierto para la topología que estamos considerando en $M_{n\times n}(k)$, pues es el complemento de las matrices cuyas entradas satisfacen el polinomio determinante igual a cero ,

$$GL_n(k)^c = \{N \in M_{n\times n}(k) \mid N\ no\ es\ invertible\}^c\ = \{N \in M_{n\times n}(k)\ |det(N) = 0\}^c$$

$$= \{N \in M_{n\times n}(k) \mid p_{det}(f^{-1}(N)) = 0\}^c$$

, donde p_{det} es el polinomio dado por el determinante en terminos de las entradas de la matriz (y segun el orden que le da f^{-1} a cada entrada)

$\Rightarrow$
$$GL_n(k)^c = \{f(a) \in M_{n\times n}(k) \mid p_{det}(a) = 0\}^c = f(\{a \in \mathbb{A}^{n^2} \mid p_{det}(a) = 0\})^c$$
es abierto , porque es el complemento de la imagen de f de un cerrado de Zariski de $\mathbb{A}^{n^2}$.

Entonces , tenemos que $(GL_n(k), \mathscr{O}_{M_{n\times n}(k)}|_{GL_n(k)})$ es una variedad algebraica , pues , todo abierto y todo cerrado de $M_{n\times n}(k)$ posee una estructura inducida de variedad algebraica.

Y así se puede probar que $GL_n(k)$ dotado del producto e inversión usual de matrices es un grupo algebraico

Grupo Algebraico afín 2.2 : Si tenemos un grupo algebraico X t.q. X no sólo es una variedad algebraica , sino que es una variedad algebraica afín , entonces decimos que X es un grupo algebraico afín

Ejemplos 2.3 :
El grupo aditivo $\mathbb{G}_a$ $(k, +)$ ($\mathbb{A}^1$)
El grupo aditivo $\mathbb{G}_a^n$ $(k^n, +)$ ($\mathbb{A}^n$)

El grupo multiplicativo $\mathbb{G}_m$ $(k^*, \times)$ ($\mathbb{A}^1 \setminus \{0\}$)

$GL_n(k)$ (efectivamente , se puede probar que una variedad algebraica afín)
$SL_n(k)$

Morfismos de grupos algebraicos 2.4 : Sean G y H dos grupos algebraicos Decimos que una función $\varphi : G \to H$ es un **morfismo de grupos algebraicos** si es un morfismo regular y un morfismo de grupos.

Ejemplos 2.5:

Un ejemplo sensillo es la inclusión $\iota : SL_n(k) \to GL_n(k)$

Dado un morfismo de grupos algebraicos $f : G \to H$ entre grupos algebraicos G, H , se tiene que el kernel de f $ker(f)$ es un subgrupo algebraico de G (sub grupo algebraico afín si G es afín)

Dem : sabemos que $ker(f)$ es un subgrupo de G , y como f es un morfismo de grupos algebraicos , en particular es una función continua entre G y H , y el conjunto dado por la identidad de $\{e_H\}$ es un singleton , por lo tanto es un cerrado de H y entonces $ker(f) = f^{-1}(\{e_H\})$ es un cerrado de la variedad algebraica G luego posee una estructura de variedad algebraica inducida (todo abierto y todo cerrado de una variedad algebraica la posee).
Y si G es una variedad algebraica afín , entonces es isomorfa a un cerrado de Zariski C de un espacio afín junto con su haz de funciones regulares , luego $ker(f)$ por ser un cerrado de G es isomorfo aun cerrado de C , que también es un cerrado de Zariski y por lo tanto $ker(f)$ es un grupo algebraico afín.

La Imagen de f también es un grupo algebraico.

Dado un grupo algebraico G , como la multiplicación es un morfismo regular , tenemos que dado un elemento $g \in G$ fijo ,

$g : G \to G$, dada por $g(x) = gx$, para cada $x \in G$ es un morfismo regular y como $g^{-1} : G \to G$ también lo es y g es una biyección , tenemos que g es un morfismo birregular
de donde para todo abierto $V \subseteq G$, $g^* \mathscr{O}_G(V) = \mathscr{O}_G(g^{-1}V)$

Sea G un grupo algebraico. Entonces G es una variedad algebraicas y por lo tanto como espacio topologico es noetheriano . Sean $X_1, ..., X_m$ las componentes irreducibles que contienen a la identidad de G e (que es una cantidad finita de componentes , pues G es noetheriano),entonces $X_1 \times ... \times X_m$ es irreducible (producto de espacios irreducibles es irreducible) y sea $X_1X_2...X_m$ su producto , es decir , el conjunto $\{x_1x_2...x_m \in G \mid x_i \in X_i \ \forall i = 1, ..., m\}$, entonces $X_1X_2...X_m$ es tambien irreducible , pues la multiplicación es un morfismo regular y por lo tanto es continua y $e \in X_1X_2...X_m$, pues basta considerar el producto $ee...e$ m veces
Entonces $X_1X_2...X_m$ está contenido en alguna componente irreducible de G , pero como además $e \in X_1X_2...X_m$, entonces está contenido en alguna de las m componentes $X_1, ..., X_m$, digamos en X_{j^*} , para cierto $j^* \in \{1, ..., m\}$ pero tambien $X_i \subseteq X_1X_2...X_m$, para cada $i \in \{1, ..., m\}$, pues dado $x_i \in X_i$, tenemos que $x_i = ee...ex_ie...e \in X_1X_2...X_m$, entonces $X_i \subseteq X_{j^*}$
Por lo tanto , hay una unica componente irreducible de G que contiene a e , la cual denotamos por G^o

