D-MÓDULOS ALGEBRAICOS Y EL FUNTOR DE KNIZHNIK-ZAMOLODCHIKOV

CARLOS A. AJILA LOAYZA

RESUMEN. En este artículo presentaremos una introducción breve a la teoría de D-módulos algebraicos y los usaremos para construir el funtor de Knizhnik-Zamolodchikov entre la categoría $\mathcal{O}_c$ del álgebra de Cherednik rancional H_c y la categoría de representaciones del álgebra de Hecke finita $\mathcal{H}_c$.

Índice

'¿Debería elegir ser un geómetra o un algebrista?' es como decir '¿Preferirí ser ciego o sordo?'

Michael Atiyah

1. Introducción

1.1. Anillos de operadores diferenciales. La teoría de D-módulos algebraicos provee una vasta generalización a un nivel geométrico de las nociones de módulos sobre un anillo de operadores diferenciales. Por ello, es importante tener un bagaje mínimo sobre álgebras de operadores diferenciales. En lo que sigue, presentamos una breve introducción a este tópico, dejando la referencia [Cou95] para el lector interesado en los detalles.

Sea k un cuerpo y R una k-álgebra conmutativa con unidad. Definimos recursivamente $D^0(R) = R \subseteq \mathrm{End}_k(R)$ donde miramos a $r \in R$ como un endomorfismo vía la fórmula $x \mapsto rx$. Luego

$$D^n(R) = \{P \in \mathrm{End}_k(R) \,|\, [P, a] \in D^{n-1}(R), \text{para todo } a \in R\}.$$

El conjunto

$$D(R) = \bigcup_{n \geq 0} D^n(R)$$

tiene una estructura natural de anillo (no conmutativo) con 1, y lo llamamos el *anillo de operadores diferenciales de R*. Un elemento de $D^n(R) \setminus D^{n-1}(R)$ se llama un *operador diferencial de orden n*.

Es fácil probar que $D^1(R) = \mathrm{Der}_k(R) + R$, donde $\mathrm{Der}_k(R)$ es el módulo de derivaciones k-lineales de R (ver 3.1.).

1.2. El álgebra de Weyl. Escribimos $k[X] = k[X_1, \ldots, X_n]$. La n-ésima álgebra de Weyl $A_n(k)$ es la subálgebra de $\mathrm{End}_k(k[X])$ generada por $k[X]$ y las derivadas parciales $\partial_i = \dfrac{\partial}{\partial X_i}$. Equivalentemente el álgebra de Weyl puede definirse del siguiente modo: Sea $\mathfrak{h}$ un k-espacio vectorial de dimensión n y denotemos por $\mathfrak{h}^\vee$ a su dual algebraico. Sea $x_1, \ldots, x_n$ una base de $\mathfrak{h}^\vee$ que es dual a una base $y_1, \ldots, y_n$ de $\mathfrak{h}$. Sea I el ideal del álgebra tensorial

$$T(\mathfrak{h}^\vee \oplus \mathfrak{h}) = \bigoplus_{n \geq 0} (\mathfrak{h}^\vee \oplus \mathfrak{h})^{\otimes n}$$

generado por lo elementos de la forma

$$x_i \otimes x_j - x_j \otimes x_i = 0, \quad y_i \otimes y_j - y_j \otimes y_i = 0, \quad y_i \otimes x_j - x_j \otimes y_i - \delta_{ij}, \quad 1 \leq i, j \leq n.$$

Entonces tenemos un isomorfismo

$$A_n(k) \cong A(\mathfrak{h}) := T(\mathfrak{h}^\vee \oplus \mathfrak{h})/I.$$

dado por

$$x_i \mapsto x_i, \quad \partial_i \mapsto y_i, \quad 1 \leq i \leq n.$$

El álgebra de Weyl admite una filtración natural F dada por

$$F_r A_n(k) = \bigoplus_{|\alpha| \leq r} k[X] \partial^\alpha$$

donde si $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$, se tiene $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$ y $\partial^\alpha = \partial_1^{\alpha_1} \cdots \partial_n^{\alpha_n}$.

Tenemos el siguiente resultado fundamental.

Teorema 1.1. *El anillo de operadores difereciales de $k[X]$ es la n-ésima álgebra de Weyl $A_n(k)$. Es decir*

$$D(k[X]) = A_n(k).$$

Más aún, para cada $r \geq 0$ tenemos $D^r(k[X]) = F_r A_n(k)$.

Demostración. Procederemos en varios pasos.

Paso 1: *Si $P \in D(k[X])$ verifica $[P, x_i]$ para todo $i = 1, \ldots, n$, entonces $P \in k[X]$.*

Escribamos $e_i = (0, \ldots, 1, \ldots, 0)$ para la n-upla cuya única entrada no nula 1 está en la i-ésima componente. Entonces, si $\alpha \neq 0$, tenemos $\alpha_i \neq 0$ para cierto i y

$$[P, x^\alpha] = [P, x_i] x^{\alpha - e_i} + x_i [P, x^{\alpha - e_i}].$$

Por inducción sobre $|\alpha|$ podemos asumir que $[P, x^{\alpha - e_i}] = 0$ y de este modo $[P, x^\alpha] = 0$. Dado que los monomios x^α forman una k-base de $k[X]$, concluimos que $[P, f] = 0$ para todo $f \in k[X]$. Entonces, por definición de anillo de operadores diferenciales, tenemos que $P \in D^0(k[X]) = k[X]$.

Paso 2: *Sean $P_1, \ldots, P_n \in F_{r-1} A_n(k)$ tales que $[P_i, x_j] = [P_j, x_i]$ para todo $1 \leq i, j \leq n$. Entonces existe $Q \in F_r A_n(k)$ tal que $P_i = [Q, x_i]$ para todo $1 \leq i \leq n$.*

Probaremos por inducción sobre $n - \ell$ que existe $Q' \in F_r A_n(k)$ tal que $P_i = [Q', x_i]$ para $\ell + 1 \leq i \leq n$. Si $n = \ell$, entonces basta tomar $Q' = P_n$. Asumiendo que existe $Q' \in F_r A_n(k)$ tal que $P_i = [Q', x_i]$ para $\ell + 1 \leq i \leq n$, la identidad de Jacobi nos da

$$[[Q', x_i], x_\ell] = [P_\ell, x_i].$$

Sea $S = [Q', x_\ell] - P_\ell$. Entonces $[S, x_i] = 0$ para todo $\ell + 1 \leq i \leq n$, lo que implica que S puede escribirse en la forma

$$S = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^\ell} f_\alpha \partial^\alpha \qquad \text{para ciertos } f_\alpha \in k[X].$$

Sea

$$Q'' = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^\ell} \frac{f_\alpha}{\alpha_\ell + 1} \partial^{\alpha + e_\ell}.$$

Es fácil notar que $Q'' \in F_r A_n(k)$, y que $[Q'', x_i] = P_i$ para $\ell + 1 \leq i \leq n$. Por otro lado, de la definición de S tenemos

$$[Q' - Q'', x_\ell] = [Q', x_\ell] - G = P\ell$$

y de este modo $[Q' - Q'', x_i] = P_i$ para todo $\ell \leq i \leq n$, lo que completa el paso inductivo.

Paso 3: *Conclusión.*

La inclusión $F_r A_n(k) \subseteq D^r(k[X])$ es trivial. Es claro que para $u = 0$ se tiene la igualdad y el caso $r = 1$ se sigue del Paso 1. Supongamos entonces que $D^\ell(k[X]) = F_\ell A_n(k)$ para todo $0 \leq \ell \leq r - 1$, y sea $P \in D^r(k[X])$.

Luego para cada $1 \leq i \leq n$ tenemos que $[P, x_i] \in D^{r-1}(k[X]) = F_{r-1}A_n(k)$ verifican, gracias a la identidad de Jacobi,

$$[[P, x_i], x_j] = [[P, x_j], x_j], \quad 1 \leq i, j \leq n,$$

y por el Paso 2 existe $Q \in F_r A_n(k)$ tal que $[Q, x_i] = [P, x_i]$ para todo $1 \leq i \leq n$. Luego $[P - Q, x_i] = 0$ para todo $1 \leq i \leq n$ y el Paso 1 implica que $P - Q \in F_0 A_n(k)$ de donde $P \in F_r A_n(k)$, como se deseaba probar. $\square$

El álgebra graduada $S_n := \mathrm{gr}^F A_n(k)$ asociada a la filtración F del álgebra de Weyl es un álgebra de polinomios en $2n$ variables. En particular esta álgebra es conmutativa.

El álgebra de Weyl $A_n = A_n(k)$ posee una filtración que es más comúnmente usada, llamada la *filtración de Bernstein* B, definida por

$$B_r A_n = \mathrm{span}_k\{x^\alpha \partial^\beta \mid |\alpha| + |\beta| \leq r\}.$$

1.3. D-módulos. Sea R una k-álgebra y $D(R)$ su anillo de operadores diferenciales. Un *D-módulo izquierdo sobre* R es un grupo abeliano M con una estructura de módulo izquierdo sobre $D(A)$. Por ejemplo, $k[X]$ con la acción natural por endomorfismos de $A_n = A_n(k)$ es un D-módulo sobre $k[X]$.

Ejemplo 1.2. Consideremos un sistema de ecuaciones diferenciales parciales con coeficientes polinomiales

$$P_1 u = P_2 u = \cdots = P_r u \tag{1.1}$$

donde $P_i \in A_n(k)$. Definimos

$$M = \sum_{i=1}^{r} A_1(k)/A_1(k)P_i.$$

Entonces M es claramente un D-módulo sobre $k[X]$, el anillo de polinomios en n variables $X = (X_1, \dots, X_n)$. Llamamos a M el *D-módulo asociado al sistema* (1.1). Este módulo contiene toda la información sobre el conjunto de *soluciones polinomiales* del sistema dado:

Teorema 1.3. *El espacio vectorial de soluciones polinomiales del sistema* (1.1) *es isomorfo a* $\mathrm{Hom}_{A_n}(M, k[X])$.

Demostración. Como A_n-módulo, A_n es cíclico generado por 1. Esto significa que si f es una solució polinomial del sistema (1.1), entonces existe un único homomorfismo de A_n-módulos $A_n \to k[X]$ que aplica 1 hacia f. Dado que $P_1(f) = 0$, tenemos que $\sum_{i=1}^r A_n P_i$ está contenido en el núcleo de tal homomorfismo y por ende, el primer teorema de isomorfía de Noether, obtenemos un homomorfismo inducido de A_n-módulos

$$\hat{f} : M \to k[X].$$

Sea S el k-espacio vectorial de soluciones polinomiales del sitema (1.1). Entonces definimos

$$S \longrightarrow \mathrm{Hom}_{A_n}(M, k[X]), \quad f \longmapsto \hat{f}. \tag{1.2}$$

Esta aplicación es claramente k-lineal. Recíprocamente, dado $\alpha \in \mathrm{Hom}_{A_n}(M, k[X])$, definimos $\breve{\alpha} = \alpha(1 + \sum_{i=1}^r A_n P_i) \in k[X]$. Por definición tenemos que

$$P_i(\breve{\alpha}) = P_i \alpha(1 + \sum_{i=1}^{r} A_n P_i) = \alpha(P_i(1 + \sum_{i=1}^{r} A_n P_i)) = 0,$$

de modo que $\breve{\alpha} \in S$. Así obtenemos una aplicación lineal

$$\mathrm{Hom}_{A_n}(M, k[X]) \longrightarrow S, \quad \alpha \longmapsto \breve{\alpha},$$

que es provee claramente una inversa de la aplicación (1.2). $\square$

Si (M, Γ) es un modulo filtrado sobre (A_n, F). Si $\mathrm{gr}^\Gamma M$ es finitamente generado sobre $S_n = \mathrm{gr}^F A_n$, es fácil probar que M es finitamente generado sobre S_n. El recíproco sin embargo, no es cierto en general. Por este motivo decimos que una filtración Γ sobre M es *buena* si $\mathrm{gr}^\Gamma M$ es finitamente generado sobre S_n.

Proposición 1.4. *Sea* (M, Γ) *un* (A_n, F)*-módulo filtrado. La filtración* Γ *es buena si y sólo si existe un índice* $r \geq 0$ *tal que* $\Gamma_{i+r} M = (F_i A_n)\Gamma_r M$ *para todo* $i \geq r$.

Demostración. Si Γ es buena, la condición dada es claramente necesaria. Recíprocamente, supongamos que $\mathrm{gr}^\Gamma M$ es finitamente generado sobre S_n y sean $m_1, \dots, m_s \in M$ tales que sus imágenes en $\mathrm{gr}^\Gamma M$ generan a este módulo sobre S_n. Podemos asumir que $m_j \in \Gamma_{\ell_j} M \setminus \Gamma_{\ell_j - 1} M$. Sea $r = \mathrm{máx}\{\ell_1, \dots, \ell_s\}$. Entonces un argumento de inducción sobre i muestra que $\Gamma_{i+r} M = (F_i A_n)\Gamma_r M$. $\square$

Si M es un D-módulo sobre A_n, entonces es naturalmente un $k[X]$-módulo. Para cada punto $p \in \mathbb{A}^n$ consideramos $\mathfrak{m}_p$ el ideal de funciones regulares en $\mathcal{O}(\mathbb{A}^n)$ que se anulan en p y definimos el funtor de localización

$$A_n\text{-Mod} \longrightarrow k[X]_{\mathfrak{m}_p}\text{-Mod}, \quad M \longmapsto M_p := k[X]_{\mathfrak{m}_p} \otimes_{k[X]} M.$$

El *soporte* de M es entonces el conjunto

$$\operatorname{supp}(M) = \{p \in \mathbb{A}^n \mid M_p \neq 0\}.$$

Proposición 1.5. *Sea M un A_n-módulo que es finitamente generado sobre $k[X]$. Sea $I = \operatorname{ann}(M)$ el anulador de M en $k[X]$. Entonces*

$$\operatorname{supp}(M) = V(I) \subseteq \mathcal{O}(\mathbb{A}^n).$$

En particular, $\operatorname{supp}(M)$ *es una variedad algebraica afín.*

Demostración. Procedemos por inducción sobre el número de generadores de M. Si $M = 0$ podemos asumir que su conjunto de generadores es vacío y su anulador es $k[X]$, de donde $\operatorname{supp}(M) = \emptyset = V(k[X])$.

Si $M = k[X]/I$ es cíclico, con anulador I, tenemos que $M_p = k[X]_{\mathfrak{m}_p}/I_{\mathfrak{m}_p}$ pues la localización conmuta con cokernels. Entonces, si $p \in V(I)$, tenemos que $I_{\mathfrak{m}_p} \neq k[X]_{\mathfrak{m}_p}$ de donde $M_p \neq 0$ y así $p \in \operatorname{supp}(M)$. Recíprocamente, si $p \notin V(I)$, existe $f \in I$ tal que $f \notin \mathfrak{m}_p$, y tenemos que f es invertible en $k[X]_{\mathfrak{m}_p}$ que es un anillo local y $f \in I_{\mathfrak{m}_p}$, por lo que $k[X]_{\mathfrak{m}_p} = I_{\mathfrak{m}_p}$, de donde $M_p = 0$ y $p \notin \operatorname{supp}(M)$.

Supongamos que $x_1, \dots, x_n$ son generadores de M, con $n \geq n$, y sea M' el submódulo generado por $x_1, \dots, x_{n-1}$. Entonces existe una sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0,$$

donde M'' es cíclico. Por hipótesis de inducción, si I' e I'' son los anuladores de M' y M'', respectivamente, tenemos que $\operatorname{supp}(M') = V(I')$ y M" $= V(I'')$. Más aún, la exactitud implica que

$$\operatorname{supp}(M) = \operatorname{supp}(M') \cup \operatorname{supp}(M'') = V(I') \cup V(I'') = V(I'I'')$$

Pero es fácil notar que $I'I'' \subseteq I \subseteq I \cap I''$ y por ende $V(I) = V(I'I'')$, de donde $\operatorname{supp}(M) = V(I)$, como se deseaba. □

1.4. Variedades características. Sea M un A_n-módulo finitamente generado con dos buenas filtraciones Γ y Γ'. Sean I e I' los anuladores en S_n de los módulos $\operatorname{gr}^\Gamma M$ y $\operatorname{gr}^{\Gamma'} M$. Entonces es fácil probar, usando la Proposición 1.4, que $\sqrt{I} = \sqrt{I'}$. Definimos entonces $J(M) = \sqrt{I}$ donde I es el anulador de $\operatorname{gr}^\Gamma M$ para cualquier buena filtración de M. El ideal radical $J(M) \subseteq S_n$ se llama el *ideal característico de M*.

La *variedad característica de M*, denotada por $\operatorname{Char}(M)$ se define como la variedad algebraica afín

$$\operatorname{Char}(M) = V(J(M)) \subseteq \mathbb{A}^{2n}.$$

Notemos que como $\operatorname{supp}_{S_n}(M) = V(I) = V(J(M))$, tenemos una definición alternativa de variedad característica:

$$\operatorname{Char}(M) = \operatorname{supp}_{S_n}(M).$$

En particular, tenemos el siguiente resultado.

Proposición 1.6. *Dada una sucesión exacta de A_n-módulos*

$$0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$$

se tiene que

$$\operatorname{Char}(M) = \operatorname{Char}(M') \cup \operatorname{Char}(M'').$$

Recordemos el siguiente resultado (ver [Har77], Teorema I.7.5).

Teorema 1.7 (Hilbert-Serre). *Sea M un S_n-módulo finitamente generado y sea $P_M(z)$ el polinomio de Hilbert de M. Entonces*

$$\dim V(I) = \deg P_M(z),$$

donde I es el anulador de M en S_n.

Definimos la *dimensión*, denotada por $\dim(M)$, de un A_n-módulo M que admite una buena filtración Γ como el grado del polinomio de Hilbert del módulo graduado $\operatorname{gr}^\Gamma M$. A partir de este resultado, obtenemos trivialmente

Teorema 1.8. *Sea M un módulo sobre A_n. Entonces*

$$\dim(M) = \dim \operatorname{Char}(M).$$

Estructura del artículo. En la Sección 2 introducimos la notación, convenciones y hechos preliminares a ser usados durante este trabajo.

La Sección 3 introduce el concepto de sistemas locales, y estudia a fondo su relación con los espacios recubridores y la acción por monodromía sobre las fibras de un espacio recubridor.

La Sección 4 presenta el concepto de operadores diferenciales sobre una variedad algebraica suave. Para ello, mostramos una construcción del haz tangente como el haz de derivaciones del haz estructural de una variedad algebraica. El objetivo principal es el de definir el haz de operadores diferenciales de una variedad algebraica.