Proposición 2.6 Sea G un grupo algebraico

- (i) G^o es un subgruponormal de indice finito en G cuyas clases son las componentes conexas e irreducibles de G
- (ii) Cada subgrupo cerrado de índice finito en G contiene a G^o

$\iota(G^o)$ es una componente irreducible de G que contiene a e , pues la inversión es un homeomorfismo y el inverso e es si mismo , entonces como habíamos probado más arriba , necesariamente $\iota(G^o) = G^o$
Y como usamos más arriba , $G^oG^o = G^o$, entonces tenemos que $\iota(G^o) = G^o$ y $G^oG^o = G^o$ y por lo tanto G^o es un subgrupo (cerrado (pues es una componente irreducible de G)) de G

Dado $x \in G$, tenemos que conjugar por x es un homeomorfismo y por lo tanto xG^ox^{-1} es una componente irreducible de G y además $xex^{-1} = xx^{-1} = e \in xG^ox^{-1}$, por lo tanto $xG^ox^{-1} = G^o$, y entonces G^o es un subgrupo normal de G .

Luego , si consideramos las clases xG^o , tenemos que estas también son componentes irreducibles de G (multiplicar por x es un homeo.) y por lo tanto hay una cantidad finita de estas clases , pues G es un grupo algebraico y por lo tanto es noetheriano y entonces G^o tiene indice finito y como las clases son disjuntas , ellas son componentes conexas de G

Si H es un subgrupo cerrado de índice finito en G , entonces $H^o := \ H \cap G^o$ es un subgrupo cerrado de índice finito en G^o y cada una de sus clases en G^o también son cerradas en G^o , y como H^o tiene indice finito en G^o hay una cantidad finita de estas clases , luego su union sigue siendo cerrada y entonces su complemento que es H^o es abierto , entonces H^o es un abierto y cerrado de G^o , y como G^o es irreducible , es conexo , luego el unico subconjunto de él distinto de vacio t.q. es cerrado y abierto a la véz es si mismo , por lo tanto $G^o = H^0$ y entonces $G^o \ \subseteq H$.

Lema 2.7

Sean U, V dos abiertos densos de G , entonces $G \ = \ UV$

Dado $x \in G$, sabemos que multiplicar por x es un homeomorfismo , e invertir también , luego xV^{-1} es un subconjunto abierto y denso de G (ya que es homeomorfo a V) y entonces U y xV^{-1} se intersectan , es decir , existe $u \in U$ t.q. $u = \ xv^{-1}$ para cierto $v \in V$, luego
$x = \ xv^{-1}v \ \in UV$ y como $x \in G$ era arbitrario , tenemos que $G = UV$

Lema 2.8

Sea $H \ < \ G$ un subgrupo de un grupo algebraico G . Entonces

(i) $\overline{H}$ es un subgrupo de G
(ii) Si H es constructible , entonces $H = \overline{H}$
(iii)Si H contiene a un subconjunto abierto denso de $\overline{H}$, entonces $H = \overline{H}$.

(i) Como la inversión es un homeomorfismo , y H es un subgrupo $\iota(\overline{H}) \ = \ \overline{\iota(H)} \ = \ \overline{H}$.
Sea $h \in H$, sabemos que multiplicar por h también es un homeo. , luego $h\overline{H} \ = \ \overline{hH}$ y también como $h \in H$, $hH \ = H$, pues H es subgrupo , $\Rightarrow \ h\overline{H} = \ \overline{H}$, y como esto se tiene para todo $h \in H$, $H\overline{H} \ \subseteq H$, luego escogiendo $\overline{h} \in \overline{H}$, se tiene que

$H\overline{h} \subseteq \overline{H}$ y como multiplicar por la derecha por $\overline{h}$ también es un hemeomorfismo

$\overline{H}\overline{h} \ = \ \overline{H\overline{h}} \ \subseteq \ \overline{\overline{H}} \ = \ \overline{H}$

recapitulando , tenemos que $\iota(\overline{H}) \ = \ \overline{H}$ y $\overline{H}\overline{H} \ = \ \overline{H}$, lo que equivale a que $\overline{H}$ es subgrupo de G

Para (ii) y (iii) la proposición 1.3.37 nos dice que un subconjunto constructible de una variedad contiene a un subconjunto abierto denso de su clausura

entonces como H es constructible , este contiene a un subconjunto abierto y denso $U \subseteq \overline{H}$ de $\overline{H}$

luego , como $H \ = \ \cup_{h \in H} hU$, es union de abiertos , tenemos que H es un abierto denso de $\overline{H}$ y luego por el lema anterior $\overline{H} \ = \ HH \ = \ H$

Corolario 2.9 Sean A, B subgrupos cerrados de G .
Si B normaliza a A , entonces AB es un subgrupo cerrado de G
Dem : AB es un subgrupo de G , pues A, B son subgrupos tales que B normaliza a A y como A, B son cerrados , entonces $A \times B$ es un subconjunto cerrado de $G \times G$ y entonces es localmente cerrado

Por lo tanto es constructible , luego por el teorema 1.3.20 y como el producto es un morfismo regular , AB es constructible y por el lema anterior $AB \ = \ \overline{AB}$

Por lo tanto AB es un subgrupo cerrado de G.

Lema 2.10 Sea $\varphi : G \to H$ un morfismo de grupos algebraicos . Entonces (i) $Ker\ \varphi$ es un subgrupo cerrado de G
(ii) $Im\varphi$ es un subgrupo cerrado de H
(iii) $\varphi(G^o) = \varphi(G)^o$.
(iv) $dim\ G = dim\ ker\varphi + dim\ Im\varphi$.
Dem : (i) se tiene por la continuidad de φ ($\{e\}$ es un singleton , asi que es cerrado)
(ii) Por el Teorema 1.3.20 , $Im\varphi$ es constructible y como φ es un morfismo de grupos algebraicos , $Im\varphi$ es un subgrupo de H y entonces por el Lema 2.8 (ii) $Im\varphi$ es un subgrupo cerrado de H
(iii) Sabemos que G^o es subgrupo de G , luego $\varphi(G^o)$ es subgrupo de H y nuevamente usando el Teorema 1.3.20 y el Lema 2.8(ii) obtenemos que $\varphi(G^o)$ es un subgrupo cerrado de H y además es irreducible , pues φ es continua , y como $e_H = \varphi(e) \in \varphi(G^o)$, tenemos que $\varphi(G^o)$ está contenido en la componente irreducible de $\varphi(G)$ que contiene a e , es decir $\varphi(G)^o$, y $\varphi(G^o)$ es un subgrupo normal de $\varphi(G)$, pues G^o es normal y φ es un morfismo , y como G^o tiene indice finito $\varphi(G^o)$ tiene indice finito en $\varphi(G)$, luego por la Proposición 2.6(ii)
$\varphi(G)^o \subseteq \varphi(G^o)$
Por lo tanto $\varphi(G^o) = \varphi(G)^o$
(iv) es consecuencia del Teorema 1.3.21(ii) y el hecho de que todas las fibras $\varphi^{-1}(x)$ (con $x \in \varphi(G)$) son isomorfas a $\ker\varphi$ y entonces $\dim\varphi^{-1}(x) = \dim\ker\varphi$
Por lo tanto $\dim G = \dim\ker\varphi + \dim im\varphi$

Proposición 2.11: Sea $(X_i, \varphi_i)_{i\in I}$ una familia de variedades irreducibles y morfismos $\varphi_i : X_i \to G$ t.q. $e \in Y_i := \varphi_i(X_i)\ \forall i \in I$. Sea H el subgrupo más pequeño de G conteniendo a todos los Y_i . Entonces

(i) H es cerrado y conexo
(ii) $H = Y_{a_1}^{\varepsilon_1}...Y_{a_n}^{\varepsilon_n}$ para algunos $a_1,...,a_n \in I$ y $\varepsilon_1,...,\varepsilon_n \in \{+-1\}$

Corolario 2.12 Sean $(G_i)_{i\in I}$ una familia de subgrupos cerrados conexos de G , entonces el grupo H generado por ellos es cerrado y conexo , más aún $H = G_{a_1}...G_{a_n}$ para algunos $a_1,...,a_n \in I$

Corolario 2.13 Sean H y K subgrupos cerrados de G con H conexo . Entonces el conjunto conmutador (H,K) generado por todos los conmutadores $[h,k]$ con $h \in H$, $k \in K$ es cerrado y conexo.

2.1. Acciones de Grupos Algebraicos

Sea G un grupo algebraico y X una variedad algebraica (no necesariamente afín) decimos que G actua en X , ó que X es una G-variedad , si hay un morfismo regular dado
$G \times X \to X$, $(g,x) \to gx$ de variedades que hace que G actue en X en el sentido usual de acción de grupo (e.g. $ex = x$, $\forall x \in X$)
Si la acción de G en X es transitiva , X es llamado un espacio homogeneo .

Lema 2.1.1 Sea G un grupo algebraico que actua en una variedad algebraica X. Sean $Y, Z \subseteq X$ con Z cerrado.
(i) El conjunto $\{g \in G \mid gY \subseteq Z\}$ es cerrado
(ii) para cada $x \in X$ el estabilizador G_x es un subgrupo cerrado de G , en particular , $C_G(Y) := \{g \in G \mid gy = y\ \forall y \in Y\}$ es cerrado
(iii) El conjunto de puntos fijos X^g de $g \in G$ es cerrado en X , en particular X^G es cerrado
Dem: (i) Dado $y \in X$ fijo , tenemos que $f_y : G \to X$, dada por $f_y(g) = gy$ es un morfismo regular , entonces f_y es continua $\Rightarrow f_y^{-1}(Z)$ es un cerrado de G.