La Sección 5 introduce el concepto de D-módulo algebraico y su relación con las conexiones planas. En particular se estudia la equivalencia entre D-módulos algebraicos coherentes y los fibrados vectoriales planos.

La Sección 6 trata el caso analítico, entre ellos el funtor de analitización, D-módulos analíticos, y la equivalencia entre D-módulos analíticos coherentes y sistemas locales.

Finalmente, la Sección 7 presenta la construcción del funtor de Knizhnik-Zamolodchikov. Para esto previamente se introducen los conceptos claves de álgebra de Cherenik racional y categoría $\mathcal{O}_c$. Además, se hace un breve disgresión sobre la hacificación del álgebra de Cherenik racional, esto sólo como dato informativo. Esta construcción es una aplicación de (una versión más simple) de la teoría presentada hasta el momento. En particular, se hace uso libre de la equivalencia entre las categorías de sistemas locales, representaciones del grupo fundamental, módulos analíticos coherentes, etc., aunque esta no sea precisamente en el contexto de haces, sino en un caso más sencillo. Esta es la única sección no autocontenida en este trabajo, pues muchos de los teoremas están fuera del alcance y/o interés del trabajo y corresponden a otras áreas de la matemática.

Me hubiese gustado profundizar más en el tema de D-módulos algebraicos, introduciendo la equivalencia entre módulos izquierdos y derechos, la relación entre módulos algebraicos y analíticos a través del funtor de de Rham, estudiar imágenes directas e inversas y en particular la correspondencia de Kashiwara y la correspondencia de Riemann-Hilbert (esto en el contexto analítico), sin embargo, por no extender innecesariamente este trabajo y no perjudicar al lector del mismo, he acortado considerablemente los temas expuestos.

Agradecimientos. Agradezco mucho a Pedro Montero por darme la oportunidad de realizar este trabajo y así aprender sobre la teoría de D-módulos, tópico indispensable en mi área de investigación, por sus sugerencias en la preparación de este trabajo escrito. Agradezco también a Stephen Griffeth, quien resolvió muchas de mis dudas y de quién aprendí la existencia del funtor KZ.

2. Notación, convenciones y hechos preliminares

2.1. Convenciones y definiciones. Durante todo el artículo, todas las variedades y morfismos estarán definidos sobre un cuerpo k algebraicamente cerrado. Toda variedad algebraica se asume separada y suave a menos que se indique lo contrario. Todos los anillos y álgebras se asumen con unidad pero *no se asumen conmutativos*. Por este motivo, se hará énfasis enla hipótesis de conmutatividad cuando esta sea hecesaria. Las definiciones de prehaces y haces se generalizan *mutatis mutandis* al caso no conmutativo. Un *espacio anillado* $(X, \mathcal{O}_X)$ es un par formado por un espacio topológico X y un haz de anillos (no necesariamente conmutativos) sobre X. Un $\mathcal{O}_X$-módulo izquierdo y un $\mathcal{O}_X$-módulo derecho se definen análogamente al caso conmutativo. Una $\mathcal{O}_X$-álgebra es un $\mathcal{O}_X$-módulo $\mathscr{F}$ que a la vez es un haz de álgebras donde para cada abierto $U \subseteq X$, el $\mathcal{O}_X(U)$-módulo $\mathscr{F}(U)$ es una $\mathcal{O}_X(U)$-álgebra, y donde los morfismos de restricción son homomorfismos de álgebras.

Si X es un espacio topológico y x, y, z son tres puntos en X, dados caminos $\alpha, \beta : [0,1] \to X$ tales que $\alpha(0) = x$, $\alpha(1) = y = \beta(0)$ y $\gamma(1) = z$, entonces escribimos

$$[\beta][\alpha] = [\alpha * \beta]$$

para su composición en el grupoide fundamental $\Pi_1(X)$. En particular, si $x = y = z$ entonces $[\beta][\alpha]$ significa "primero recorrer α y después recorrer β". Esta convención es la opuesta a la que suele aparecer usualmente en las referencias de topología algebraica, pero permite que la acción por monodromía de $\pi_1(X, x)$ sobre la fibra $p^{-1}(x)$ de un espacio recubridor $p : Y \to X$ sea por izquierda, y no por derecha a como usualmente estamos acostumbrados.

2.2. Notación. Denotaremos por $\mathbb{C}$ al cuerpo de los números complejos. Durante todo este trabajo, k denotará un cuerpo algebraicamente cerrado. Si X es un espacio topológico, denotaremos por k_X al haz constante a valores en k, es decir, el haz de funciones localmente constantes a valores en k. En particular $\mathbb{C}_X$ es el haz de funciones localmente constantes a valores en $\mathbb{C}$.

El símbolo $\mathbb{N}$ denota al conjunto de los números enteros no negativos.

Si $\mathscr{F}$ es un haz sobre un espacio topológico X, la expresión $s \in \mathscr{F}$ significa que $s \in \mathscr{F}(U)$ para cierto abierto $U \subseteq X$. Más aún, si $\varphi : \mathscr{F} \to \mathscr{G}$ es un morfismo de haces, y $s \in \mathscr{F}$, la expresión $\varphi(s)$ significa $\varphi_U(s)$, donde $U \subseteq X$ es el abierto tal que $s \in \mathscr{F}(U)$.

Si A es un anillo o álgebra, denotamos por A-Mod a la categoría de A-módulos izquierdos. Las demás categorías se irán denotando conforme sean definidas.

2.3. Hechos preliminares. Sólo usaremos explícitamente un resultado de carácter categórico que no ha sido tocado en el curso: Sea X un espacio topológico y denotemos por $\mathbf{Sh}(X)$ y $\mathbf{PreSh}(X)$ las categorías de haces y prehaces sobre X, respectivamente. Existe un funtor de inclusión obvio $\iota : \mathbf{Sh}(X) \to \mathbf{PreSh}(X)$ (el funtor de olvido).

Proposición 2.1. *El funtor de hacificación* $(\cdot)^+ : \mathbf{PreSh}(X) \to \mathbf{Sh}(X)$ *es adjunto por izquierda al funtor de olvido* $\iota : \mathbf{Sh}(X) \to \mathbf{PreSh}(X)$*. En particular, la hacificación conmuta con colímites.*

Demostración. El hecho de que el par $((\cdot)^+, \iota)$ forman un par adjunto es equivalente al hecho de que para cada prehaz $\mathscr{F}$ y cada haz $\mathscr{G}$, la aplicación natural

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{PreSh}(X)}(\mathscr{F}, \iota\mathscr{G}) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbf{Sh}(X)}(\mathscr{F}^+, \mathscr{G})$$

descrita por la propiedad universal de la hacificación, es una biyección. Esto es tautológico, lo que prueba que $(\cdot)^+$ es adjunto por izquierda al funtor ι. El hecho de que el funtor de hacificación conmuta con colímites es un resultado general de la teoría de categorías. Ver por ejemplo el Teorema 1 de la Sección 5 del Capítulo V en [ML91]. $\square$

3. Sistemas locales y monodromía

Durante esta sección X denotará un espacio topológico conexo y localmente conexo por caminos. En particular, si X es además semi-localmente 1-conexo, entonces X admite un recubrimiento universal $p : \tilde{X} \to X$.

3.1. Haces localmente libres. Un haz $\mathscr{F}$ sobre X se dice *localmente libre* si para cada $x \in X$ existe una vecindad abierta U de x tal que $\mathscr{F}|_U$ es (isomorfo a) un haz constante (i.e. la hacificación de un prehaz constante). En particular, todo haz constante es localmente constante.

El ejemplo más importante para nosotros será el siguiente: Sea $p : Y \to X$ una aplicación continua. Si $U \subseteq X$ es un abierto, definimos una *sección* de p sobre U como una aplicación continua $\sigma : U \to Y$ tal que $p \circ \sigma = \mathrm{id}_U : U \to U$. Denotamos al conjunto de secciones de p sobre U por $\mathscr{F}_p(U)$ o por $\mathscr{F}_Y$ cuando f es claro para el contexto. Entonces $\mathscr{F}_Y$ es un haz, llamado el *haz de secciones* de p.

Proposición 3.1. *Si* $p : Y \to X$ *es un espacio recubridor de* X*, entonces* $\mathscr{F}_Y$ *es un haz localmente libre.*

Demostración. Sea $x \in X$ un punto y sea U una vecindad uniformemente cubierta por p, es decir, tal que existe una familia de abiertos disjuntos $\{V_j\}_{j \in J}$ de Y tales que

$$p^{-1}(U) = \bigcup_{j \in J} V_j$$

y tal que para cada $j \in J$, la proyección $p : Y \to X$ induce un homeomorfismo $p|_{v_j} \to U$. Por la teoría general de espacios recubridores, sabemos que $p^{-1}(x)$ es un espacio discreto y que la aplicación

$$p^{-1}(x) \times U \longrightarrow p^{-1}(U), \quad (y, u) \longmapsto p|_{V_j}^{-1}(u)$$

donde $j \in J$ es el único índice tal que $x \in V_j$, es un homeomorfismo. Reduciendo U si es necesario, podemos asumir que U es conexo. Sea $\mathscr{G} \in \mathbf{Sh}(U)$ el haz constante asociado la fibra $p^{-1}(x)$. Probaremos que los haces $\mathscr{F}|_U$ y $\mathscr{G}$ son isomorfos. Para ello, sea $V \subseteq U$ un abierto y sea $V = \bigcup_{a \in A} C_a$ la descomposición de V en componentes conexas. Si $s \in \mathscr{F}(V)$ entonces $p \circ s = \mathrm{id}_V$. Luego $s(C_a) \subseteq p^{-1}(U)$ y por ende cada $s(C_a)$ debe estar contenido en una de las componentes conexas V_j de $p^{-1}(U)$. Sea $\{x_j\} = V_j \cap p^{-1}(x)$. Entonces definimos una función $\varphi_V(s) : V \to p^{-1}(x)$ mediante $\varphi(x)|_{C_a} \equiv x_j$ donde V_j es la única componente conexa de $p^{-1}(U)$ tal que $s(C_a) \subseteq V_j$. De este modo obtenemos un morfismo de haces

$$\varphi : \mathscr{F}|_U \to \mathscr{G}.$$

Este es un isomorfismo de haces, cuya inversa está definida como sigue: Para cada $V \subseteq U$ abierto, y cada función $f : V \to p^{-1}(x)$ localmente constante, tenemos que $f(C_a) = \{x_j\}$ para cierto j, entonces tenemos que

$$\varphi_V^{-1}(f)|_{C_a} = p|_{p^{-1}(C_a)}^{-1}$$

define una función $\varphi_V^{-1}(f) : V \to Y$ que es una sección de p por definición. □

Denotamos por $\mathbf{Cov}(X)$ a la categoría de espacios recubridores de X. Sus objetos son espacios recubridores $p : Y \to X$ y un morfismo en esta categoría está dada por diagramas conmutativos

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[rr] \arrow[dr, "p"'] & & Y' \arrow[dl, "p'"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

Denotamos por $\mathbf{LFSh}(X)$ a la categoría de haces localmente libres sobre X. La construcción anterior define un funtor

$$\mathrm{LF} : \mathbf{Cov}(X) \longmapsto \mathbf{LFSh}(X), \quad [p : Y \to X] \longmapsto \mathscr{F}_Y.$$

Para ver que este es un funtor, debemos probar que si $f : Y \to Y'$ es un morfismo de espacios recubridores, este induce un morfismo $\mathrm{LF}(f) : \mathscr{F}_Y \to \mathscr{F}_{Y'}$ y que esta asignación es funtorial. Pero esto es trivial: Para cada abierto $U \subseteq X$, definimos

$$\mathrm{LF}(f)_U : \mathscr{F}_Y(U) \longrightarrow \mathscr{F}_{Y'}(U), \quad s \longmapsto f \circ s.$$

Esta aplicación está bien definida pues

$$p' \circ (f \circ s) = (p' \circ f) \circ s = p \circ s = \mathrm{id}_U .$$

Recordemos que si $\mathscr{F}$ es un haz sobre X, el *espacio étale* de $\mathscr{F}$ se define por

$$\text{Ét}(\mathscr{F}) = \coprod_{x \in X} \mathscr{F}_x,$$

y viene equipado con una proyección natural

$$\pi_{\mathscr{F}} : \text{Ét}(\mathscr{F}) \longrightarrow X, \quad s_x \longmapsto x.$$

Cada sección $s \in \mathscr{F}(U)$ define una función $\sigma_s : U \to \text{Ét}(\mathscr{F})$, y los conjuntos $\sigma_s(U)$ conforman una base para una topología sobre $\text{Ét}(\mathscr{F})$ para la cual la proyección $\pi_{\mathscr{F}}$ es continua. Más aún, $\varphi : \mathscr{F} \to \mathscr{G}$ es un morfismo de haces, este induce un morfismo a nivel de stalks $\varphi_x : \mathscr{F}_x \to \mathscr{G}_x$ para cada $x \in X$, y ensamblando estos morfismos obtenemos una aplicación

$$\text{Ét}(\varphi) : \text{Ét}(\mathscr{F}) \longrightarrow \text{Ét}(\mathscr{G}), \quad s_x \longmapsto \varphi_x(s_x).$$

Esta aplicación es claramente continua en las topologías Étale, y por ende obtenemos un funtor

$$\text{Ét} : \mathbf{Sh}(X) \longrightarrow \mathbf{Top}/X$$

donde $\mathbf{Top}/X$ es la categoría slice de la categoría $\mathbf{Top}$ sobre el objeto X, es decir, la categoría cuyos objetos son aplicaciones continuas $f : Y \to X$ y donde un morfismo está dado por un diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[rr] \arrow[dr, "f"'] & & Y' \arrow[dl, "f'"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

Proposición 3.2. *Si $\mathscr{F} \in \mathbf{Sh}(X)$ es un haz localmente constante, entonces $\pi_{\mathscr{F}} : \text{Ét}(\mathscr{F}) \to X$ es un espacio recubridor. En particular, tenemos un funtor*

$$\text{Ét} : \mathbf{LFSh}(X) \longrightarrow \mathbf{Cov}(X).$$

Demostración. Sea $U \subseteq X$ un abierto tal que $\mathscr{F}|_U$ es un haz trivial. Entonces para todo $x \in U$ tenemos que $\mathscr{F}_x \cong F$ para cierto espacio discreto F. De este modo, tenemos que

$$\pi_{\mathscr{F}}^{-1}(U) \cong F \times U,$$

lo que prueba que U es uniformemente cubierto por $\pi_{\mathscr{F}}$ y por ende que $\pi_{\mathscr{F}}$ es una proyección recubridora. □

Todas las construcciones hasta el momento son claramente funtoriales, por lo que hemos obtenido una inversa para el funtor LF:

Teorema 3.3. *Si X es un espacio topológico localmente conexo, entonces el funtor $\mathrm{LF} : \mathbf{Cov}(X) \to \mathbf{LFSh}(X)$ es una equivalencia de categorías, cuya inversa es el funtor $\text{Ét} : \mathbf{LFSh}(X) \to \mathbf{Cov}(X)$.*

3.2. La acción por monodromía. Recordemos que si $p : Y \to X$ es un espacio recubridor, y $x_0 \in X$ es un punto base, entonces el grupo fundamental $\pi_1(X, x_0)$ actúa sobre la fibra $p^{-1}(x_0)$ por *monodromía.* Más precisamente, si $[\gamma] \in \pi_1(X, x_0)$ representa a un lazo $\gamma : [0, 1] \to X$ con base en x_0, denotamos por $\tilde{\gamma}_y : [0, 1] \to Y$ al único levantamiento de γ a Y que inicia en $y \in p^{-1}(x_0)$ y definimos

$$[\gamma] \cdot y = \tilde{\gamma}_y(1).$$

Entonces obtenemos un funtor para cada $x \in X$

$$\mathrm{Fib}_x : \mathbf{Cov}(X) \longrightarrow \pi_1(X, x)-\mathbf{Sets}, \quad [p : Y \to X] \longmapsto p^{-1}(x),$$

donde $\pi_1(X, x)-\mathbf{Sets}$ denota la categoría de conjuntos equipados con una acción por izquierda del grupo fundamental $\pi_1(X, x)$. Este es en efecto un funtor, pues si $f : Y \to Y'$ es un morfismo entre los espacios recubridores $p : Y \to X$ y $q : Y' \to X$, este induce una aplicación $\pi_1(X, x)$-equivariante

$$f_x : p^{-1}(x) \longrightarrow q^{-1}(x), \quad y \mapsto f(y),$$

la cual está bien definida, pues si $p(y) = x$, entonces $qf(y) = p(y) = x$. Esta asignación es claramente funtorial.

Llamamos a Fib_x el *funtor de fibras* sobre el punto x.

El siguiente teorema es bien conocido en Topología Algebraica.

Teorema 3.4. *Sea X un espacio conexo, localmente conexo por caminos y localmente 1-conexo. Para cada punto $x \in X$, el funtor de fibras* $\mathrm{Fib}_x : \mathbf{Cov}(X) \to \pi_1(X, x)-\mathbf{Sets}$ *es una equivalencia de categorías.*

Idea de la demostración. Para cada punto $x \in X$ definimos un espacio topológico $\tilde{X}_x$ como sigue: Sus elementos son clases de homotopía $[\gamma]$ de caminos $\gamma : [0, 1] \to X$ tales que $\gamma(0) = x$. Dado un punto $[\gamma] \in \tilde{X}_x$ con $\gamma(1) = y$, definimos una base de vecindades abiertas de $[\gamma]$ mediante los conjuntos $\tilde{U}_{[\gamma]} \subseteq \tilde{X}_x$ definimos como sigue: Sea $U \subseteq X$ una vecindad simplemente conexa de y, sea $\tilde{U}_{[\gamma]}$ el conjunto de todas las clases de homotopía de caminos $\alpha : [0, 1] \to X$ tales que $\alpha(0) = y$ y $\alpha([0, 1]) \subseteq U$. Esto equipa a $\tilde{X}_x$ con una topología. Definimos una proyección $p_x : \tilde{X}_x \to X$ mediante $p_x([\gamma]) = \gamma(1)$. Entonces podemos probar que $p_x : \tilde{X}_x \to X$ es una espacio recubridor de X.