PD: $\{g \in G \mid gY \subseteq Z\} = \cap_{y\in Y} f_y^{-1}(Z)$

dado g' en el conjunto de la izquierda , tenemos que $gY \subseteq Z$, entonces $gy \in Z$, $\forall y \in Y \Rightarrow f_y(g) \in Z$, $\forall y \in Y$ entonces $g \in f_y^{-1}(Z)$, $\forall y \in Y$ entonces $g \in \cap_{y\in Y} f_y^{-1}(Z)$
Si g^* es un elemento del conjunto de la derecha , entonces $g^* \in f_y^{-1}(Z)$, $\forall y \in Y$
$\Rightarrow f_y(g^*) \in Z$,$\forall y \in Y$
entonces $g^*y \in Z$, $\forall y \in Y \Rightarrow g^*Y \subseteq Z$ y entonces $g^* \in \{g \in G \mid gY \subseteq Z\}$

Por lo tanto $\{g \in G \mid gY \subseteq Z\} = \cap_{y\in Y} f_y^{-1}(Z)$ que es cerrado pues es intersección de cerrados

(ii) $G_x = \{g \in G \mid g\{x\} \subseteq \{x\}\}$, entonces por (i) G_x es un subgrupo cerrado de G

(iii) $\psi : X \to X \times X$ dada por $\psi(x) = (x, gx)$ es un morfismo regular

entonces $X^g = \psi^{-1}(\{(x,x) \mid x \in X\})$ y como $\{(x,x) \mid x \in X\}$ es un cerrado de $X \times X$ (X es una variedad algebraica (separada)) entonces X^g es cerrado
Teorema 2.1.2 Sea G un grupo algebraico actuando en una variedad algebraica X . Entonces cada orbita es suave , localmente cerrada y su frontera $\overline{Gx} - Gx$ es unión de orbitas de dimensión estrictamente menor.En particular , orbitas de dimensión minimal son cerradas (entonces existen las orbitas cerradas).Si G es conexo , las orbitas son irreducibles
Dem: Sea $x \in X$ y $\mathscr{O} = Gx$. Como G actua en X , $g \to gx$ es un morfismo regular , luego por el teorema 1.3.19 $\mathscr{O}$ es constructible y entonces contiene a un abierto U denso en $\overline{\mathscr{O}}$ (Proposición 1.3.37) . Por la definición de $\mathscr{O}$, G actua transitivamente en él , entonces $\mathscr{O}$ es suave , pues todos sus puntos tienen las mismas propiedades geometricas. Y $\mathscr{O} = \cup_{g\in G} gU$ por que G actua transitivamente en $\mathscr{O}$, entonces $\mathscr{O}$ es un abierto de $\overline{\mathscr{O}}$ que es un cerrado de X , por lo tanto , $\mathscr{O}$ es localmente cerrado . Entonces $\overline{\mathscr{O}} - \mathscr{O}$ es cerrado y de dimensión estrictamente menor que $dim\overline{\mathscr{O}} = dim\mathscr{O}$ y como es G-estable , es la unión de otras orbitas
Lema 2.1.3 Sea G un grupo algebraico conexo e Y, X espacios homogeneos sobre G. Si $\varphi : X \to Y$ es un morfismo regular G-invariante .Sea $r = dimX - dimY$. Entonces

(i) φ es sobreyectiva y abierta
(ii) $\forall W \subseteq Y$ cerrado irreducible , toda componente irreducible de $\varphi^{-1}(W)$ tiene dimensión $r + dimW$

Dem: Sea $y \in Y$, para $x \in X$ se tiene que $\varphi(x) \in Y$, y como Y es homogeneo , existe $g_y \in G$ t.q. $y = g_y\varphi(x)$, y como φ es G-invariante $y = \varphi(g_y x) = \varphi(x_0)$, donde $x_0 = g_y x \in X$, por lo tanto φ es sobreyectiva. (ii) junto con el Teorema 1.3.21 implican que φ es abierta
Por el Teorema 1.3.19 existe un abierto $U \subseteq Y$ t.q. para cada cerrado irreducible $W \subseteq Y$ que intersecta a U , las componentes de $\varphi^{-1}(W)$ (que intersectan a $\varphi^{-1}(U)$) tienen dimensión igual a $dimW + r$. Como X, Y son espacios homogeneos , $Y = \cup_{g\in G} gU$ y $X = \cup_{g\in G} g\varphi^{-1}(U)$ y los conjuntos gU también cumple las propiedades de U y como cubren Y todo subconjunto cerrado irreducible de W de Y intersecta a algún gU , por lo tanto se tiene (ii)

2.2. Grupos algebraicos lineales

Un grupo algebraico lineal es un subgrupo cerrado de algún GL_n
Teorema 2.2.1. (Importantísimo!) Todo grupo algebraico (afín) es lineal.
Para probar este teorema necesitamos encontrar un espacio vectorial de dimensión finita en el cual G actue.
$\rho_g(f)(h) = f(hg)$
esto define una representación ρ de G en $k[G]$ llamada representación regular(derecha) ó representación por traslaciones derechas de funciones.La representación regular izquierda λ se define de manera similar
$\lambda_g(f)(h) = f(g^{-1}h)$, $(f \in k[G], h \in G)$
Las representaciones regulares derechas e izquierdas son isomorfas , entonces usualmente nos referimos a estas como representaciones regulares y usando la correcta si necesitamos escribir algunas formulas.
Lema 2.2.2 Las representaciones regulares son localmente de dimensión finita , es decir , todo elemento de $k[G]$ está contenido en un submodulo finito dimensional.
Dem: Sea $f \in k[G]$ no nula. Sea W el subespacio de $k[G]$ generado por todas las traslaciones derechas $\rho_g f$ de f.PD: W es finito dimensional. Escribamos $\Delta f = \sum_{i=1}^n f_i \otimes f_i'$. Sea $g \in G$, entonces $(\rho_g f)(h) = f(hg) = (\Delta f)(h,g) = \sum_{i=1}^n f_i(h) \otimes f_i'(g) \Rightarrow \rho_g f = \sum_{i=1}^n f_i'(g) \otimes f_i$ es combinación lineal de los $f_1, ..., f_n$. Luego como $g \in G$ era arbitrario , tenemos que $W = < f_1, ..., f_n >$. Por lo tanto W es de dimensión finita.

2.3. Algebras de Lie de un grupo algebraico

Sea G un grupo algebraico y $A = k[G]$. Vamos a considerar el algebra de Lie Der(A) de k-derivaciones $A \to A$ con el bracket $[\delta_1, \delta_2] = \delta_1 \ o\ \delta_2 - \delta_2 \ o\ \delta_1$. Decimos que una derivación $\delta \in$ Der(A) es izquierda-invariante si esta conmuta con las traslaciones izquierdas , es decir , $\delta \ o \lambda_x = \lambda_x \ o\ \delta$, para cada $x \in G$ .Las derivaciones izquierdas-invariantes de A forman una subalgebra de Lie de Der(A) , llamada el algebra de Lie de G y denotada por $L(G)$ (con las derivaciones derechas-invariantes obtendriamos un objeto isomorfo a $L(G)$).Denotemos al espacio tangente T_eG como $\mathfrak{g}$. $\mathfrak{g}$ y T_eG se pueden identificar (como espacio vectoriales) de manera natural .Recordemos que T_eG puede ser definido como las derivaciones de A en e .Definiendo la función k-lineal $\theta : L(G) \to \mathfrak{g}$ por $(\theta\delta)(f) = (\delta f)(e)$, $(\delta \in L(G), f \in A) \Rightarrow \theta$ es un isomorfismo , pues la función k- lineal $\eta : \mathfrak{g} \to L(G)$ que envía un vector tangente X a la derivación $*X$ llamada convolución derecha de X y definida por $(f*X)(x) = X(\lambda_{x^{-1}}f)$, con $x \in G, f \in A$ satisface

$$(f*\theta(\delta))(x) = \theta(\delta)(\lambda_{x^{-1}}f) = \delta(\lambda_{x^{-1}}f)(e) = \lambda_{x^{-1}}(\delta f)(e) = (\delta f)(x)$$

y

$$\theta(*X)(f) = (f*X)(e) = X(\lambda_{e^{-1}}f) = X(f), \forall X \in \mathfrak{g}, \delta \in L(G), f \in A, x \in G$$