Dado $p : Y \to X$, el conjunto $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Cov}(X)}(\tilde{X}_x, Y)$ está en biyección con la fibra $p^{-1}(x)$. En efecto, dado $y \in p^{-1}(x)$, construimos un morfismo $\theta_y : \tilde{X}_y \to Y$ definiendo, para cada $[\gamma] \in \tilde{X}_y$,

$$\theta_y(\gamma) = \tilde{\gamma}_y(1),$$

donde $\tilde{\gamma}_y : [0, 1] \to \tilde{X}_X$ es el único levantamiento de γ a $\tilde{X}_x$ que verifica $\tilde{\gamma}_y(0) = y$. Esto establece una aplicación

$$p^{-1}(x) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbf{Cov}(X)}(\tilde{X}_x, Y), \quad y \longmapsto \theta_y.$$

La inversa de esta aplicación admite una descripción simple: Si $f : \tilde{X}_x \to Y$ es un morfismo de espacios recubridores, y denotamos por $1_x : [0, 1] \to X$ el camino constante sobre x, es decir, $1_x(t) = x$ para todo $t \in [0, 1]$, entonces

$$f \mapsto f([1_x])$$

nos da la inversa deseada.

Podemos usar esta biyección para "trasladar" la acción por monodromía de $\pi_1(X, x)$ sobre $f^{-1}(x)$ a una acción sobre $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Cov}(X)}(\tilde{X}_x, Y)$, y así obtenemos

$$([\gamma] \cdot f)([\alpha]) = \tilde{\alpha}_{[\gamma]\cdot f([1_x])}(1), \quad [\alpha] \in \tilde{X}_x, f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Cov}(X)}(\tilde{X}_x, Y), [\gamma] \in \pi_1(X, x).$$

De este modo, tenemos que el funtor $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Cov}(X)}(\tilde{X}_x, \cdot)$ toma valores en la categoría $\pi_1(X, x)-\mathbf{Sets}$:

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Cov}(X)}(\tilde{X}_x, \cdot) : \mathbf{Cov}(X) \longrightarrow \pi_1(X, x)-\mathbf{Sets}, \quad [p : Y \to X] \longmapsto \mathrm{Hom}_{\mathbf{Cov}(X)}(\tilde{X}_x, Y) \cong p^{-1}(x).$$

Resulta ser que el objeto $\tilde{X}_x$ representa al funtor Fib_x, es decir, que existe un isomorfismo natural

$$\eta : \mathrm{Fib}_x \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathbf{Cov}(X)}(\tilde{X}_x, \cdot)$$

Con esto, la conclusión es sencilla. Basta probar que el funtor Fib_x es plenamente fiel y esencialmente sobreyectivo[1]. Para esto, basta probar que dados dos espacios recubridores $p : Y \to X$ y $q : Z \to X$, todo morfismo $\varphi : p^{-1}(x) \to q^{-1}(x)$: es de la forma $\varphi = \mathrm{Fib}_x(f)$ para un único morfismo de espacios recubridores $f : Y \to Z$. Dado $y \in p^{-1}(x)$, consideramos el morfismo de espacios recubridores $\theta_y : \tilde{X}_x \to Y$. Dado que $\tilde{X}_x$

[1]Un resultado clásico en teoría de categorías establece que un funtor es una equivalencia de categorías si y sólo si es pleno, fiel y esencialmente sobreyectivo.

es el espacio recubridor universal de X, sea $G_y \subseteq \mathrm{Cov}(\tilde{X}_x/Y)$ el grupo de isotropía del elemento $y \in Y$ bajo la acción del grupo $\mathrm{Cov}(\tilde{X}_x/Y)$ (notemos que en este caso $\theta_y : \tilde{X}_X \to Y$ es también un espacio recubridor, por la universalidad de $\tilde{X}_x$). De este modo, θ_y induce un homeomorfismo $\psi_y^{-1} : \tilde{X}_x/G_y \to Y$. El grupo de isotropía G_y se inyecta en el grupo de isotropía de $\varphi(y)$ por la equivarianza de φ, de modo que la aplicación $\theta_{\varphi(y)} : \tilde{X}_x \to Z$ induce una aplicación $\rho_y : \tilde{X}_x/G_y \to Z$, y si definimos $f : Y \to Z$ como la composición $\rho_y \circ \psi_y$, obtenemos el único morfismo de espacios recubridores deseado. La sobreyectividad esencial es sencilla de probar. $\square$

Recordemos que cuando $\mathscr{F}$ es un haz localmente libre, tenemos que la proyección étale $p_{\mathscr{F}} : \text{Ét}(\mathscr{F}) \to X$ es una proyección recubridora y por construcción, para todo $x \in X$ se tiene que la fibra de x bajo $p_{\mathscr{F}}$ coincide con el stalk de $\mathscr{F}$ en x:

$$p_{\mathscr{F}}^{-1}(x) = \mathscr{F}_x.$$

En particular, para cada $x \in X$, la composición de los funtores

$$\text{Ét} : \mathbf{LFSh}(X) \longrightarrow \mathbf{Cov}(X) \quad \text{y} \quad \mathrm{Fib}_x : \mathbf{Cov}(X) \longrightarrow \pi_1(X,x)\text{−}\mathbf{Sets}$$

es una equivalencia de categorías dada por el funtor de Stalks:

$$\mathrm{Stalk}_x : \mathbf{LFSh}(X) \longrightarrow \pi_1(X,x)\text{−}\mathbf{Sets}, \quad \mathscr{F} \longmapsto \mathscr{F}_x. \tag{3.1}$$

Esto prueba

Teorema 3.5. *Para cada $x \in X$ el funtor de stalks (3.1) es una equivalencia entre la cartegoría $\mathbf{LFSh}(X)$ de haces localmente constantes sobre X y la categoría $\pi_1(X,x)$−$\mathbf{Sets}$ de conjuntos con una acción por izquierda del grupo fundamental $\pi_1(X,x)$.*

Sea $x \in X$ y $\mathscr{F}$ un haz localmente constante sobre X. Vamos a mirar cómo actúa $\pi_1(X,x)$ sobre el stalk $\mathscr{F}_x$. Sea $[\gamma] \in \pi_1(X,x)$ y sea $s_x \in \mathscr{F}_x$ el germen de una sección $s \in \mathscr{F}$. Denotamos por $\tilde{\gamma}_{s_x}$ el único levantamiento de γ a $\text{Ét}(\mathscr{F})$ que inicia en s_x; entonces

$$[\gamma] \cdot s_x = \tilde{\gamma}_{s_x}(1).$$

Llamaremos a esta acción la *acción por monodromía* de $\pi_1(X,x)$ sobre $\mathscr{F}_x$.

3.3. Sistemas locales complejos. Un *sistema local complejo* sobre X es un haz $\mathcal{L}$ localmente constante a valores en la categoría de espacios vectoriales complejos de dimensión finita. Denotamos por $\mathbf{LocSys}_{\mathbb{C}}(X)$ a la categoría de sistemas locales complejos sobre X. Usualmente omitiremos el calificativo "complejo" de nuestra terminología y diremos simplemente "sistema local" para referirnos a un sistema local complejo.

Si $\mathcal{L}$ es un sistema local sobre X y $x \in X$, entonces el stalk $\mathcal{L}_x$ es un $\mathbb{C}$-espacio vectorial de dimensión finita.

Lema 3.6. *La acción por monodromía de $\pi_1(X,x)$ sobre $\mathcal{L}_x$ es compatible con la estructura de $\mathbb{C}$-espacio vectorial, en el sentido de que cada $[\gamma] \in \pi_1(X,x)$ actúa por operadores lineales sobre $\mathcal{L}_X$.*

Demostración. Existen un *morfismo de suma* $S : \mathcal{L} \oplus \mathcal{L} \to \mathcal{L}$ y un morfismo de multiplicación dado por $M : \mathbb{C}_X \oplus \mathcal{L} \to \mathcal{L}$ definidos para cada abierto $U \subseteq X$ por

$$S_U(s,t) = s + t \quad \text{y} \quad M_U(a,s) = as, \quad a \in \mathbb{C}_X(U), s,t \in \mathcal{L}(U).$$

Claramente S y M son morfismos de sistemas locales y por ende inducen aplicaciones $\pi_1(X,x)$-equivariantes $S_x : \mathscr{F}_x \oplus \mathscr{F}_x \to \mathscr{F}_x$ y $M_x : \mathbb{C} \oplus \mathscr{F}_x \to \mathscr{F}_x$, lo que significa precisamente que la acción de $\pi_1(X,x)$ sobre $\mathscr{F}_x$ es por operadores lineales. $\square$

Dado un grupo G, denotamos por $\mathbf{Rep}_{\mathbb{C}}(G)$ a su categoría de representaciones lineales complejas de dimensión finita. En particular, tenemos que $\mathbf{Rep}_{\mathbb{C}}(G)$ es una subcategoría plena de la categoría $\mathbb{C}G$-Mod de módulos izquierdos sobre el álgebra de grupo $\mathbb{C}G$. Entonces el lema anterior muestra que $\mathcal{L}_x$ tiene una estructura de $\mathbb{C}\pi_1(X,x)$-módulo izquierdo, y así tenemos

Teorema 3.7. *El funtor*

$$\mathrm{Stalk}_x : \mathbf{LocSys}_{\mathbb{C}}(X) \to \mathbf{Rep}_{\mathbb{C}}(\pi_1(X,x))$$

es una equivalencia de categorías.

En particular, definir un sistema local $\mathcal{L}$ sobre X es lo mismo que definir un homomorfismo de grupos

$$\rho_x : \pi_1(X,x) \longrightarrow \mathrm{GL}(\mathscr{F}_x).$$

Esta representación se llama la *representación de monodromía* del sistema local $\mathcal{L}$.

4. Operadores diferenciales

4.1. Módulo de derivaciones. Sea A una k-álgebra y M un A-módulo. Una A-*derivación* de M es una aplicación k-lineal $d : A \to M$ que verifica la *regla de Leibniz*: Para todo $a, b \in A$,

$$d(ab) = ad(b) + bd(a).$$

Denotamos al conjunto de todas las A-derivaciones de M como $\mathrm{Der}_k(A, M)$. Nótese que $\mathrm{Der}_k(A, M)$ es claramente un A-módulo, llamado el módulo de A-derivaciones de M. En el caso particular cuando $M = A$, escribimos $\mathrm{Der}_k(A)$ en lugar de $\mathrm{Der}_k(A, A)$, y en este caso $\mathrm{Der}_k(A)$ tiene la estructura de un álgebra de Lie dada por el corchete

$$[d_1, d_2] = d_1 \circ d_2 - d_2 \circ d_1, \quad d_1, d_2 \in \mathrm{Der}_k(A).$$

Teorema 4.1. *Sea $A = k[X_1, \ldots, X_n]$, y escribamos $\partial_i = \dfrac{\partial}{\partial_i}$. Entonces*

$$\mathrm{Der}_k(A) = \bigoplus_{i=1}^{n} A\partial_i.$$

En particular, $\mathrm{Der}_k(A)$ *es un A-módulo libre finitamente generado de rango n*

Demostración. Claramente $\bigoplus_{i=1}^{n} A\partial_i \subseteq \mathrm{Der}_k(A)$. Sea $d \in \mathrm{Der}_k(A)$ y definamos

$$D' = \sum_{i=1}^{n} d(X_i)\partial_i.$$

Notemos que para todo $1 \leq i \leq n$ tenemos

$$d(X_i^2) = X_i d(X_i) + d(X_i)X_i = 2X_i d(X_i),$$

y

$$d(X_i^3) = d(X_i^2 X_i) = d(X_i^2)X_i + X_i^2 d(X_i) = 2X_i^2 d(X_i) + X_i^2 d(X_i) = 3X_i^2 d(X_i),$$

por lo que recursivamente, vemos que

$$d(X_i^m) = mX_i^{m-1} d(X_i).$$

A partir de esto, tenemos que para todo monomio $X^\alpha = X_1^{\alpha_1} \cdots X_n^{\alpha_n}$ se verifica

$$d(X^\alpha) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j X_1^{\alpha_1} \cdots X_j^{\alpha_j - 1} \cdots X_n^{\alpha_n} d(X_j).$$

Con esto, tenemos que

$$\begin{aligned} D'(X^\alpha) &= \sum_{i=1}^{n} d(X_i)\partial_i(X^\alpha) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i X_1^{\alpha_1} \cdots X_i^{\alpha_i - 1} \cdots X_n^{\alpha_n} d(X_i) \\ &= d(X^\alpha). \end{aligned}$$

Dado que todo polinomio es combinación lineal de monomios, se sigue que

$$d = D' \in \bigoplus_{i=1}^{n} A\partial_i,$$

lo que completa la demostración. □

Corolario 4.2. *Sea A una k-álgebra finitamente generada, entonces* $\mathrm{Der}_k(A)$ *es un A-módulo finitamente generado. Más precisamente, si $A = k[X_1, \ldots, X_n]/I$, entonces*

$$\mathrm{Der}_k(A) \cong \mathrm{Der}_k(k[X_1, \ldots, X_n])^I := \{\theta \in \mathrm{Der}_k(k[X_1, \ldots, X_n]) \mid \theta(I) \subseteq I\}.$$

Demostración. Dada $\theta \in \mathrm{End}_k(k[X])$ (donde $k[X] = k[X_1, \ldots, X_n]$) tal que $\theta(I) \subseteq I$ componiendo con la proyección natural $\pi : k[X] \to k[X]/I$ obtenemos un homomorfismo $\pi \circ \theta$ cuyo núcleo contiene a I y por ende induce un homomorfismo $\overline{\theta} : k[X]/I \to k[X]/I$. Es claro que si θ es una derivación, también lo es $\overline{\theta}$. Así, obtenemos un morfismo

$$\mathrm{Der}_k(k[X])^I \longrightarrow \mathrm{Der}_k(A), \quad d \mapsto \overline{d}.$$

Es fácil probar que este es en efecto un isomorfismo. Dado que $k[X]$ noetheriano y $\mathrm{Der}_k(A)$ puede identificarse con un submódulo de $\mathrm{Der}_k(k[X])$, siendo es último finitamente generado, se sigue que $\mathrm{Der}_k(A)$ es finitamente generado como $k[X]$-módulo y por ende como $A = k[X]/I$-módulo. ☐

Proposición 4.3. *Sea A una k-álgebra y $S \subseteq A$ un conjunto multiplicativo. Entonces*

$$\mathrm{Der}_k(S^{-1}A) \cong S^{-1}\mathrm{Der}_k(A)$$

como $S^{-1}A$-módulos.

Demostración. Dada una derivación $d : A \to A$, definimos una derivación $d' : S^{-1}A \to S^{-1}A$ vía

$$d'\left(\frac{a}{s}\right) = \frac{d(a)s - ad(s)}{s^2}, \quad \text{para todo } a \in A, s \in S.$$

Es fácil probar que d' es una derivación. Por ende, obtenemos un homomorfismo de A-módulos

$$\mathrm{Der}_k(A) \longrightarrow \mathrm{Der}_k(S^{-1}A).$$

Dado que S actúa por automorfismos de A-módulos sobre $\mathrm{Der}_k(S^{-1}A)$ (basta considerar los casos cuando S contiene y no contiene divisores de cero separadamente), por la propiedad universal de la localización (de módulos) obtenemos un homomorfismo de $S^{-1}A$-módulos bien definido

$$S^{-1}\mathrm{Der}_k(A) \longrightarrow \mathrm{Der}_k(S^{-1}A).$$

La inversa de este homomorfismo está dado por

$$d \mapsto [a \mapsto d(a/1)],$$

con lo que obtenemos el isomorfismo de $S^{-1}A$-módulos deseado. ☐

4.2. Haz de derivaciones. Sea ahora $(X, \mathcal{O}_X)$ una variedad algebraica suave sobre k. Denotamos por

$$\mathcal{E}nd_{k_X}(\mathcal{O}_X) = \mathcal{H}om_{k_X}(\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_X)$$

al haz de endomorfismos del k_X-módulo $\mathcal{O}_X$. Una *derivación* de $\mathcal{O}_X$ es un morfismo de k_X-módulos $\theta : \mathcal{O}_X \to \mathcal{O}_X$ tal que, para cada abierto $U \subseteq X$, se tiene

$$\theta_U(fg) = \theta_U(f)g + f\theta_U(g), \quad \text{para todo } f, g \in \Gamma(U, \mathcal{O}_X).$$

Escribimos $\mathcal{D}er_{k_X}(\mathcal{O}_X)$ para el subhaz de $\mathcal{E}nd_{k_X}(\mathcal{O}_X)$ que consiste de tales endomorfismos. Más precisamente,

$$\Gamma(U, \mathcal{D}er_{k_X}(\mathcal{O}_X)) = \{\theta \,|\, \theta \text{ es una derivación de } \mathcal{O}_X|_U\}$$

para cada abierto $U \subseteq X$. Es claro del hecho de que $\mathcal{E}nd_{k_X}(\mathcal{O}_X)$ es un haz, que $\mathcal{D}er_{k_X}$ también es un haz, al que llamamos el *Haz de derivaciones* de $\mathcal{O}_X$.

4.3. Haz tangente. Denotamos por Θ_X a su haz tangente. Recordemos que el haz tangente es el haz de secciones del fibrado tangente $\pi : \mathcal{T}_X \to X$ de X. Más precisamente, si $U \subseteq X$ es un abierto y si $s \in \Gamma(U, \mathcal{T}_X)$, definimos $\theta_s : \Gamma(U, \mathcal{O}_X) \to \Gamma(U, \mathcal{O}_X)$ mediante

$$\theta_s(f)(x) = s(x)(f), \quad \text{para todo } f \in \Gamma(U, \mathcal{O}_X), x \in U,$$

donde $s(x) \in \mathcal{T}_{X,x} = T_xX$. Notemos entonces que si $f, g \in \Gamma(U, \mathcal{O}_X)$,

$$\theta_s(fg)(x) = s(x)(fg) = f(x)s(x)(g) + s(x)(f)g(x) = (fs(g) + s(f)g)(x)$$

para todo $x \in X$, y por ende

$$\theta_s(fg) = s(f)g + fs(g), \quad \text{para todo } f, g \in \Gamma(U, \mathcal{O}_X).$$

Dado que esta expresión es local, la misma expresión funciona sobre todo abierto $V \subseteq U$. Además, claramente θ_s es $\Gamma(U, k_X)$-lineal, de modo que obtenemos un morfismo de haces

$$\Gamma(\cdot, \mathcal{T}_X) \longrightarrow \mathcal{D}er_{k_X}(\mathcal{O}_X) \tag{4.1}$$

definido, en cada abierto $U \subseteq X$ por

$$\begin{array}{rcl}\Gamma(U, \mathcal{T}_X) & \longmapsto & \mathcal{H}om_{k_X|_U}(\mathcal{O}_X|_U, \mathcal{O}_X|_U) \\ s & \longmapsto & \theta_s.\end{array}$$

Recíprocamente, dado $\theta \in \mathcal{H}om_{k_X|_U}(\mathcal{O}_X|_U, \mathcal{O}_X|_U)$ que verifica

$$\theta_V(fg) = \theta_V(f)g + f\theta_V(g), \quad f, g \in \Gamma(V, \mathcal{O}_X)$$

para todo abierto $V \subseteq U$, definimos $s_\theta : U \to \mathcal{T}_X$ mediante

$$s_\theta(x)(f) = \theta_U(f)(x), \quad \text{para todo } f \in \Gamma(U, \mathcal{O}_X), x \in U.$$

Esto prueba que el morfismo (4.1) es un isomorfismo y por ende, podemos identificar el haz tangente Θ_X con el haz de derivaciones de $\mathcal{O}_X$. Es claro que Θ_X tiene una estructura natural de $\mathcal{O}_X$-módulo.

Una sección del haz Θ_X se llama un *campo vectorial*.

Teorema 4.4. *El haz tangente Θ_X es un haz coherente.*

Demostración. Sea $U \subseteq X$ un abierto afín de X y sea $A = \Gamma(U, \mathcal{O}_X)$. Entonces A es una k-álgebra reducida finitamente generada y por el Corolario 4.2 tenemos que $\mathrm{Der}_k(A)$ es un A-módulo finitamente generado. Probaremos que

$$\Theta_X|_U \cong \widetilde{\mathrm{Der}_k(A)},$$

y esto completará la demostración, pues entonces basta recubrir X por una cantidad finita de abiertos afines. Pero esto es simple: Sea $f \in A$ y consideremos $U_f = U \setminus V(f)$ un abierto principal. Entonces $\Gamma(U_f, \mathcal{O}_X) \cong A_f$ y por ende, por la Proposición 4.3 tenemos

$$\Gamma(U_f, \Theta_X) \cong \mathrm{Der}_k(A_f) = (\mathrm{Der}_k(A))_f \cong \Gamma(U_f, \widetilde{\mathrm{Der}_k(A)}),$$

lo que prueba que los haces $\Theta_X|_U$ y $\widetilde{\mathrm{Der}_k(A)}$ coinciden sobre abiertos básicos y por ende son isomorfos. □

4.4. Haz de operadores diferenciales. Manteniendo la notación de la sección anterior, notemos que el haz estructural $\mathcal{O}_X$ puede considerarse como un subhaz del haz $\mathcal{E}nd_{k_X}(\mathcal{O}_X)$ del siguiente modo: Para cada abierto $U \subseteq X$, una sección $f \in \Gamma(U, \mathcal{O}_X)$ determina un endomorfismo de $\mathcal{O}_X|_U$ vía multiplicación, es decir, para cada abierto $V \subseteq U$, tenemos que

$$f_V := f|_V : \Gamma(V, \mathcal{O}_X) \longrightarrow \Gamma(V, \mathcal{O}_X), \quad g \longmapsto f|_V g.$$

Con esto, para cada abierto U, definimos $\mathcal{D}X(U)$ como la subálgebra más pequeña de $\Gamma(U, \mathcal{E}nd_{k_X}(\mathcal{O}_X))$ que contiene a $\mathcal{O}_X(U)$ y a $\Theta_X(U)$. Esto define un sub-prehaz $\mathcal{D}_X$ de $\mathcal{E}nd_{k_X}(\mathcal{O}_X)$, que fácilmente puede verificarse es un haz.

Teorema 4.5. *Sea $(X, \mathcal{O}_X)$ una variedad algebraica afín suave de dimensión n. Para cada $p \in X$ existe un abierto afín $U \subseteq X$, funciones regulares $x_1, \ldots, x_n \in \mathcal{O}_X(U)$, y campos vectoriales $\partial_1, \ldots, \partial_n \in \Theta_X(U)$ tales que*

$$[\partial_j, \partial_j] = 0, \quad \partial_i(x_j) = \delta_{ij}, \quad \textit{para todo } 1 \le i, j \le n$$

y

$$\Theta_X(U) = \bigoplus_{i=1}^n \mathcal{O}_X(U)\partial_i.$$

Llamamos a $\{x_1, \ldots, x_n, \partial_1, \ldots, \partial_n\}$ un sistema de coordenadas locales *sobre U. Además, podemos elegir $x_1, \ldots, x_n$ de modo que sus gérmenes general al ideal maximal $\mathfrak{m}_p$ del anillo local $\mathcal{O}_{X,p}$.*

Demostración. Sea $p \in X$, entonces $\dim_k(\mathfrak{m}_p/\mathfrak{m}_p^2) = n$, por lo que existen funciones regulares $x_1, \ldots, x_n$ definidas en una vecindad abierta $U \subseteq X$ de p cuyos gérmenes en p módulo el ideal $\mathfrak{m}_p^2$ forman una base de $\Omega^1_{X,p} = \mathfrak{m}_p/\mathfrak{m}_p^2$, y por el Lema de Nakayama, tales gérmenes generan al ideal maximal $\mathfrak{m}_p$. Esto se traduce en que los diferenciales $d_p x_1, \ldots, d_p x_n$ forman una base del espacio cotangente $\Omega^1_{X,p}$. Reduciendo U si es necesario podemos asumir que U es afín. Luego, tomando (puntualmente) la base dual $\{\partial_1, \ldots, \partial_n\}$ a la base $\{dx_1, \ldots, dx_n\}$, obtenemos una familia de campos vectoriales $\partial_i \in \Theta_X$. Por definición

$$\partial_i(x_j) = dx_j(\partial_i) = \delta_{ij}$$

y además es claro que

$$\Theta_X(U) = \bigoplus_{i=1}^n \mathcal{O}_X(U)\partial_i.$$

Para terminar, escribamos

$$[\delta_i, \delta_j] = \sum_{r=1}^{n} f_{ij}^r \partial_r, \quad \text{con } f_{ij}^r \in \mathcal{O}_X(U),$$

entonces

$$f_{ij}^\ell = \sum_{r=1}^{n} f_{ij}^r \partial_r(x_\ell) = [\delta_i, \delta_j](x_\ell) = \partial_i \partial_j(x_\ell) - \partial_j \partial_i(x_\ell) = 0,$$

de donde $[\delta_i, \delta_j] = 0$. □

Corolario 4.6. *El haz de operadores diferenciales $\mathcal{D}_X$ es localmente libre. Más precisamente, para cada punto $p \in X$ existe una vecindad afín $U \subseteq X$ y un sistema de coordenadas locales $\{x_1, \ldots, x_n, \partial_1, \ldots, \partial_n\}$ sobre la cual*

$$\mathcal{D}_X(U) = \bigoplus_{\alpha \in \mathbb{N}^n} \mathcal{O}_X(U) \partial^\alpha,$$

donde $\partial^\alpha = \partial_1^{\alpha_1}, \ldots \partial_n^{\alpha_n}$, con $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$.

4.5. Haces graduados y haces filtrados. Sea $(X, \mathcal{O}_X)$ un espacio anillado y $\mathscr{F}$ un $\mathcal{O}_X$-módulo en anillos (es decir, cada $\mathscr{F}(U)$ es un anillo, no necesariamente conmutativo, y un $\mathcal{O}_X(U)$-módulo, para cada abierto $U \subseteq X$). $\mathscr{F}$ se dice un *$\mathcal{O}_X$-módulo graduado* si existe una familia de sub-$\mathcal{O}_X$-módulos $\{\mathscr{F}_n\}_{n \geq 0}$ tal que

$$\mathscr{F} = \bigoplus_{n \geq 0} \mathscr{F}_n$$

y tal que $\mathscr{F}_n \mathscr{F}_m \subseteq \mathscr{F}_{n+m}$ para cada $n, m \geq 0$, es decir, para cada abierto $U \subseteq X$, $\mathscr{F}_n(U)\mathscr{F}_m(U) \subseteq \mathscr{F}_{n+m}(U)$.

Una *filtración* de $\mathscr{F}$ es una familia de sub-$\mathcal{O}_X$-módulos $\{F_n \mathscr{F}\}_{n \geq 0}$ de $\mathscr{F}$ tales que $F_n \mathscr{F}$ es un subhaz de $F_{n+1}\mathscr{F}$ para todo $n \geq 0$ y tal que se verifican las siguientes condiciones:

1. $\mathscr{F} = \bigcup_{n \geq 0} F_n \mathscr{F}$, es decir, para cada abierto $U \subseteq X$, se tiene que

$$\mathscr{F}(U) = \bigcup_{n \geq 0} (F_n \mathscr{F})(U)$$

2. $(F_n \mathscr{F})(F_m \mathscr{F}) \subseteq F_{n+m}\mathscr{F}$ para cada $n, m \geq 0$.

En este caso, decimos que $(\mathscr{F}, F)$ es un *$\mathcal{O}_X$-módulo filtrado.*

Por conveniencia, definimos $F_{-1}\mathscr{F} = 0$.

Para cada $n \geq 0$, se define el $\mathcal{O}_X$-módulo $\mathrm{gr}_n \mathscr{F}$ como el cociente de haces

$$\mathrm{gr}_n \mathscr{F} = (F_n \mathscr{F})/(F_{n-1}\mathscr{F}),$$

y definimos el $\mathcal{O}_X$-módulo $\mathrm{gr}^F \mathscr{F}$ como la suma directa

$$\mathrm{gr}^F \mathscr{F} = \bigoplus_{n \geq 0} \mathrm{gr}_n \mathscr{F}.$$

Llamamos a $\mathrm{gr}^F \mathscr{F}$ el *haz graduado asociado a* $(\mathscr{F}, F)$. Equipamos a $\mathrm{gr}^F \mathscr{F}$ con una estructura de haz de anillos graduados como sigue: Primero, consideramos los prehaces $(F_n \mathscr{F}/F_{n-1}\mathscr{F})_{\mathrm{pre}}$ y formamos el prehaz

$$(\mathrm{gr}^F \mathscr{F})_{\mathrm{pre}} = \bigoplus_{n \geq 0} (F_n \mathscr{F}/F_{n-1}\mathscr{F})_{\mathrm{pre}}.$$

Este prehaz tiene una estructura natural de prehaz de anillos. En efecto, si $U \subseteq X$ es abierto, dados $s \in F_n \mathscr{F}(U)$ y $t \in F_m \mathscr{F}(U)$, definimos

$$(s + F_{n-1}\mathscr{F}(U))(t + F_{m-1}\mathscr{F}(U)) = st + F_{n+m-1}\mathscr{F}(U).$$

Esto equipa a $(\mathrm{gr}^F \mathscr{F})_{\mathrm{pre}}(U)$ con la estructura de un anillo graduado. Luego, el funtor de hacificación aplica $(\mathrm{gr}^F \mathscr{F})_{\mathrm{pre}} \mapsto \mathrm{gr}^F \mathscr{F}$ (recordemos que el funtor de hacificación es un adjunto por izquierda, y por ende conmuta con sumas directas) equipando a $\mathrm{gr}^F \mathscr{F}$ con una estructura de haz de anillos graduados.

Es claro de la construcción que $\mathrm{gr}^F \mathscr{F}$ es un haz graduado, y que gr define un funtor desde la categoría de haces filtrados $\mathbf{filtSh}(X)$ hacia la categoría de haces graduados $\mathbf{grSh}(X)$, dado por

$$\mathrm{gr} : \mathbf{filtSh}(X) \longrightarrow \mathbf{grSh}(X), \quad (\mathscr{F}, F) \longmapsto \mathrm{gr}^F \mathscr{F}.$$

4.6. Filtración por grados. El haz de operadores diferenciales $\mathcal{D}_X$ sobre una variedad algebraica suave $(X, \mathcal{O}_X)$ admite una estructura de haz filtrado que describimos a continuación. Para cada abierto afín U con un sistema de coordenadas $\{x_1, \dots, x_n, \partial_1, \dots, \partial_n\}$, definimos

$$F_n\mathcal{D}_X(U) = \bigoplus_{|\alpha| \le n} \mathcal{O}_X(U)\partial^\alpha$$

donde si $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$, tenemos que $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$. Antes de definir esta filtración sobre un abierto general, denotemos por $\mathrm{Loc}(X)$ a la colección de todos los abiertos afines $U \subseteq X$ sobre los cuales existe un sistema de coordenadas locales. Así, si $V \subseteq X$ es un abierto arbitrario, definimos

$$F_n\mathcal{D}_X(V) = \{P \in \mathcal{D}_X(V) \mid P|_U \in \mathcal{D}_X(U) \text{ para todo } U \in \mathrm{Loc}(V)\}.$$

Llamamos a F la *filtración por grados* del haz $\mathcal{D}_X$.

Observaciones 4.7. —

1. Por definición tenemos que $F_0\mathcal{D}_X = \mathcal{O}_X$.
2. Dado que $\partial^\alpha\partial^\beta = \partial^{\alpha+\beta}$, tenemos la igualdad

$$(F_n\mathcal{D}_X)(F_m\mathcal{D}_X) = F_{n+m}\mathcal{D}_X.$$

La siguiente descripción de F nos proporciona una descripción similar a la de las álgebras de operadores diferenciales presentadas en la introducción.

Proposición 4.8. *Para cada $n \ge 0$, y cada abierto $U \subseteq X$, tenemos que*

$$F_n\mathcal{D}_X(U) = \{P \in \mathcal{E}nd_{k_U}(\mathcal{O}_U) \mid [P_V, f] \in F_{n-1}\mathcal{D}_X(V) \text{ para todo } f \in \mathcal{O}_X(V) \text{ y todo } V \subseteq U\},$$

provisto que $F_{-1}\mathcal{D}_X = 0$.

Demostración. Dado que los abiertos que conforman $\mathrm{Loc}(X)$ forman un recubrimiento abierto de X y todo haz está determinado por sus restricciones a los abiertos de un recubrimiento, basta probar el resultado para un abierto afín $U \subseteq X$ con un sistema de coordenadas $\{x_1, \dots, x_n, \partial_1, \dots, \partial_n\}$.

Supongamos entonces que $P \in F_n\mathcal{D}_X(U)$, entonces podemos escribir

$$P = \sum_{|\alpha| \le n} g_\alpha \partial^\alpha, \quad \text{para ciertas } g_\alpha \in \mathcal{O}_X(U).$$

Sean $f, h \in \mathcal{O}_X(U)$, entonces tenemos que

$$\begin{aligned}
[P, f]h &= \sum_{|\alpha| \le n} (g_\alpha \partial^\alpha(fh) - f g_\alpha \partial^\alpha(h)) \\
&= \sum_{|\alpha| \le n} \left(g_\alpha \sum_{\beta \le \alpha} (\partial^{\alpha-\beta} f)(\partial^\beta h) - f g_\alpha \partial^\alpha(h) \right),
\end{aligned}$$

donde $\beta \le \alpha$ significa que $\beta_i \le \alpha_i$ para todo i y la diferencia $\alpha - \beta$ se realiza componente a componente. Escribiremos $\beta < \alpha$ si $\beta \le \alpha$ y $\beta \ne \alpha$. Nótese que si $\beta \ne \alpha$ entonces $|\beta| < |\alpha|$. Con esto,

$$[P, f]h = \sum_{|\alpha| \le n} g_\alpha \sum_{\beta < \alpha} (\partial^{\alpha-\beta} f)(\partial^\beta h) = Qh$$

donde

$$Q = \sum_{|\alpha| \le n} g_\alpha \sum_{\beta < \alpha} (\partial^{\alpha-\beta} f)\partial^\beta \in F_{n-1}\mathcal{D}_X(U).$$

Como h es arbitrario, se sigue que $[P, f] \in F_{n-1}\mathcal{D}_X(U)$ para todo $f \in \mathcal{O}_X(U)$.

Refíprocamente, supongamos que P es un endomorfismo k_U-lineal de $\mathcal{O}_U$ que verifica que $[P, f] \in F_{n-1}\mathcal{D}_X(U)$ para todo $f \in \mathcal{O}_X(U)$.

En particular $[P, x_i] \in F_{n-1}\mathcal{D}_X(U)$, y de manera análoga al Paso 2 de la demostración del Teorema 1.1 existe un operador diferencial Q que verifica $[Q, x_i] = [P, x_i]$ para todo $1 \le i \le n$, y por ende $[P - Q, x_i] = 0$ para todo $1 \le i \le 0$. El resto de la demostración es análoga a la demostración del Teorema 1.1. □

Corolario 4.9. *Para cada abierto $U \subseteq X$ tenemos que*

$$[F_m\mathcal{D}_X(U), F_n\mathcal{D}_X(U)] \subseteq F_{m+n-1}\mathcal{D}_X(U), \quad \text{para todo } m, n \ge 0.$$

Corolario 4.10. *El haz* $\mathrm{gr}^F\mathcal{D}_X$ *es un haz de anillos conmutativos finitamente generados sobre* $\mathcal{O}_X$.

Demostración. No es difícil probar que en este caso los sumandos directos $(F_n\mathcal{D}_X/F_{n-1}\mathcal{D}_X)_{\mathrm{pre}}$ son de hecho haces y por ende $(\mathrm{gr}^F\mathcal{D}_X)_{\mathrm{pre}} = \mathrm{gr}^F\mathcal{D}_X$. Como $\mathcal{O}_X$-módulo, cada sumando directo es localmente finitamente generado por los operadores diferenciales ∂^α con $|\alpha| = n$. De este modo el haz graduado $\mathrm{gr}^F\mathcal{D}_X$ es finitamente generado como $\mathcal{O}_X$-álgebra por los operadores diferenciales de orden 1. Por el Corolario anterior, cada $\mathrm{gr}^F\mathcal{D}_X(U)$ es un anillo conmutativo. Esto completa la demostración. □

4.7. Símbolos principales. Dado un sistema de coordenadas $(x_1,\dots,x_n,\partial_1,\dots,\partial_n)$ sobre un abierto afín $U \subseteq X$, denotamos por ξ_i a la imagen de $\partial_i \in \mathrm{gr}^F\mathcal{D}_X(U)$, es decir,

$$\xi_i = \partial_i + F_0\mathcal{D}_X(U), \quad 1 \le i \le n.$$

Entonces tenemos que

$$\mathrm{gr}_r\mathcal{D}_X(U) = \bigoplus_{|\alpha|\le r} \mathcal{O}_X(U)\xi^\alpha, \quad \xi^\alpha = \xi_1^{\alpha_1}\cdots\xi_n^{\alpha_n},$$

y en consecuencia

$$\mathrm{gr}^F\mathcal{D}_X(U) = \mathcal{O}_X(U)[\xi_1,\dots,\xi_n].$$

Para cada $r \ge 0$, definimos un morfismo

$$\sigma_r|_U : F_r\mathcal{D}_X(U) \longrightarrow \mathrm{gr}_r\mathcal{D}_X(U), \quad P \longmapsto \sigma_r(P) = P + F_{r-1}\mathcal{D}_X(U).$$

Si $P \in F_r\mathcal{D}_X(U) \setminus F_{r-1}\mathcal{D}_X(U)$, llamamos a $\sigma_r(P)$ el *símbolo principal* de P. De este modo, ξ_i es el símbolo principal de ∂_i.