es decir , η es inversa de θ . Por lo tanto $\mathfrak{g} \cong L(G)$.
A partir de ahora identificaremos $L(G)$ con $\mathfrak{g}$ vía los ismorfismos θ y η. Por ejemplo , $\mathfrak{g}$ es un algebra de Lie con respecto al bracket definido como $[X,Y](f) = ((f*Y)*X-(f*X)*Y)(e) = X(f*Y)-Y(f*X)$. Daremos otra definición de $[X,Y]$ en terminos del coproducto Δ. Definamos $X\cdot Y : A \to k$, $f \to (X\otimes Y)\ o\ \Delta(f)$. Si $\Delta(f) = \sum_i f_i \otimes f_i'$ entonces $f*X = \sum_i f_i X(f_i')$ de donde $(X\cdot Y)(f) = ((f*X)*X)(e)$ entonces $[X,Y] = X\cdot Y - Y\cdot X$. Con esta definición del bracket se hace más facil probar el siguiente Teorema.
Teorema 2.3.1 Si $\varphi : G \to G'$ es un homomorfismo de grupos algebraicos entonces $d_\varphi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}'$ es un homomorfismo de algebras de Lie.
Dem: Si H es un subgrupo cerrado de un grupo algebraico G , si consideramos la inclusión $\eta : H \to G$, entonces $\eta^* : k[G] \to k[H] \cong k[G]/I$ es la proyección natural , $\eta^*(f) = f\ o\ \eta = [f]$, entonces $d_\eta : \mathfrak{h} \to \mathfrak{g}$ identifica a $\mathfrak{h}$ con la subalgebra de Lie de $\mathfrak{g}$ formada por los $Y \in \mathfrak{g}$ t.q. $Y(I) = 0$ ya que , si $X \in \mathfrak{h}$, entonces dado $f \in I$, se tiene que $f(h) = 0$,$\forall h \in H$ entonces $f\ o\ \eta = 0$, entonces $d_\eta(X)(f) = (X\ o\ \eta^*)(f) = X(\eta^*(f)) = X(f\ o\ \eta) = X(0) = 0$, por lo tanto $d_\eta(X)(I) = 0$ y dado $Y \in \mathfrak{g}$ t.q. $Y(I) = 0$ también se puede probar que existe $X \in \mathfrak{h}$ t.q. $Y = d_\eta(X)$.
Ahora , si consideramos un morfismo de grupos algebraicos $\varphi : G \to G'$, $H' < G'$ subgrupo cerrado y $\varphi(H) \subseteq H'$ entonces $\varphi|_H$ es un morfismo entre H y H' por lo tanto $d_{\varphi|_H}$ es un morfismo de algebras de Lie entre $\mathfrak{h}$ y $\mathfrak{h}'$.

Lema 2.3.2 Sea H un subgrupo cerrado de un grupo algebraico G y $I = I(H) \lhd k[G]$. Entonces $\mathfrak{h} = \{X \in \mathfrak{g} \mid I*X \subseteq I\}$.
Dem: $\subseteq$. Sea $X \in \mathfrak{h}$. Para $f \in I$ se tiene que $\forall x \in H$ $\lambda_{x^{-1}}f \in I$, pues dado $h \in H$ $\lambda_{x^{-1}}f(h) = f(xh) = 0$, pues $xh \in H$ y $f \in I = I(H)$, entonces $(f*X)(x) = X(\lambda_{x^{-1}}f) = 0$, pues $[\lambda_{x^{-1}}f] = [0]$ en $k[H]/I$ entonces $f*X \in I$.
$\supset$. Si $X \in \mathfrak{g}$ t.q. $I*X \subseteq I$, entonces $\forall f \in I$, $f*X \in I \Rightarrow X(\lambda_{x^{-1}}f) = 0\ \forall x \in H$, en particular $X(\lambda_{e^{-1}}f) = 0 \Rightarrow X(f) = 0$,$\forall f \in I$. Luego definiendo $X_\mathfrak{h}$ como $X_\mathfrak{h}([f']) = X(f')$, $\forall f' \in k[G]$, se tiene que $X_\mathfrak{h}$ está bien definido , pues si $[f_1] = [f_2] \Rightarrow f_1 - f_2 \in I \Rightarrow X_\mathfrak{h}([f_1]) = X(f_1) = X(f_1)+0 = X(f_1)+X([0]) = X(f_1)+X(f_2-f_1) = X(f_1+f_2-f_1) = X(f_2)$ y como $X_\mathfrak{h}$ opera sobre $k[G]/I$ entonces $X_\mathfrak{h} \in \mathfrak{h}$.

Lema 2.3.3 Sea $\rho : G \to GL(V)$ una representación racional y $d_\rho : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$ la correspondiente representación de las algebras de Lie . Si $W \subseteq V$ es un s.e.v. G-invariante , entonces W es también $\mathfrak{g}$-invariante.
Para $f \in k[GL(V)]$, $X \in \mathfrak{g}$ tenemos que $d_\rho(X) \in \mathfrak{gl}(V)$, pues $[d_\rho(X)](f) = (X\ o\ \rho^*)(f) = X(\rho^*(f)) = X(f\ o\ \rho)$, y $f\ o\ \rho \in k[G]$

Lema 2.3.4 Sea G un grupo algebraico con producto $\mu : G\times G \to G$ e inversa $\iota : G \to G$. Entonces $\forall X, Y \in \mathfrak{g}$.
(i) $d_{\mu_{(e,e)}}(X,Y) = X+Y$
(ii)$d_{\iota_e}(X) = -X$

Lema 2.3.5 Sea $E \subseteq k[G]$, una subrpresentación de dimensión finita de la representación regular (derecha) ρ de G , y $\psi : G \Rightarrow GL(E)$ la restricción de ρ a E. Entonces $d_\psi(X)(f) = f*X$, $\forall f \in E$.