Sea $\pi : T^*X \to X$ el fibrado cotangente de X. Para cada punto p, podemos usar $\xi_1(p),\dots,\xi_n(p)$ como coordenadas del espacio cotangente T_p^*X con respecto a la base $dx_1,\dots,dx_n$. Esto establece (asumiendo que U es suficientemente pequeño para estar contenido en una carta trivial) un morfismo biyectivo entre $\mathrm{gr}^F(U) = \mathcal{O}_X(U)[\xi_1,\dots,\xi_n]$ y el álgebra de secciones $\pi_*\mathcal{O}_{T^*X}(U)$, por lo que obtenemos

Teorema 4.11. *Sea* $\pi : T^*X \to X$ *el fibrado cotangente de* X. *Entonces existe un isomorfismo canónico*

$$\mathrm{gr}^F\mathcal{D}_X \cong \pi_*\mathcal{O}_{T^*X}.$$

5. D-módulos algebraicos y conexiones planas

5.1. D-módulos algebraicos y el funtor de localización. Sea $(X,\mathcal{O}_X)$ una variedad algebraica suave y sea $\mathcal{D}_X$ su haz de operadores diferenciales. Un *D-módulo algebraico izquierdo sobre* X es un haz $\mathcal{M}$ de grupos abelianos tal que para cada abierto $U \subseteq X$ el está equipado con la estructura de un $\mathcal{D}_X(U)$-módulo izquierdo y esta estructura es compatible con los morfismos de restricción, en el sentido de que el diagrama

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{D}_X(U) \times \mathcal{M}(U) & \longrightarrow & \mathcal{M}(U) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{D}_X(V) \times \mathcal{M}(V) & \longrightarrow & \mathcal{M}(V) \end{array}$$

conmuta para cada inclusión de abietos $V \subseteq U$. De manera análoga se define un *D-módulo algebraico derecho sobre* X. Usualmente omitiremos el término "algebraico" y nos referiremos únicamente a D-módulos. Más aún, cuando no especifiquemos si el módulo es izquierdo o derecho, siempre asumiremos que es izquierdo.

Nótese que en particular un D-módulo (izquierdo o derecho) sobre X tiene la estructura de un $\mathcal{O}_X$-módulo. Un D-módulo se dice *coherente* (resp. *quasicoherente*) si es un $\mathcal{O}_X$-módulo coherente (resp. quasicoherente). Entonces definimos las siguientes categorías:

- $\mathbf{Mod}(\mathcal{D}_X)$ es la categoría de D-módulos izquierdos sobre X.
- $\mathbf{Mod}_{\mathrm{coh}}(\mathcal{D}_X)$ es la subcategoría plena de $\mathbf{Mod}(\mathcal{D}_X)$ de D-módulos coherentes.
- $\mathbf{Mod}_{\mathrm{qcoh}}(\mathcal{D}_X)$ es la subcategoría plena de $\mathbf{Mod}(\mathcal{D}_X)$ de D-módulos quasicoherentes.

Escribamos $D_X = \Gamma(X,\mathcal{D}_X)$ y $A = \Gamma(X,\mathcal{O}_X)$. Dado un D_X-módulo M (o lo que es lo mismo, un D-módulo, en el sentido dado en la introducción, sobre D_X), para cada abierto afín $U \subseteq X$, tenemos que $\mathcal{D}_X(U)$ tiene una estructura de D_X-módulo y por ende de A-módulo dada por el morfismo de restricción $D_X \to \mathcal{D}_X(U)$ del haz $\mathcal{D}_X$, y podemos definir el prehaz $U \mapsto \mathcal{D}_X(U) \otimes_A M$. Denotamos al haz asociado a este prehaz por $\mathcal{D}_X \otimes_A M$.

Definimos el *funtor de localización* como

$$\Delta : D_X\text{-Mod} \longrightarrow \mathbf{Mod}(\mathcal{D}_X), \quad M \mapsto \mathcal{D}_X \otimes_A M.$$

Si X es una variedad algebraica afín, sabemos que el funtor de secciones globales $\Gamma(X,\cdot):\mathbf{Qcoh}(X)\to A\text{-Mod}$ es una equivalencia de categorías cuya inversa es el funtor $M\mapsto\tilde{M}$. Más aún, en este caso tenemos que

$$\Delta(M)=\mathcal{D}_X\otimes_{\mathcal{O}_X}\tilde{M},$$

lo que implica que $\Delta(M)$ es quasicoherente. Para una variedad algebraica general X, aplicando lo anterior a cada uno de los abiertos de un recubrimiento afín de X, obtenemos que $\Delta(M)$ es un haz quasicoherente y por ende

$$\Delta: D_X\text{-Mod}\longrightarrow\mathbf{Mod}_{\mathrm{qcoh}}(\mathcal{D}_X),$$

es decir, el funtor de localización toma valores en la categoría de D-módulos algebraicos quasicoherentes.

Teorema 5.1 (Serre)**.** *Sea X una variedad algebraica afín. El funtor de secciones globales $\Gamma(X,\cdot):D_X\text{-Mod}\to\mathbf{Mod}_{\mathrm{qcoh}}(\mathcal{D}_X)$ es una equivalencia de categorías con inversa Δ.*

Estos funtores definen además una equivalencia entre las categorías de módulos finitamente generados y módulos coherentes.

Demostración. Los funtores $\Gamma=\Gamma(X,\cdot)$ y Δ son exactos por la discusión precedente. Sea M un D_X-módulo, entonces existe una sucesión exacta

$$D_X^{\oplus I}\longrightarrow D_X^{\oplus J}\longrightarrow M\longrightarrow 0,$$

y al aplicar el funtor Δ obtenemos una sucesión exacta

$$\mathcal{D}_X^{\oplus I}\longrightarrow\mathcal{D}_X^{\oplus J}\longrightarrow\Delta(M)\longrightarrow 0.$$

Aplicamos el funtor de secciones globales y obtenemos el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
D_X^{\oplus I} \arrow[r] \arrow[d] & D_X^{\oplus J} \arrow[r] \arrow[d] & M \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
D_X^{\oplus I} \arrow[r] & D_X^{\oplus J} \arrow[r] & \Gamma(X,\Delta(M)) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

donde los morfismos verticales son los morfismos de adjunción. Dado que los objetos en las dos primeras columnas son libres, los morfimos en dichas columnas son isomorfismos. Por ende, el Lema de 5 implica que el morfismo de la tercera columna es un isomorfismo. Esto prueba que el funtor $\Gamma\circ\Delta$ es naturalmente isomorfo a la identidad.

Ahora, dado un D-módulo algebraico $\mathcal{M}$ sobre X, consideramos el morfismo de adjunción

$$\varphi_{\mathcal{M}}:\Delta(\Gamma(X,\mathcal{M}))\longrightarrow\mathcal{M}.$$

Denotamos por $\mathcal{K}$ su núcleo y por $\mathcal{C}$ su conúcleo, entonces tenemos la sucesión exacta

$$0\longrightarrow\mathcal{K}\longrightarrow\Delta(\Gamma(X,\mathcal{M}))\xrightarrow{\varphi_{\mathcal{M}}}\mathcal{M}\longrightarrow\mathcal{C}\longrightarrow 0.$$

Aplicando el funtor de secciones globales, obtenemos la sucesión exacta

$$0\longrightarrow\Gamma(X,\mathcal{K})\longrightarrow\Gamma(X,\Delta(\Gamma(X,\mathcal{M})))\longrightarrow\Gamma(X,\mathcal{M})\longrightarrow\Gamma(X,\mathcal{C})\longrightarrow 0,$$

y por la parte anterior de la demostración, la flecha central es un isomorfismo, de modo que $\Gamma(X,\mathcal{K})=\Gamma(X,\mathcal{C})=0$ y dado que Γ es una equivalencia a nivel de $\mathcal{O}_X$-módulos, esto implica que $\mathcal{K}=\mathcal{C}=0$, por lo que $\varphi_{\mathcal{M}}$ es un isomorfismo. De este modo obtenemos un isomorfismo entre el funtor $\Delta\circ\Gamma$ y el funtor identidad. Esto completa la demostración. □

5.2. Conexiones planas. Sea $\mathcal{M}$ un $\mathcal{O}_X$-módulo quasicoherente. Una *conexión* sobre $\mathcal{M}$ es un morfismo de $\mathbb{C}_X$-módulos

$$\nabla:\Theta_X\longrightarrow\mathcal{E}nd_{\mathbb{C}_X}(\mathcal{M}),\quad \theta\longmapsto\nabla_\theta$$

que verifica, para todo $f\in\mathcal{O}_X$, $\theta\in\Theta_X$ y $s\in\mathcal{M}$,

(C1) $\nabla_{f\theta}(s)=f\nabla_\theta(s)$; y
(C2) $\nabla_\theta(fs)=\theta(f)s+f\nabla_\theta(s)$.

Para cada $\theta\in\Theta_X$, el endomorfismo $\nabla_\theta:\mathcal{M}\to\mathcal{M}$ se llama la *derivada covariante* con respecto a θ.

Si además ∇ verifica, para todo $\theta_1,\theta_2\in\Theta_X$ y $s\in\mathcal{M}$, la condición

(CI) $\nabla_{[\theta_1,\theta_2]}(s)=[\nabla_{\theta_1},\nabla_{\theta_2}](s)$,

decimos que ∇ es una *conexión integrable* o *conexión plana*.

Observaciones 5.2. —

1. Notemos que la condición (C1) en la definición anterior significa que ∇ es de hecho un morfismo de $\mathcal{O}_X$-módulos. Por ende, podemos decir que una conexión sobre $\mathcal{M}$ es un morfismo de $\mathcal{O}_X$-módulos
$$\nabla : \Theta_X \longrightarrow \mathcal{E}nd_{\mathbb{C}_X}(\mathcal{M}), \quad \theta \longmapsto \nabla_\theta$$
que verifica la condición (C2).
2. Existe un isomorfismo natural de $\mathbb{C}$-espacios vectoriales
$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\Theta_X, \mathcal{E}nd_{\mathbb{C}_X}(\mathcal{M})) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}_X} \Omega^1_X)$$
que a cada $\varphi : \Theta_X \to \mathcal{E}nd_{\mathbb{C}_X}(\mathcal{M})$, $\theta \mapsto \varphi_\theta$ le asigna el morfismo de $\mathbb{C}_X$-módulos $\mathcal{M} \to \mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}_X} \Omega^1_X$ definido sobre una vecindad afín U con un sistema de coordenadas $\{x_1, \ldots, x_n, \partial_1, \ldots, \partial_n\}$ por
$$s \longmapsto \sum_{i=1}^n \varphi_{\partial_i}(s) \otimes dx_i$$
Con esto en mente, podemos definir una conexión sobre $\mathcal{M}$ de manera similar como un morfismo de $\mathbb{C}_X$-módulos
$$\nabla : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}_X} \Omega^1_X$$
que verifica la condición
$$\nabla(fs) = f\nabla(s) + s \otimes df.$$
Esta definición aparece frecuentemente en la literatura.
3. Dada una conexión ∇ sobre $\mathcal{M}$, definimos el operador $\nabla^2 : \bigwedge^2 \Theta_X \to \mathcal{E}nd_{\mathbb{C}_X}(\mathcal{M})$ como
$$\nabla^2(\theta_1, \theta_2) = [\nabla_{\theta_1}, \nabla_{\theta_2}] - \nabla_{[\theta_1, \theta_2]}.$$
Entonces ∇^2 se llama la *curvatura* de ∇. Por ende una conexión plana es una conexión tal que su curvatura es cero (de ahí el nombre de conexión plana).

Dado un $\mathcal{O}_X$-módulo quasicoherente $\mathcal{M}$ equipado con una conexión plana ∇, podemos definir sobre este la estructura de $\mathcal{D}_X$-módulo izquierdo definiendo

$$\theta \cdot s = \nabla_\theta(s), \quad \theta \in \Theta_X, s \in \mathcal{M}. \tag{5.1}$$

Para probar esto, consideremos un abierto afín $U \subseteq X$ sobre el cual está definido un sistema de coordenadas locales $\{x_1, \ldots, x_n, \partial_1, \ldots, \partial_n\}$ y la $\mathbb{C}$-álgebra Y generada por los símbolos formales y_f, y_θ, con $f \in \mathcal{O}_X(U)$ y $\theta \in \Theta_X(U)$ sujetos a las relaciones

$$\begin{aligned} y_{fg} &= y_f y_g, & y_{f+g} &= y_f + y_g, & f, g &\in \mathcal{O}_X(U) \\ y_{\theta_1+\theta_2} &= y_{\theta_1} + y_{\theta_2}, & y_{[\theta_1,\theta_2]} &= [y_{\theta_1}, y_{\theta_2}] & \theta_1, \theta_2 &\in \Theta_X(U) \\ y_{f\theta} &= y_f y_\theta, & y_{[\theta,f]} &= y_{\theta(f)} & f \in \mathcal{O}_X(U), \theta &\in \Theta_X(U) \end{aligned}$$

Existe claramente un epimorfismo de $\mathbb{C}$-álgebras $Y \to \mathcal{D}_X(U)$. Las relaciones equipan a Y con una estructura de $\mathcal{O}_X(U)$-álgebra mediante $fy_g = y_{fg} = y_f y_g$ y $fy_\theta = y_{f\theta} = y_f y_\theta$. Es claro entonces que tenemos una descomposición

$$Y = \bigoplus_{\alpha \in \mathbb{N}^n} \mathcal{O}_X(U) y_\partial^\alpha, \quad y_\partial^\alpha = y_{\partial_1}^{\alpha_1} \cdots y_{\partial_n}^{\alpha_n},$$

y esta descomposición prueba que el epimorfismo de $\mathbb{C}$-álgebras $Y \to \mathcal{D}_X(U)$ es una biyección, por lo que $\mathcal{D}_X(U)$ es isomorfa a Y. En particular, los elementos ∇_θ verifican las relaciones definidoras de Y, por lo que la fórmula (5.1) equipa a $\mathcal{M}$ con una estructura de $\mathcal{D}_X$-módulo. Recíprocamente, si $\mathcal{M}$ es un $\mathcal{D}_X$-módulo, dicha fórmula equipa a $\mathcal{M}$ con una conexión plana ∇. Entonces hemos demostrado

Teorema 5.3. *Un $\mathcal{D}_X$-módulo quasicoherente es lo mismo que un $\mathcal{O}_X$-módulo quasicoherente equipado con una conexión plana.*

5.3. D-módulos coherentes. Ahora nos enfocaremos en la categoría $\mathbf{Mod}_{\mathrm{coh}}(\mathcal{D}_X)$ de D-módulos algebraicos sobre una variedad algebraica X que son coherentes sobre $\mathcal{O}_X$.

El primer resultado importante es el siguiente:

Teorema 5.4. *Sea $\mathcal{M}$ un $\mathcal{D}_X$-módulo izquierdo. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i) *$\mathcal{M}$ es coherente (como $\mathcal{O}_X$-módulo);*
(ii) *$\mathcal{M}$ es localmente libre de rango finito sobre $\mathcal{O}_X$.*

Demostración. Supongamos que $\mathcal{M}$ es coherente como $\mathcal{O}_X$-módulo. Para probar que $\mathcal{M}$ es libre sobre $\mathcal{O}_X$ basta probar que para cada $x \in X$ se tiene que $\mathcal{M}_x$ es libre sobre $\mathcal{O}_{X,x}$. Sea $\{x_1, \ldots, x_n, \partial_1, \ldots, \partial_n\}$ un sistema de coordenadas alrededor de x, de tal modo que $x_1, \ldots, x_n$ generen a $\mathfrak{m}_x \subseteq \mathcal{O}_{X,x}$, el ideal maximal del anillo local $\mathcal{O}_{X,x}$. La coherencia de $\mathcal{M}$ implica que el $\mathbb{C} \cong \mathcal{O}_{X,x}/\mathfrak{m}_x$-espacio vectorial $\mathcal{M}_x/\sum_{i=1}^n x_i\mathcal{M}_x$ es de dimensión finita. Luego, el lema de Nakayama produce un conjunto $s_1, \ldots, s_m \in \mathcal{M}_x$ tales que $\mathcal{M}_x = \sum_{i=1}^m \mathcal{O}_{X,x}s_i$ tales que sus imágenes $\overline{s_1}, \ldots, \overline{s_m} \in \mathcal{M}_x/\sum_{i=1}^n x_i\mathcal{M}_x$ forman una $\mathbb{C}$ base de este espacio vectorial.

Supongamos que existen $f_i \in \mathcal{O}_{X,x}$ no todos cero tales que

$$\sum_{i=1}^m f_i s_i = 0. \tag{5.2}$$

Definimos $\mathrm{ord}(f_i) = \max\{\ell \mid f_i \in \mathfrak{m}_x^\ell\}$. Notemos que podemos escribir $\partial_j s_i = \sum_{\ell=1}^m a_\ell s_\ell$ para ciertas $a_\ell \in \mathcal{O}_{X,x}$. De este modo, aplicando el operador diferencial ∂_j a esta relación, obtenemos

$$0 = \sum_{i=1}^m (\partial_j(f_i)s_i + f_i\partial_j(s_j)) = \sum_{i=1}^m g_i s_i,$$

para ciertas $g_i \in \mathcal{O}_{X,x}$, y podemos elegir j de modo que

$$\min\{\mathrm{ord}(f_i) \mid 1 \le i \le m\} > \min\{\mathrm{ord}(g_i) \mid 1 \le i \le m\}$$

Repitiendo este argumento obtendremos una expresión de la forma

$$\sum_{i=1}^n h_i s_i = 0, \quad h_i \in \mathcal{O}_{X,x}$$

donde $\mathrm{ord}(h_i) = 0$ para cierto i, y por ende pasando al cociente, obtenemos una expresión de la forma

$$\sum_{i=1}^n \overline{h_i}\overline{s_i} = 0 \quad \text{en } \mathcal{M}_x/\sum_{i=1}^n x_i\mathcal{M}_x,$$

donde $\overline{h_i} \in \mathcal{O}_{X,x}/\mathfrak{m}_x \cong \mathbb{C}$ no son todos nulos. Esto contradice el hecho de que $\overline{s_1}, \ldots, \overline{s_m}$ es una $\mathbb{C}$-base de $\mathcal{M}_x/\sum_{i=1}^n x_i\mathcal{M}_x$. Esto significa que no podemos tener una relación no trivial de la forma (5.2) y por ende el conjunto $\{s_1, \ldots, s_n\}$ es una base de $\mathcal{M}_x$ sobre $\mathcal{O}_{X,x}$, lo que prueba que $\mathcal{M}_x$ es libre para todo $x \in X$ y por ende que $\mathcal{M}$ es localmente libre sobre $\mathcal{O}_X$. Dado que $\mathcal{M}$ es coherente sobre $\mathcal{O}_X$, concluimos que $\mathcal{M}$ es localmente libre de rango finito sobre $\mathcal{O}_X$.

Recíprocamente, supongamos que $\mathcal{M}$ es localmente libre de rango finito sobre X, entonces $\mathcal{M}$ es el haz de secciones de algún fibrado vectorial $\pi : M \to X$ y por ende es un $\mathcal{O}_X$-módulo coherente. $\square$

Usualmente a un $\mathcal{D}_X$-módulo izquierdo que es localmente libre de rango finito (o lo que es lo mismo, que es $\mathcal{O}_X$-coherente) se lo llama una *conexión integrable* (no confundir con el término conexión integrable = conexión plana introducido previamente).

Dado que la categoría de $\mathcal{O}_X$-módulos localmente libres de rango finito sobre la variedad algebraica X es equivalente a la categoría de fibrados vectoriales sobre X, es importante relacionar estos de manera más profunda.

Si $\pi : E \to X$ es un fibrado vectorial, una *conexión* sobre E es una conexión sobre su haz de secciones $\mathcal{E} = \Gamma(\cdot, E)$. El fibrado E se dice *plano* si está equipado con una conexión plana. En particular, todo fibrado vectorial plano es un $\mathcal{D}_X$-módulo.

De este modo, obtenemos una categoría $\mathbf{FlatVec}(X)$ cuyos objetos son fibrados vectoriales planos.

Teorema 5.5. *El funtor*

$$\mathbf{FlatVec}(X) \longrightarrow \mathbf{Mod}_{\mathrm{coh}}(\mathcal{D}_X)$$

que a cada fibrado vectorial $\pi : E \to X$ plano (equipado con una conexión plana ∇) le asigna su haz de secciones $\mathcal{E} = \Gamma(\cdot, E)$, es una equivalencia de categorías.

Demostración. Esto es una consecuencia inmediata de los Teoremas 5.3 y 5.4. □

Sea $\pi : E \to X$ un fibrado vectorial y sea $\mathcal{E}$ el haz de secciones de E. Una *conexión afín* sobre E es una aplicación $\mathcal{O}_X(X)$-lineal

$$\nabla : \Theta_X(X) \to \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(\Gamma(X, E)), \quad \theta \mapsto \nabla_\theta$$

que verifica

$$\nabla_\theta(fs) = \theta(f)s + f\nabla_\theta(s), \quad f \in \mathcal{O}_X(X), s \in \Gamma(X, E), \theta \in \Theta_X(X).$$

Equivalentemente, podemos definir una conexión como una aplicación $\mathbb{C}$-lineal

$$\nabla : \Gamma(X, E) \to \Gamma(X, T^*X \otimes E)$$

que verifica

$$\nabla(fs) = df \otimes s + f\nabla(s), \quad f \in \mathcal{O}_X(X), s \in \Gamma(X, E).$$

Notemos que ∇ es una conexión sobre E, esta claramente induce una conexión afín ∇ (reciclamos el mismo símbolo para ambas conexiones) sobre E.

Observación 5.6. En el caso de variedades suaves, es posible probar que existe una equivalencia entre los conceptos de conexiones afines y conexiones, pero ello requiere de la existencia de particiones C^∞ de la unidad. Desconozco (y no he encontrado literatura al respecto) de si es posible inducir una conexión a un fibrado vectorial a partir de una conexión afín. Mi intuición me dice que no, ya que al parecer no existe una vía canónica para inducir conexiones afines a los abiertos de una variedad algebraica y por ende no se puede "hacificar" canónicamente la noción de conexión. Si el lector conoce alguna referencia al respecto, le agradeceré mucho me la sepa comunicar.

6. El contexto analítico

6.1. El funtor de analitificación. Sea $(X, \mathscr{O}_X)$ una variedad algebraica compleja suave quasiproyectiva. Entonces X puede ser incrustada en un un espacio proyectivo $\mathbb{P}^N$ y este último tiene una estructura natural de variedad analítica compleja. Le heredamos esa estructura al subconjunto X produciéndose una variedad analítica compleja (pues X es suave) a la que denotamos X^{an}. Denotamos por $\mathcal{O}_{X^{\mathrm{an}}}$ al haz de funciones holomorfas sobre X. Si $f : X \to Y$ es un morfismo regular de variedades algebraicas, entonces la misma función es holomorfa, pues toda función que es localmente el cociente de funciones polinomiales es meromorfa, con discontinuidad en los polos, pero al ser f regular, localmente no posee polos y por ende no los posee globalmente, lo que significa que $f : X^{\mathrm{an}} \to Y^{\mathrm{an}}$ es holomorfa. Denotamos por f^{an} a la función f mirada como función entre las topologías analíticas.

La discusión previa nos provee de un funtor

$$(\cdot)^{\mathrm{an}} : \mathbf{Var}_{\mathbb{C}} \longrightarrow \mathbf{Man}_{\mathbb{C}}, \quad X \mapsto X^{\mathrm{an}}$$

entre la categoría de variedades algebraicas complejas y la categoría de variedades analíticas complejas. Este se llama el *funtor de analitificación.*

La función $\iota : X^{\mathrm{an}} \to X$ que como aplicación abstracta es la identidad, es continua entre las topologías analítica y de Zariski (pues todo abierto de Zariski es abierto en la topología analítica). En particular, obtenemos el funtor imagen inversa

$$\iota^{-1} : \mathbf{Sh}(X) \longrightarrow \mathbf{Sh}(X^{\mathrm{an}}), \quad \mathscr{F} \longmapsto \iota^{-1}\mathscr{F}.$$

Luego, el haz $\mathcal{O}_{X^{\mathrm{an}}}$ tiene una estructura natural de $\iota^{-1}\mathcal{O}_X$-módulo: La adjunción entre ι^{-1} y el funtor imagen directa ι_* establece una biyección

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Sh}(X^{\mathrm{an}})}(\iota^{-1}\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_{X^{\mathrm{an}}}) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{Sh}(X)}(\mathcal{O}_X, \iota_*\mathcal{O}_{X^{\mathrm{an}}}),$$

y por ende la morfismo $\mathcal{O}_X \to \iota_0\mathcal{O}_{X^{\mathrm{an}}}$ inducido por ι le corresponde un único morfismo $\iota^{-1}\mathcal{O}_X \to \mathcal{O}_{X^{\mathrm{an}}}$ que equipa a $\mathcal{O}_{X^{\mathrm{an}}}$ con una estructura natural de $\iota^{-1}\mathcal{O}_X$-módulo.

6.2. D-módulos analíticos. .

Sea X una variedad analítica compleja (es decir, X es un espacio de Hausdorff, paracompacto, segundo contable, y cada punto tiene una vecindad homeomorfa a un abierto de $\mathbb{C}^n$, tal que las funciones de transición son holomorfas) y denotemos por $\mathcal{O}_X$ a su haz de funciones holomorfas. Es posible definir el haz de operadores diferenciales $\mathcal{D}_X$ de manera completamente análoga al caso algebraico, y un D-módulo analítico es simplemente un $\mathcal{D}_X$-módulo (ya sea izquierdo o derecho). Mantenemos todas las notaciones del caso algebraico en el caso analítico. En particular tenemos la categoría $\mathbf{Mod}(\mathcal{D}_X)$ (resp. $\mathbf{Mod}_{\mathrm{coh}}(\mathcal{D}_X)$, $\mathbf{Mod}_{\mathrm{qcoh}}(\mathcal{D}_X)$) de D-módulos analíticos izquierdos sobre X (res. D-módulos $\mathcal{O}_X$-coherentes, quasicoherentes).

El teorema 5.5 sigue siendo válido en el contexto analítico con esencialmente la misma demostración.

Lema 6.1. *Sea $(X, \mathcal{O}_X)$ una variedad algebraica compleja. Tenemos que*

$$\mathcal{D}_{X^{\mathrm{an}}} \cong \mathcal{O}_{X^{\mathrm{an}}} \otimes_{\iota^{-1}\mathcal{O}_X} \mathcal{D}_X.$$

Demostración. Existe un morfismo obvio

$$\varphi : \mathcal{O}_{X^{\mathrm{an}}} \otimes_{\iota^{-1}\mathcal{O}_X} \mathcal{D}_X \longrightarrow \mathcal{D}_{X^{\mathrm{an}}}$$

definido sobre cada abierto $U \subseteq X$ mediante

$$\varphi_U(f \otimes P) \mapsto fP.$$

Para probar que φ es un isomorfismo, basta verificarlo a nivel de stalks:

$$\varphi_x : \mathcal{O}_{X^{\mathrm{an}},x} \otimes_{\mathcal{O}_{X,x}} \mathcal{D}_{X,x} \longrightarrow \mathcal{D}_{X^{\mathrm{an}},x}$$

donde hemos usado que $(\iota^{-1}\mathcal{O}_X)_x \cong \mathcal{O}_{X,\iota^{-1}(x)} = \mathcal{O}_{X,x}$. Para esto, consideremos un abierto afín $U \subseteq X$ sobre el cual están definidas coordenadas $\{x_1, \ldots, x_n, \partial_1, \ldots, \partial_n\}$, y de este modo tenemos que φ induce un morfismo

$$\bigoplus_{\alpha \in \mathbb{N}} \mathcal{O}_{X^{\mathrm{an}}}(U) \otimes_{\iota^{-1}\mathcal{O}_X(U)} \mathcal{O}_X(U)\partial^\alpha \longrightarrow \bigoplus_{\alpha \in \mathbb{N}} \mathcal{O}_{X^{\mathrm{an}}}(U) \frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha}$$

donde hemos usado el hecho de que el producto tensorial conmuta con sumas directas en la categoría de módulos y donde denotamos

$$\frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha} = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}}, \quad \alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n.$$

Este morfismo es claramente un isomorfismo y por ende tomando el límite directo sobre los abiertos $V \subseteq U$ que contienen a x, obtenemos que φ_x es un isomorfismo, como se deseaba. □

Con esto, obtenemos un funtor, llamado también *funtor de analitización*

$$(\cdot)^{\mathrm{an}} : \mathbf{Mod}(\mathcal{D}_X) \longrightarrow \mathbf{Mod}(\mathcal{D}_{X^{\mathrm{an}}}), \quad \mathcal{M} \longmapsto \mathcal{O}_{X^{\mathrm{an}}} \otimes_{\iota^{-1}\mathcal{O}_X} \mathcal{M}.$$

6.3. Secciones horizontales. Sea $\mathcal{M}$ un D-módulo analítico coherente sobre una variedad analítica compleja X. Entonces $\mathcal{M}$ es un $\mathcal{O}_X$-módulo equipado con una conexión plana ∇. Dado un abierto $U \subseteq X$, una sección $s \in \mathcal{M}(U)$ se dice una *sección plana* si

$$\nabla_\theta(s) = \theta \cdot s = 0, \quad \text{para todo } \theta \in \Theta_X(U).$$

Denotamos al haz de secciones horizonales por $\mathcal{M}^\nabla$. Es decir, para cada abierto $U \subseteq X$,

$$\mathcal{M}^\nabla(U) = \{s \in \mathcal{M}(U) \mid \nabla_\theta(s) = 0 \text{ para todo } \theta \in \Theta_X(U)\}.$$

Observación 6.2. Dado un D-módulo analítico coherente $\mathcal{M}$ podemos construir el *complejo de de Rham*

$$0 \longrightarrow \Omega_X^0 \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{M} \longrightarrow \Omega_X^1 \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{M} \longrightarrow \cdots \longrightarrow \Omega_X^n \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{M} \longrightarrow 0,$$

donde el diferencial está dado localmente por

$$d^p(\omega \otimes s) = d\omega \otimes s + \sum_{i=1}^n dx_i \wedge \omega \otimes \partial_i s.$$

En particular, si identificamos $\Omega_X^0 \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{M}$ con $\mathcal{M}$, tenemos que $d^0 = \nabla$. De este modo el haz de cohomología en grado cero de este complejo es

$$H^0(\Omega_X^\bullet \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{M}) = \ker(\nabla) = \mathcal{M}^\nabla$$

Un cálculo directo muestra que

$$H^0(\Omega_X^\bullet \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{M}) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{O}_X, \mathcal{M}),$$

de modo que obtenemos un isomorfismo

$$\mathcal{M}^{\nabla} \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{O}_X, \mathcal{M}).$$

Lema 6.3. *El haz $\mathcal{M}^{\nabla}$ es un $\mathbb{C}_X$-módulo localmente libre de rango finito, es decir, es un sistema local complejo.*

Demostración. Sea $x \in X$ y sea $U \subseteq X$ un abierto simplemente conexo (existe pues toda variedad analítica es localmente contractible) con un sistema de coordenadas $\{x_1, \ldots, x_n\}$, entonces si $s \in \mathcal{M}^{\nabla}(U)$, tenemos que

$$\frac{\partial}{\partial x_i} s = 0, \quad 1 \leq i \leq n,$$

lo que significa que s es constante en U. Esto prueba que el haz $\mathcal{M}^{\nabla}$ es localmente constante. Dado que $\mathcal{M}$ es coherente, entonces es localmente libre de rango finito y por ende $\mathcal{M}^{\nabla}$ es localmente libre de rango finito. $\square$

Con esto obtenemos un funtor

$$(\cdot)^{\nabla} : \mathbf{Mod}_{\mathrm{coh}}(\mathcal{D}_X) \longmapsto \mathbf{LocSys}_{\mathbb{C}}(X). \tag{6.1}$$

Teorema 6.4. *El funtor (6.1) es una equivalencia de categorías.*

Demostración. Basta definir una inversa para $(\cdot)^{\nabla}$. Para ello, dado un sistema local $\mathcal{L}$, consideramos el $\mathcal{O}_X$-módulo

$$\Delta(\mathcal{L}) := \mathcal{O}_X \otimes_{\mathbb{C}_X} \mathcal{L}$$

y lo equipamos con la conexión

$$d \otimes \mathrm{id}_{\mathcal{L}} : \mathcal{O}_X \otimes_{\mathbb{C}_X} \mathcal{L} \cong \Omega^0_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \Delta(\mathcal{L}) \longrightarrow \Omega^1_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \Delta(\mathcal{L}) \cong \Omega^1_X \otimes_{\mathbb{C}_X} \mathcal{L}.$$

Notemos que

$$(d \otimes \mathrm{id}_{\mathcal{L}})(f(g \otimes s)) = (d \otimes \mathrm{id}_{\mathcal{L}})(fg \otimes s) = d(fg) \otimes s = f(dg \otimes s) + df(g \otimes s).$$

De este modo tenemos que

$$d \otimes \mathrm{id}_{\mathcal{L}} : \Delta(\mathcal{L}) \longrightarrow \Omega^1_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \Delta(\mathcal{L}),$$

y por la Observación 5.2(2) esto equivale a definir una conexión

$$\nabla : \Theta_X \longrightarrow \mathcal{E}nd_{\mathbb{C}_X}(\Delta(\mathcal{L})),$$

dada por

$$\nabla_\theta(f \otimes s) = \theta(f) \otimes s.$$

Es claro entonces que esta conexión es plana, de modo que $\Delta(\mathcal{L})$ es un D-módulo analítico sobre X. Este es coherente pues $\mathcal{O}_X$ es libre de rango uno sobre $\mathcal{O}_X$ y $\mathcal{L}$ es localmente libre de rango finito sobre $\mathbb{C}_X$.

Sea $\mathcal{M}$ un $\mathcal{D}_X$-módulo $\mathcal{O}_X$-coherente. Entonces

$$\mathcal{O}_X \otimes_{\mathbb{C}_X} \mathcal{M}^{\nabla} \cong \mathcal{O}_X \otimes_{\mathbb{C}_X} \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{O}_X, \mathcal{M}) \cong \mathcal{O}_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{M} \cong \mathcal{M},$$

es decir,

$$\Delta(\mathcal{M}^{\nabla}) \cong \mathcal{M}.$$

Por otro lado, dado un sistema local $\mathcal{L}$, tenemos

$$\Delta(\mathcal{L})^{\nabla} = \{f \otimes s \,|\, \theta(f) \otimes s = 0 \text{ para todo } \theta \in \Theta_X\} = \mathbb{C}_X \otimes_{\mathbb{C}_X} \mathcal{L} \cong \mathcal{L}.$$

Esto prueba que Δ es una inversa para $(\cdot)^{\nabla}$, completando la demostración. $\square$

Sabemos que toda variedad analítica compleja es localmente conexa por caminos y semilocalmente 1-conexa. Entonces, si X es conexa, el Teorema 3.7 nos dice que existe una equivalencia de categorías

$$\mathrm{Stalk}_x : \mathbf{LocSys}_{\mathbb{C}}(X) \longrightarrow \mathbf{Rep}_{\mathbb{C}}(\pi_1(X, x)), \quad \mathcal{L} \longmapsto \mathcal{L}_x.$$

para cada punto $x \in X$. Compuesto con la equivalencia $(\cdot)^{\nabla}$ obtenemos un funtor, al que llamamos el *funtor de fibras*

$$\mathrm{Fib}_x : \mathbf{Mod}_{\mathrm{coh}}(\mathcal{D}_X) \longrightarrow \mathbf{Rep}_{\mathbb{C}}(\pi_1(X, x)), \quad \mathcal{M} \longmapsto (\mathcal{M}^{\nabla})_x, \tag{6.2}$$

y hemos demostrado el siguiente resultado fundamental.

Teorema 6.5. *Sea X una variedad analítica compleja conexa. El funtor de fibras (6.2) define una equivalencia de categorías.*

7. El funtor de Knizhnik-Zamolodchikov

Durante toda esta sección $\mathfrak{h}$ denota un $\mathbb{C}$-espacio vectorial de dimensión finita y $\mathfrak{h}^* = \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{h}, \mathbb{C})$ su dual algebraico (no usamos la notación $\mathfrak{h}^\vee$ como hacíamos usualmente por tradición).