2.4. Ad y ad

Sea $x \in G$. Sea $intx : G \to G$, $y \to xyx^{-1}$ la conjugación por x. El diferencial d_{intx} es un automorfismo de algebras de Lie denotado
$Adx : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$. La imagen de Ad es un subgrupo (cerrado y convexo) de $GL(\mathfrak{g})$ denotado AdG.
Ejemplo importante 2.4.1. Sea $G = GL_n$. Entonces $Adx(X) = xXx^{-1}$ (Para $X \in \mathfrak{g} = \mathfrak{gl}_n(k)$) . Por lo tanto para cualquier subgrupo cerrado de $H < G$ su algebra de Lie $\mathfrak{h}$ y $x \in H$, $Adx : \mathfrak{h} \to \mathfrak{h}$ es la conjugación por x también !.
Teorema 2.4.2. Ad es una representación racional de G en (el espacio vectorial) $\mathfrak{g}$ llamada la representación adjunta de G.
Dem : Sabemos que G es algún subgrupo cerrado de algún GL_n (un Teorema anterior) , Entonces como vimos en el ejemplo anterior , Adx es la conjugación por x lo que implica que $Ad : G \to GL(\mathfrak{g})$ es un morfismo regular.

Definición 2.4.3: Sea $ad : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ la representación adjunta de Lie , es decir , $adX(Y) = [X, Y]$ para $X, Y \in \mathfrak{g}$.

Teorema 2.4.4. El diferencial de Ad es ad

Lema 2.4.5. Si H es un subgrupo normal cerrado de un grupo algebraico G entonces $\mathfrak{h}$ es un ideal de $\mathfrak{g}$ (el producto viene dado por los corchetes)
Dem: Como H es normal , $intx(H) \subseteq H$, $\forall x \in G$. Por lo tanto por el teorema 2.4.2 y como H es cerrado , $Adx(\mathfrak{h}) \subseteq \mathfrak{h}$, $\forall x \in G$. Y dados $X \in \mathfrak{h}$, $Y \in \mathfrak{g}$

$$[X, Y] = adX(Y) = d_{Ad}(X)(Y) = (X \; o \; Ad^*)(Y) = X(Ad^*(Y)) = X(Y \; o \; Ad)$$

. **Lema 2.4.6.** Si H es un subgrupo cerrado de un grupo algebraico G y $N = N_G(H)$, entonces $\ltimes \subseteq \mathfrak{n}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})$.
Dem: Por el Lema 2.1.1. N es cerrado , luego aplicando el la parte (i) del Lema 2.4.5 para el subgrupo normal H de N , tenemos que $\mathfrak{h}$ es un ideal de $\mathfrak{n}$, es decir , $\mathfrak{n}$ normaliza a $\mathfrak{h}$.
Definición 2.4.7 : Para $x \in G$ definimos $\gamma_x : G \to G$ por $y \to yxy^{-1}x^{-1}$.
Lema 2.4.8. $d_{\gamma_x}(X) = X - Adx(X)$.
Lema 2.4.9. Sea $x \in G$. Entonces $L(C_G(x)) \subseteq \mathfrak{i}_{\mathfrak{g}}(x) := \{X \in \mathfrak{g} \mid Adx(X) = X\}$ y si $G = GL_n$ entonces se tiene la igualdad.
Lema 2.4.10. Sea $\rho : G \to GL(V)$ una representación racional y $d_\rho : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$ la correspondiente representación de algebras de Lie. Si $v \in V$, sea $C_G(v) = \{x \in G \mid xv = v\}$ y $\mathfrak{c}_{\mathfrak{g}}(v) := \{X \in \mathfrak{g} \mid Xv = 0\}$. Entonces $L(C_G(v)) = \mathfrak{c}_{\mathfrak{g}}(v)$.

Lema 2.4.11. Sea V y W G-módulos racionales. Entonces
(i) $\mathfrak{g}$ actua en V^* mediante la regla $Xf(v) = -f(Xv)$ para $f \in V^*$, $v \in V$, $X \in \mathfrak{g}$.
(ii) $\mathfrak{g}$ actua en $V \otimes W$ por la regla $X(v \otimes w) = (Xv) \otimes W + v \otimes (Xw)$ para $v \in V, w \in W, X \in \mathfrak{g}$.
Corolario 2.4.12. Sea $\mathfrak{B}$ una k-algebra de dimensión finita y G un subgrupo cerrado de $GL(\mathfrak{B})$ consistiendo de automorfismos de algebras. Entonces $\mathfrak{g}$ está formado por derivaciones de $\mathfrak{B}$.

2.5. Cocientes

Lema 2.5.1. Sean M un s.e.v. de dimensión d de un espacio vectorial W , $x \in GL(W)$, $X \in \mathfrak{gl}(W)$. Entonces $L := \Lambda^d M$ puede ser considerado como una linea en $\Lambda^d W$.
(i) $xL = L$ ssi $xM = M$
(ii) $XL \subseteq L$ ssi $XM \subseteq M$.
Teorema 2.5.2(Chevalley). Sean G un grupo algebraico , $H < G$ un subgrupo . Entonces existe una representación racional $\varphi : G \to GL(V)$ y un s.e. uno dimensional L de V tales que $H = \{x \in G \mid \varphi(x)L = L\}$ y $\mathfrak{h} = \{X \in \mathfrak{g} \mid d_\varphi(X)L \subseteq L\}$.
Corolario 2.5.3. Sea H un subgrupo cerrado de un grupo algebraico conexo G. Entonces existe una variedad quasi proyectiva X en la que G actua transitivamente y existe $x \in X$ t.q.
(i) $G_x = H$
(ii) La función orbita $\psi : G \to X$, $g \to gx$ es separable .
(iii) Las fibras de ψ son las clases gH de H en G.