7.1. Grupos de reflexiones complejas. Sea $W \subseteq \mathrm{GL}(\mathfrak{h})$ un subgrupo finito. Un elemento $r \in W$ se dice una *pseudo-reflexión* o simplemente una *reflexión* si el subespacio vectorial

$$\mathrm{fix}(r) = \ker(r - \mathrm{id}_{\mathfrak{h}}) = \{y \in \mathfrak{h} \mid r(y) = y\}$$

es de codimensión 1 en $\mathfrak{h}$. El hiperplano

$$H = \mathrm{fix}(r)$$

se llama el *hiperplano de reflexión* asociado a r. Denotamos por R al conjunto de todas las reflexiones en W y por $\mathcal{A}$ al conjunto de todos los hiperplanos de reflexión asociados a elementos de R. Decimos que W es un *grupo de reflexiones complejas* o simplemente un *grupo de reflexiones* (cuando no hay confusión con el caso real) si W está generado como grupo por R.

Cuidado 7.1. *De ahora en adelante asumiremos que W es un grupo de reflexiones complejas, que R es su conjunto de reflexiones y que $\mathcal{A}$ es su conjunto de hiperplanos de reflexión.*

El grupo W se dice *irreducible* si $\mathfrak{h}$ es una representación irreducible de W con la acción natural de W sobre $\mathfrak{h}$.

Ejemplo 7.2. Sean r, n enteros positivos. Denotamos por $G(r, 1, n)$ al conjunto de todas las matrices cuadradas $n \times n$ tales que en cada fila y en cada columna poseen una sola entrada no nula, y dicha entrada es una raíz r-ésima de la unidad. Es fácil probar que $G(r, 1, n)$ es un subgrupo finito de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) = \mathrm{GL}(\mathbb{C}^n)$. Para cada $1 \leq i \neq j \leq n$, denotamos por s_{ij} a la matriz de permutación que intercambia las componentes i y j de un vector y denotamos por ζ_i a la matriz diagonal cuyas entradas diagonales son todas 1, excepto por una de ellas que es $\zeta = e^{2\pi\sqrt{-1}/r}$. Entonces las reflexiones en $G(r, 1, n)$ son

$$\zeta_i^\ell s_{ij} \zeta_i^{-\ell}, \quad 1 \leq i < j \leq n, 0 \leq \ell \leq r - 1$$

y

$$\zeta_i^\ell, \quad 1 \leq i \leq n 0 \leq \ell \leq r - 1.$$

Es fácil probar que $G(r, 1, n)$ es un grupo de reflexiones. Este grupo es isomorfo, como grupo abstracto, al producto corona

$$G(r, 1, n) \cong (\mathbb{Z}/r) \wr S_n,$$

donde $\mathbb{Z}/r$ es el grupo cíclico de orden r y S_n es el grupo simétrico de permutaciones de n elementos.

Ejemplo 7.3. Sean r, n enteros positivos y m un divisor de r. El subconjunto $G(r, m, n) \subseteq G(r, 1.n)$ cuyos elementos son las matrices tales que el producto de sus entradas no nulas es una raíz r/m-ésima de la unidad es también un grupo de reflexiones complejas.

Los grupos de reflexiones irreducibles están completamente clasificados:

Teorema 7.4 (Shephard-Todd)**.** *Todo grupo de reflexiones complejas irreducible es isomorfo a uno de los grupos $G(r, m, n)$ o a algún grupo de una lista de 34 grupos llamados* grupos excepcionales.

Para un enunciado más preciso de este teorema y su demostración se sugiere mirar [LT09], Capítulo 8. No usaremos la clasificación explícita en este trabajo, salvo para realizar ciertos comentarios.

En un mundo perfecto, un teorema sobre grupos de reflexiones complejas debería tener una demostración uniforme, sin embargo, muchos de los teoremas más profundos que involucran grupos de reflexiones complejas han sido demostrado caso por caso. Esto implica que muchos de los teoremas fundamentales en esta área hayan sido demostrados en varios papers y por distintos matemáticos, a lo largo de grandes esfuerzos mancomunados.

Para cada hiperplano de reflexión $H \in \mathcal{A}$, fijamos una forma lineal $\alpha_H \in \mathfrak{h}^*$ tal que $\ker(\alpha_H) = H$. Denotamos por W_H el estabilizador puntual de H, es decir,

$$W_H = \{w \in W \mid w(y) = y \text{ para todo } y \in H\}.$$

Sea $v_H \in \mathfrak{h}$ un vector no nulo tal que $\mathbb{C}v_H$ es W-invariante y $\mathfrak{h} = H \oplus \mathbb{C}v_H$ (esto siempre es posible pues toda representación compleja de dimensión finita es semisimple). Tenemos entonces que W_H actúa fielmente sobre $\mathbb{C}v_H$: Si w es tal que $w(v_H) = v_H$, entonces $w = 1$ pues al fijar a H, fija todo $\mathfrak{h}$. Además, claramente el grupo W_H es abeliano, por lo que debe ser cíclico. Definimos $n_H = |W_H|$. Por definición, $W_H \setminus \{1\} \subseteq R$.

Para cada $r \in W_H \setminus \{1\}$ escribimos $\alpha_r = \alpha_H$. Entonces existe un único vector $\alpha_r^\vee \in \mathfrak{h}$ tal que

$$r(x) = x - \langle x, \alpha_r^\vee \rangle \alpha_r, \text{para todo } x \in \mathfrak{h}^*$$

donde $r(x)$ denota la acción de r sobre x vía la representación dual de W en $\mathfrak{h}^*$, la misma que está dada por

$$\langle w(x), y \rangle = \langle x, w^{-1}(y) \rangle, \quad x \in \mathfrak{h}^*, y \in \mathfrak{h}, w \in W.$$

Notamos que el valor $\langle x, \alpha_r^\vee \rangle \langle \alpha_r, y \rangle$ depende únicamente de x y de y, y no de la elección de α_r y $\alpha_r^\vee$.

El grupo W actúa naturalmente sobre el conjunto R por conjugación: si $r \in R$ y $w \in W$, entonces $wrw^{-1} \in R$. Consecuentemente, W actúa por conjuación sobre $\mathcal{A}$: Si $H \in \mathcal{A}$, entonces $H = \text{fix}(r)$ para cierto $r \in R$, entonces $w \cdot H = \text{fix}(wrw^{-1})$. Nótese que

$$y \in w \cdot H \iff wrw^{-1}(y) = y \iff r(w^{-1}(y)) = w^{-1}(y) \iff w^{-1}(y) \in H \iff y \in w(H).$$

De este modo $w \cdot H = w(H)$.

7.2. El álgebra $D(\mathfrak{h}^\circ) \rtimes W$. Definimos

$$\mathfrak{h}^\circ = \mathfrak{h} \setminus \bigcup_{H \in \mathcal{A}} H.$$

Esta es una subvariedad algebraica abierta de la variedad algebraica afín $\mathfrak{h}$. También es una variedad analítica compleja. En ambos casos su dimensión es $\dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{h}$. En lo que sigue de esta subsección, consideraremos a ambas como variedades algebraicas. Denotamos por

$$\mathbb{C}[\mathfrak{h}] = \Gamma(\mathfrak{h}, \mathcal{O}_{\mathfrak{h}}) \quad \text{y} \quad \mathbb{C}[\mathfrak{h}^\circ] = \Gamma(\mathfrak{h}^\circ, \mathcal{O}_{\mathfrak{h}^\circ})$$

a los anillos de funciones regulares globales sobre $\mathfrak{h}$ y $\mathfrak{h}^\circ$. En particular $\mathbb{C}[\mathfrak{h}]$ es un anillo de polinomios en $\dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{h}$. Si definimos

$$\delta = \prod_{H \in \mathcal{A}} \alpha_H,$$

tenemos claramente que

$$\mathbb{C}[\mathfrak{h}^\circ] = \mathbb{C}[\mathfrak{h}][\delta^{-1}].$$

Sea $\mathcal{D}_{\mathfrak{h}^\circ}$ el haz de operadores diferenciales sobre $\mathfrak{h}^\circ$ y definamos

$$D(\mathfrak{h}^\circ) = \Gamma(\mathfrak{h}^\circ, \mathcal{D}_{\mathfrak{h}^\circ}),$$

entonces $D(\mathfrak{h}^\circ)$ es el anillo de operadores diferenciales sobre $\mathbb{C}[\mathfrak{h}^\circ]$. Notemos que la acción de W sobre $\mathfrak{h}$ se restringe a una acción de W sobre $\mathfrak{h}^\circ$, la misma que se extiende naturalmente a una acción de W sobre $\mathbb{C}[\mathfrak{h}^\circ]$ y por ende a una acción de W sobre el álgebra $D(\mathfrak{h}^\circ)$, Más aún, W actúa sobre esta álgebra por automorfismos de $\mathbb{C}$-álgebras. Esto nos permite considerar el álgebra $D(\mathfrak{h}^\circ) \rtimes W$ que como conjunto está definida por $D(\mathfrak{h}^\circ) \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}W$ (siendo $\mathbb{C}W$ el álgebra de grupo) y donde la multiplicación está definida sobre tensores simples por

$$(P_1 \otimes w_1)(P_2 \otimes w_2) = P_1 w_1(P_2) \otimes w_1 w_2.$$

Usualmente omitiremos el símbolo de tensor $\otimes$ y escribiremos los elementos solo como concatenación. Entonces $Pw = P \otimes w$ y $wP = w(P)w$.

Es claro que la aplicación lineal natural

$$\mathbb{C}[\mathfrak{h}^\circ] \rtimes W \longrightarrow \text{End}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}[\mathfrak{h}^\circ])$$

es inyectiva, y obtenemos

Lema 7.5. *La representación natural de $\mathbb{C}[\mathfrak{h}^\circ] \rtimes W$ sobre $\mathbb{C}[\mathfrak{h}^\circ]$ es fiel.*

Dado que el anillo de operadores diferenciales $D(\mathfrak{h}^\circ)$ tiene una filtración natural F dada por el grado, esta filtración induce una filtración sobre $D(\mathfrak{h}^\circ) \rtimes W$ mediante

$$F_r(D(\mathfrak{h}^\circ) \rtimes W) = (F_r D(\mathfrak{h}^\circ)) \otimes W,$$

a la que llamaremos la *filtración por grados* de $D(\mathfrak{h}^\circ) \rtimes W$. Denotamos por $\overline{P}$ a la imagen de $P \in F_r(D(\mathfrak{h}^\circ) \rtimes W)$ en $\text{gr}^F(D(\mathfrak{h}^\circ) \rtimes W)$.

7.3. Operadores de Dunkl. Notemos que W actúa trivialmente sobre $\mathbb{C}$ vía $w(a) = a$ para todo $w \in W$ y $a \in \mathbb{C}$. Sea entonces $c : R \to \mathbb{C}$, $r \mapsto c_r$ una función W-equivariante, es decir, tal que $c_{wrw^{-1}} = c_r$ para todo $w \in W$ y $r \in R$.

Para cada $y \in \mathfrak{h}$ definimos un operador diferencial "deformado" $D_y \in D(\mathfrak{h}^\circ) \rtimes W$ mediante la fórmula

$$D_y = \partial_y - \sum_{r \in R} c_r \langle \alpha_r, y \rangle \frac{1-r}{\alpha_r}.$$

Al operador D_y se lo llama un *operador de Dunkl*. Es claro que la aplicación

$$\mathfrak{h} \longrightarrow D(\mathfrak{h}^\circ) \rtimes W, \quad y \mapsto D_y$$

es $\mathbb{C}$-lineal.

Lema 7.6. *Sea $y \in \mathfrak{h}$ y $f \in \mathbb{C}[\mathfrak{h}^\circ]$. Entonces*

$$D_y f = f D_y + \partial_y(f) - \sum_{r \in R} c_r \langle \alpha_r, y \rangle \frac{f - r(f)}{\alpha_r} r.$$

Demostración. Primero supongamos que $f \in \mathbb{C}[\mathfrak{h}]$ y procedemos por inducción sobre el grado de f. Para $\deg(f) = 0$ tenemos que $f \in \mathbb{C}$ y el resultado es trivial. Asumamos el resultado para polinomios de grado $\leq d$. Todo polinomio de grado $d+1$ se puede escribir como combinación lineal de productos de polinomios de grado $\leq d$ y dado que la expresión es lineal en f, basta probarla para un producto fg donde $f, g \in \mathbb{C}[\mathfrak{h}^\circ]$ son polinomios de grado $\leq d$. Esto es simple:

$$\begin{aligned}
[D_y, fg] &= [D_y, f]g + f[D_y, g] \\
&= \left(\partial_y(f) - \sum_{r \in R} \langle \alpha_r, y \rangle \frac{f - r(f)}{\alpha_r} r \right) g + f \left(\partial_y(g) - \sum_{r \in R} \langle \alpha_r, y \rangle \frac{g - r(g)}{\alpha_r} r \right) \\
&= \partial_y(fg) - \sum_{r \in R} \langle \alpha_r, y \rangle \frac{fr(g) - r(f)r(g) + fg - fr(g)}{\alpha_r} r \\
&= \partial_y(fg) - \sum_{r \in R} \langle \alpha_r, y \rangle \frac{fg - r(fg)}{\alpha_r} r,
\end{aligned}$$

como se deseaba. Ahora, probemos que la identidad se verifica para δ^{-m} para $m \geq 1$. Notemos que como δ^m es un polinomio, la identidad se satisface para δ^m y así

$$\begin{aligned}
0 = [D_y, 1] = [D_y, \delta^{-m}\delta^m] &= \delta^{-m}[D_y, \delta^m] + [D_y, \delta^{-m}]\delta^m \\
&= \delta^{-m} \left(\partial_y(\delta^m) - \sum_{r \in R} c_r \langle \alpha_r, y \rangle \frac{\delta^m - r(\delta^m)}{\alpha_r} r \right) + [D_y, \delta^{-m}]\delta^m \\
&= \delta^{-m} \left(m\delta^{m-1}\partial_y(\delta) - \sum_{r \in R} c_r \langle \alpha_r, y \rangle \frac{\delta^m - r(\delta)^m}{\alpha_r} r \right) + [D_y, \delta^{-m}]\delta^m.
\end{aligned}$$

Ahora, como

$$r(\alpha_r) = \alpha_r - \langle \alpha_r, \alpha_r^\vee \rangle \alpha_r = (1 - \langle \alpha_r, \alpha_r^\vee \rangle)\alpha_r,$$

tenemos que

$$r(\delta) = \left(\prod_{H \in \mathcal{A}} (1 - \langle \alpha_H, \alpha_H^\vee \rangle) \right) \delta = \lambda\delta, \quad \lambda = \prod_{H \in \mathcal{A}} (1 - \langle \alpha_H, \alpha_H^\vee \rangle),$$

donde $\alpha_H^\vee = \alpha_r^\vee$ para cualquier $r \in W_H \setminus \{1\}$. Con esto obtenemos

$$\begin{aligned}
[D_y, \delta^{-m}] &= -m\delta^{-m-1}\partial_y(\delta) + \sum_{r \in R} c_r \langle \alpha_r, y \rangle \delta^{-m} \frac{\delta^m - r(\delta)^m}{\alpha_r} r(\delta^{-m}) r \\
&= \partial_y(\delta^{-m}) + \sum_{r \in R} c_r \langle \alpha_r, y \rangle \frac{1 - \lambda^m}{\alpha_r} \lambda^{-m}\delta^{-m} r \\
&= \partial_y(\delta^{-m}) - \sum_{r \in R} c_r \langle \alpha_r, y \rangle \frac{\delta^{-m} - r(\delta^{-m})}{\alpha_r} r,
\end{aligned}$$

como se deseaba. Finalmente, para $f \in \mathbb{C}[\mathfrak{h}^\circ]$ arbitrario, escribimos $f = g\delta^{-m}$ para cierto $g \in \mathbb{C}[\mathfrak{h}]$ y $m \geq 0$, luego expandimos

$$[D_y, g] = f[D_y, \delta^m] + [D_y, f]\delta^m,$$

de donde, similar a los cálculos anteriores, obtenemos el resultado. □

El siguiente resultado fue probado inicialmente por Dunkl y Opdam en [DO03]. Sin embargo, la demostración presentada aquí es distinta a la original.

Lema 7.7. *Los operadores de Dunkl conmutan: Si $y_1, y_2 \in \mathfrak{h}$, entonces*

$$[D_{y_1}, D_{y_2}] = 0.$$

Demostración. (P. Etingof) Sea $x \in \mathfrak{h}^*$. Usando la identidad de Jacobi y el lema anterior tenemos

$$\begin{aligned}
[[D_{y_1}, D_{y_2}], x] &= [[D_{y_1}, x], D_{y_2}] + [D_{y_1}, [D_{y_2}, x]] \\
&= \left[\partial_{y_1}(x) - \sum_{r\in R} c_r \langle \alpha_r, y_1\rangle \frac{x - r(x)}{\alpha_r} r, D_{y_2}\right] + \left[D_{y_1}, \partial_{y_2}(x) - \sum_{r\in R} c_r \langle \alpha_r, y_2\rangle \frac{x - r(x)}{\alpha_r} r\right] \\
&= \left[\langle x, y_1\rangle - \sum_{r\in R} c_r \langle \alpha_r, y_1\rangle \frac{\langle x, \alpha_r^\vee\rangle \alpha_r}{\alpha_r} r, D_{y_2}\right] + \left[D_{y_1}, \langle x, y_2\rangle - \sum_{r\in R} c_r \langle \alpha_r, y_2\rangle \frac{\langle x, \alpha_r^\vee\rangle \alpha_r}{\alpha_r} r\right] \\
&= \sum_{r\in R} c_r \langle x, \alpha_r^\vee\rangle \left(\langle \alpha_r, y_1\rangle [D_{y_2}, r] - \langle \alpha_r, y_2\rangle [D_{y_1}, r]\right)
\end{aligned}$$

Ahora, notemos que $w\partial_y w^{-1} = \partial_{w(y)}$ para todo $y \in \mathfrak{h}$ y $w \in W$, y dado que $c_{wrw^{-1}} = c_r$ y $\alpha_{wrw^{-1}} = \alpha_r$ para todo $r \in R$ y todo $w \in W$, tenemos que $wD_y w^{-1} = D_{w(y)}$ para todo $y \in \mathfrak{h}$ y $w \in W$. En particular, $[D_y, r] = rD_{r^{-1}(y)-y}$. Pero un cálculo directo muestra que $r^{-1}(y) - y = \langle \alpha_r, y\rangle \alpha_r^\vee$, de donde tenemos que

$$[D_y, r] = \langle \alpha_r, y\rangle r D_{\alpha_r^\vee}, \quad y \in \mathfrak{h}, r \in R.$$

Con esto

$$[[D_{y_1}, D_{y_2}], x] = \sum_{r\in R} c_r \langle x, \alpha_r^\vee\rangle r \left(\langle \alpha_r, y_1\rangle \langle \alpha_r, y_2\rangle D_{\alpha_r^\vee} - \langle \alpha_r, y_2\rangle \langle \alpha_r, y_1)\rangle D_{\alpha_r^\vee}\right) = 0.$$

Procediendo por inducción sobre $\deg(f)$, se sigue que $[[D_{Y_1}, D_{y_2}], f] = 0$ para todo $f \in \mathbb{C}[\mathfrak{h}]$ y un argumento similar al del lema precedente prueba que el resultado es cierto para $f = \delta^{-m}$ para todo $m > 1$. Luego el resultado es válido para todo $f \in \mathbb{C}[\mathfrak{h}^0]$ y dado que la representación de $D(\mathfrak{h}^\circ) \rtimes W$ en $\mathbb{C}[\mathfrak{h}^0]$ es fiel, concluimos que $[D_{y_1}, D_{y_2}] = 0$, como se deseaba. □

La imagen de $D_y \in D(\mathfrak{h}^\circ) \rtimes W$ en $\mathrm{gr}^F(D(\mathfrak{h}^\circ) \rtimes W)$ está representada por ∂_y, pues todos los demás términos involucrados son de grado cero. Dicho de otra manera, $\overline{\partial_y}$ es el símbolo principal de D_y.