En esta sección asumiremos que G es un grupo algebraico conexo y $H < G$ es un subgrupo cerrado (no es esencial asumir que G es conexo , pero se requieren ciertas modificaciones para ese caso)
Definición (Cociente de Chevalley)2.5.4: Un cociente de Chevalley de G por H es una variedad algebraica X junto con un morfismo regular sobreyectivo separable $\pi : G \to X$ t.q. las fibras de π son exactamente las clases de H en G. Por el corolario 10.1.3 los cocientes de Chevalley existen , pero no es claro si ellos son únicos salvo morfismo.
Definición 2.5.5: Un Cociente Categorico de G por H es una variedad algebraica X junto con un morfismo regular $\pi : G \to X$ que es constante en todas las clases de H en G con la siguiente propiedad universal :
Dada cualquier otra variedad Y y un morfismo regular $\varphi : G \to X$ que es constante en todas las clases de H en G , existe un único morfismo regular $\overline{\varphi} : X \to Y$ t.q. $\varphi = \overline{\varphi} \; o \; \pi$. Es claro que los cocientes categoricos son únicos salvo un único isomorfismo , pero no es claro si estos cocientes existen.
Nuestro objetivo es probar que los cocientes de chevalley son categoricos y así tendriamos que los cocientes categoricos exiten y que los cocientes de chevalley son únicos.
Teorema 2.5.6. Los cocientes de chevalley son cocientes categoricos.

2.6. Variedades Abelianas

Proposición 2.6.1: Sea G un grupo algebraico , y supongamos que G es proyectivo e irreducible . Entonces , G es un grupo abeliano .

Dem: Consideremos el morfismo regular $f : G \times G \to G$, $(g, h)\ ghg^{-1}$ y el grafo de f $\Gamma_f = \{(g, h, ghg^{-1}) \mid g, h \in G\ \} \subseteq G \times G \times G$. Nos gustaría probar que $h = ghg^{-1}$, $\forall g, h \in G$, es decir, $pr_{23}(\Gamma_f) = \Delta G$.

Tenemos que $\Delta G \subseteq pr_{23}(\Gamma_f)$, pues con $g = e$ se obtiene $pr_{23}(g, h, ghg^{-1}) = pr_{23}(e, h, h) = (h, h) \in \Delta G$. PD : $\Delta G \supset pr_{23}(\Gamma_f)$

G es proyectivo e irreducible , entonces $G \times G$ es proyectivo e irreducible $\Rightarrow$ Γ_f es proyectivo e irreducible ya que $G \times G \cong \Gamma_f \Rightarrow pr_{23}(\Gamma_f)$ es irreducible pues pr_{23} es un morfismo regular , entonces es continuo. Pero de hecho pr_{23} es cerrado ($G \times G \times G$ es proyectivo) , por lo tanto $pr_{23}(\Gamma_f)$ es proyectivo e irreducible .

Si consideramos $pr_2 : pr_{23}(\Gamma_f) \to G$, $(h, ghg^{-1}) \to ghg^{-1}$ tenemos que $pr_2^{-1}(\{e\}) = \{(e, e)\}$. Entonces tenemos que $pr_{23}(\Gamma_f), G$ son irreducibles y pr_2 es un morfismo regular sobreyectivo y cerrado (pues $pr_{23}(\Gamma_f)$ es proyectiva) entonces $G \to \mathbb{N}$, $y \to \dim(pr_2^{-1}(y))$ es s.c. superior y $\dim(pr_2^{-1}(\{e\})) = \dim(\{(e, e)\}) = 0$, entonces la fibra general $pr_2^{-1}(y)$ tiene dimensión $0 \Rightarrow$ por el teorema 1.3.46 $\dim(pr_{23}(\Gamma_f)) = \dim(G) + d = \dim(G)$

$\Rightarrow \dim(pr_{23}(\Gamma_f)) = \dim(G) = \dim(\Delta G)$, pues $G \cong \Delta G$, entonces $\Delta G = pr_{23}(\Gamma_f)$. Por lo tanto G es un grupo abeliano.

Definción (Variedades Abelianas)2.6.2: Debido al resultado anterior , decimos que un grupo algebraico proyectivo e irreducible A es una **variedad abeliana**.

Referencias

[1] Alexander Kleshchev , *Lectures on Algebraic Groups.*

[2] Joe Harris, *Algebraic Geometry A First Course.*

[3] P.Montero, *Algebra Abstracta*, 2019.

[4] P.Montero, *Geometría Algebraica*, 2021.

cristian.perezl@sansano.usm.cl
patricio.cadis@sansano.usm.cl