7.4. **Álgebras de Cherednik racionales.** Notemos que el álgebra $\mathbb{C}[\mathfrak{h}]$ es naturalmente una subálgebra de $D(\mathfrak{h}^\circ) \rtimes W$. Con esto estamos en condiciones de definir el objeto principal de estudio de esta sección:

El *Álgebra de Cherednik racional* $H_c = H_c(W, \mathfrak{h})$ asociada al grupo W con *parámetro de deformación* c es la subálgebra de $D(\mathfrak{h}^\circ) \rtimes W$ generada por W, los operadores de Dunkl y la subálgebra $\mathbb{C}[\mathfrak{h}]$.

Denotamos por $\mathbb{C}[\mathfrak{h}^*]$ al álgebra de funciones regulares globales de la variedad algebraica $\mathfrak{h}^*$, es decir,

$$\mathbb{C}[\mathfrak{h}^*] = \Gamma(\mathfrak{h}^*, \mathcal{O}_{\mathfrak{h}^*}).$$

Notemos que existen aplicaciones naturales

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{h}^* & \longrightarrow & H_c \\ x & \longmapsto & x, \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} W & \longrightarrow & H_c \\ w & \longmapsto & w, \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \mathfrak{h} & \longrightarrow & H_c \\ y & \longmapsto & D_y \end{array}$$

que inducen morfismos de álgebras

$$\mathbb{C}[\mathfrak{h}] \longrightarrow H_c, \quad \mathbb{C}W \longrightarrow H_c, \quad \mathbb{C}[\mathfrak{h}^*] \longrightarrow H_c.$$

Sin embargo, no es claro que estos morfismos sean inyectivos. Sin embargo, estos morfismos permiten definir un morfismo $\mathbb{C}$-lineal

$$\mu : \mathbb{C}[\mathfrak{h}] \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}W \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[\mathfrak{h}^*] \longrightarrow H_c, \quad x \otimes w \otimes y \longmapsto xD_y w, \tag{7.1}$$

al que denominamos el *morfismo de multiplicación*.

Teorema 7.8 (Poincaré-Birkhoff-Witt)**.** *El morfismo de multiplicación* (7.1) *es un isomorfismo de espacios vectoriales.*

Demostración. Este morfismo es claramente sobreyectivo. Si consideramos la filtración

$$F_r(\mathbb{C}[\mathfrak{h}]\otimes\mathbb{C}W\mathbb{C}[\mathfrak{h}^*])=\mathbb{C}[\mathfrak{h}]\otimes\mathbb{C}WF_r\mathbb{C}[\mathfrak{h}^*],$$

donde $F_r\mathbb{C}[\mathfrak{h}^*]$ es el conjunto de polinomios de grado a lo más r, es fácil notar que el morfismode multiplicación respeta filtraciones y por ende induce un morfismo

$$\mu^F:\mathrm{gr}^F(\mathbb{C}[\mathfrak{h}]\otimes\mathbb{C}W\mathbb{C}[\mathfrak{h}^*])\longrightarrow\mathrm{gr}^F(D(\mathfrak{h}^\circ)\rtimes W),$$

el mismo que es claramente inyectivo por la descripción de los símbolos principales asociados a los operadores de Dunkl. Por cuestiones algebraicas estándar, esto implica que μ es inyectivo y así μ es un isomorfismo. □

Observación 7.9. El teorema anterior describe una base explícita para el álgebra H_c: Sea $\{y_1,\ldots,y_n\}$ una base cualquiera de $\mathfrak{h}$ y $\{x_1,\ldots,x_n\}$ la correspondiente base dual de $\mathfrak{h}^*$. Una base de H_c está dada por "monomios" de la forma

$$x^\alpha D_y^\beta w,\quad \alpha,\beta\in\mathbb{N}^n, w\in W$$

donde

$$x^\alpha=x_1^{\alpha_1}\cdots,x_n^{\alpha_n},\quad D_y^\beta=D_{y_1}^{\beta_1}\cdots D_{y_n}^{\beta_n}.$$

Esto se da pues en este caso los monomios $x^\alpha wy^\beta$ forman una base del producto tensorial $\mathbb{C}[\mathfrak{h}]\otimes\mathbb{C}W\otimes\mathbb{C}[\mathfrak{h}^*]$. Por ende el teorema probado es un análogo al teorema de Poincaré-Birkhoff-Witt que nos permite describir explícitamente una base para el álgebra envolvente universal $U(\mathfrak{g})$ de un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ (mirar [Knapp02], Capítulo III).

El álgebra de Cherednik racional admite una presentación por generadores y relaciones. Lamentablemente la demostración de esto es muy extensa para ser incluida en este trabajo (a mí, personalmente, me tomó 6 páginas de cálculos hacerla) por lo que sólo haremos un sketch de esta.

Denotamos por

$$T(\mathfrak{h}^*\oplus\mathfrak{h})=\bigoplus_{n\geq 0}(\mathfrak{h}^*\oplus\mathfrak{h})^{\otimes n}$$

al álgebra tensorial del espacio $\mathfrak{h}^*\oplus\mathfrak{h}$.

Teorema 7.10. *El álgebra $H_c=H_c(W,\mathfrak{h})$ es isomorfa al cociente del álgebra $T(\mathfrak{h}^*\oplus\mathfrak{h})\rtimes W$ por las relaciones*

$$[x,x']=0,\quad [y,y']=0\quad \textit{para } x,x'\in\mathfrak{h}^*, y,y'\in\mathfrak{h}$$

y

$$[y,x]-\langle x,y\rangle+\sum_{r\in R}c_r\langle\alpha_r,y\rangle\langle x,\alpha_r^\vee\rangle r\quad \textit{para } x\in\mathfrak{h}^*, y\in\mathfrak{h}.$$

Idea de la demostración. Sea A el álgebra definida por generadores y relaciones como arriba. Esta álgebra es un caso particular del álgebra de Drinfel'd-Hecke, y se puede verificar que satisface la propiedad PBW, lo que implica que si $\{x_1,\ldots,x_n\}$ es una base de $\mathfrak{h}^*$ dual a una base $\{y_1,\ldots,y_n\}$ de $\mathfrak{h}$, entonces los monomios de la forma

$$x_{i_1}\cdots x_{i_p}y_{j_1}\cdots y_{j_q}w,\quad 1\leq i_1\leq\cdots\leq i_p\leq n, 1\leq j_1\leq\cdots\leq j_q\leq n, w\in W$$

forman una base de A (ver [Gri10] para detalles y definiciones, aunque si el lector prefiere, puede buscar la versión 1 de este artículo en arxiv, donde encontrará una versión más detallada de la relación de las álgebras de Drinfel'd-Hecke con las álgebras de Cherednik). Usando esta base uno inmediatamente nota que el morfismo de multiplicación

$$\mathbb{C}[\mathfrak{h}]\otimes\mathbb{C}W\otimes\mathbb{C}[\mathfrak{h}^*]\longrightarrow A$$

es un isomorfismo de espacios vectoriales. Por ende la composición de la inversa de este provee un isomorfismo de espacios vectoriales

$$A\longrightarrow H_c,$$

que fácilmente puede probarse es un homomorfismo de $\mathbb{C}$-álgebras. □

7.5. **Categoría O.** Sea M un H_c-módulo izquierdo. Decimos que los operadores de Dunkl *actúan de manera localmente nilpotente* si para todo $m \in M$ existe un entero $n \gg 0$ tal que $D_y^n \cdot m = 0$ para todo $y \in \mathfrak{h}$. Definimos la *categoría* $\mathcal{O}_c = \mathcal{O}_x(W, \mathfrak{h})$ como la subcategoría plena de H_c-Mod cuyos objetos son H_c-módulos que son finitamente generados sobre el álgebra $\mathbb{C}[\mathfrak{h}]$ y sobre los cuales la acción de los operadores de Dunkl es localmente nilpotente.

Consideremos una sucesión exacta de H_c-módulos

$$0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0.$$

Es claro que M es un objeto de la categoría $\mathcal{O}_c$ si y sólo si M' y M'' lo son. Esto prueba

Proposición 7.11. *$\mathcal{O}_c$ es una subcategoría de Serre de H_c-Mod y en particular, $\mathcal{O}_c$ es una categoría abeliana.*

Definimos un funtor $\Delta_c : \mathbf{Rep}_{\mathbb{C}}(W) \to \mathcal{O}_c$ como sigue: Sea E una representación compleja de dimensión finita del grupo W, es decir, un $\mathbb{C}W$-módulo. Definimos sobre E una estructura de $\mathbb{C}[\mathfrak{h}^*] \rtimes W$-módulo definiendo

$$y \cdot e = 0, \quad \text{para todo } y \in \mathfrak{h}, e \in E.$$

El teorema PBW implica que $\mathbb{C}[\mathfrak{h}^*] \rtimes W$ es una subálgebra de H_c. Por ende, podemos inducir E a una representación de H_c y entonces definimos

$$\Delta_c(E) = \mathrm{Ind}_{\mathbb{C}[\mathfrak{h}^*] \rtimes W}^{H_c}(E) = H_c \otimes_{\mathbb{C}[\mathfrak{h}^*] \rtimes W} E.$$

No es claro para nosotros que $\Delta_c(E)$ sea un objeto en la categoría $\mathcal{O}_c$.

Lema 7.12. *Tenemos un isomorfismo de $\mathbb{C}[\mathfrak{h}] \rtimes W$-módulos*

$$\mathbb{C}[\mathfrak{h}] \otimes_{\mathbb{C}} E \xrightarrow{\sim} \Delta_c(E), \quad f \otimes e \longmapsto f \otimes e.$$

Bajo esta identificación, la acción de los operadores de Dunkl está dada por

$$D_y \cdot (f \otimes e) = \partial_y(f) \otimes e - \sum_{r \in R} c_r \langle \alpha_r, y \rangle \frac{f - r(f)}{\alpha_r} \otimes r(e) \tag{7.2}$$

En particular $\Delta_c(E)$ es objeto de la categoría $\mathcal{O}_c$.

Demostración. La primera afirmación es consecuencia del teorema PBW. La ecuación (7.2) es un cálculo directo similar a los ya efectuados anteriormente. Finalmente, notemos que si $m \in \Delta_c(E)$, podemos identificar a este elemento con una combinación lineal finita $\sum_{i=1}^m f_i \otimes e_i$, vía el isomorfismo $\Delta_c(E) \cong \mathbb{C}[\mathfrak{h}] \rtimes W$, y por ende, si $n > \deg(f_i)$ para todo i, la fórmula (7.2) nos dice que

$$D_y^n(f_i \otimes e_i) = 0, \quad 1 \leq i \leq m,$$

$D_y^n \cdot m = 0$ para todo $y \in \mathfrak{h}$. Esto prueba que la acción de los operadores de Dunkl sobre $\Delta_c(E)$ es localmente nilpotente. Finalmente es claro que $\Delta_c(E) \cong \mathbb{C}[\mathfrak{h}] \rtimes W$ es finitamente generado sobre $\mathbb{C}[\mathfrak{h}]$. □

Proposición 7.13. *El funtor $\Delta_c : \mathbf{Rep}_{\mathbb{C}}(W) \to \mathcal{O}_c$ es exacto.*

Demostración. El teorema PBW implica que H_c es un $\mathbb{C}[\mathfrak{h}^*] \rtimes W$-módulo derecho libre, y en particular es un módulo plano. La conclusión es entonces obvia. □

Cuando E es un objeto irreducible en la categoría $\mathbf{Rep}_{\mathbb{C}}(W)$, decimos que $\Delta_c(E)$ es un *módulo estándar*. La subcategoría de Serre generada por los módulos estándar está contenida en $\mathcal{O}_c$. Sin embargo, estas categorías son iguales.

Teorema 7.14. *$\mathcal{O}_c$ es la subcategoría de Serre generada por los módulos estándar $\Delta_c(E)$.*

Idea de la demostración. Sea $F_m\mathbb{C}[\mathfrak{h}^*]$ el conjunto de polinomios de grado $\leq m$. Definimos el *módulo estándar espeso* $\Delta_{c,m}$ mediante

$$\Delta_{c,m} = \mathrm{Ind}((F_m\mathbb{C}[\mathfrak{h}^*]) \otimes E).$$

Entonces por definición $\Delta_{c,m}(E)$ posee una filtración finita donde cada cociente sucesivo es un módulo estándar, lo que prueba que $\Delta_{c,m}(E)$ es un objeto en la categoría $\mathcal{O}_c$. Finalmente, basta notar que todo objeto en la categoría $\mathcal{O}_c$ es un cociente de una suma de módulos estándar espesos.

Esto prueba que la categoría $\mathcal{O}_c$ está contenida en la subcategoría de Serre generada por los módulos estándar. La otra inclusión ya fue discutida. □

7.6. Hacificación de álgebras de Cherednik. Dado que W actúa sobre $\mathbb{C}[\mathfrak{h}]$ podemos definir el anillo de W-invariantes como

$$\mathbb{C}[\mathfrak{h}]^W = \{f \in \mathbb{C}[\mathfrak{h}] \mid w(f) = f, \text{ para todo } w \in W\}.$$

Entonces tenemos el siguiente resultado fundamental:

Teorema 7.15 (Chevalley-Shephard-Todd)**.** *El álgebra $\mathbb{C}[\mathfrak{h}]^W$ es isomorfa a un álgebra de polinomios en un número finito de variables.*

La demostración de este resultado está fuera del alcance de este trabajo. Para una demostración, nos referimos a [LT09], Teorema 3.20.

Tenemos entonces que

$$\mathfrak{h}/W \cong \operatorname{Specm}(\mathbb{C}[\mathfrak{h}]^W),$$

de modo que $\mathfrak{h}/W$ es una variedad algebraica compleja afín. Sea $\mathcal{O}_{\mathfrak{h}/W}$ su haz estructural. Para cada abierto afín $U \subseteq \mathfrak{h}/W$ denotamos

$$\mathbb{C}[U] = \Gamma(U, \mathcal{O}_{\mathfrak{h}/W}|_U)$$

para el anillo de funciones regulares sobre U. Vía el morfismo de restricción $\mathbb{C}[\mathfrak{h}/W] = \mathbb{C}[\mathfrak{h}]^W \to \mathbb{C}[U]$, el álgebra $\mathbb{C}[U]$ tiene una estructura de $\mathbb{C}[\mathfrak{h}]^W$-módulo.

Definimos un haz $\mathscr{H}_c \in \mathbf{Sh}((\mathfrak{h}/W)^{\mathrm{an}})$ como sigue: Para cada abierto afín $U \subseteq \mathfrak{h}/W$, definimos

$$\mathscr{H}_c(U^{\mathrm{an}}) = \mathbb{C}[U] \otimes_{\mathbb{C}[\mathfrak{h}]^W} H_c(E, \mathfrak{h}).$$

Dado que los abiertos afines recubren a $\mathfrak{h}/W$ (incluso en la toplogía analítica), y que las condiciones de pegado se verifican trivialmente, obtenemos un haz $\mathscr{H}_c = \mathscr{H}_{c,W,\mathfrak{h}}$ sobre $\mathfrak{h}/W$, al que llamamos *la hacificación* del álgebra de Cherednik racional $H_c(W, \mathfrak{h})$.

Si $\tilde{U}$ es la preimagen de U en $\mathfrak{h}$, entonces $\mathscr{H}_c(U)$ es isomorfo a la subálgebra de endomorfismos de $\mathcal{O}_{\mathfrak{h}}(\tilde{U})$ generada por $\mathcal{O}_{\mathfrak{h}}(\tilde{U})$, el grupo W y los operadores de Dunkl D_y, $y \in \mathfrak{h}$.

7.7. El álgebra de Hecke finita. En lo que sigue, las topologías en cuestión son las topologías analíticas. Fijemos $p \in \mathfrak{h}^\circ$. Dado un hiperplano $H \in \mathcal{A}$, un *camino de p hacia H en $\mathfrak{h}^\circ$* es una camino $\gamma : [0,1] \to \mathfrak{h}$ tal que $\gamma(0) = p$, $\gamma(1) \in H$ y $\gamma([0,1[) \subseteq \mathfrak{h}^\circ$.

Dos caminos γ, γ' de x_0 a H en $\mathfrak{h}^\circ$ se dicen *H-homotópicos* si existe una aplicación continua $T : [0,1] \times [0,1] \to \mathfrak{h}$, llamada *$H$-homotopía* tal que

1. $T(t,0) = \gamma(t)$ para todo $t \in [0,1]$;
2. $T(t,1) = \gamma'(t)$ para todo $t \in [0,1]$;
3. $T(0,u) = p$ para todo $u \in [0,1]$;
4. $T(1,u) \in H$ para todo $u \in [0,1]$; y
5. $T(t,u) \in \mathfrak{h}^\circ$ para todo $t \in [0,1[$ y $u \in [0,1]$.

Denotamos por $[\gamma]_H$ a la clase de H-homotopía de γ.

Denotamos

$$\tilde{H} = H \setminus \bigcup_{H \neq H' \in \mathcal{A}} H'.$$

Sea γ un camino de p a H en $\mathfrak{h}^\circ$ y sea B una vecindad abierta de $\gamma(1)$ en $\mathfrak{h}^\circ \cup \tilde{H}$ tal que $B \cap \mathfrak{h}^\circ$ tiene grupo fundamental abeliano libre de rango 1. Sea $u \in [0,1[$ tal que $\gamma(t) \in B$ para todo $t \geq 1$ y sea $q = \gamma(u)$. Entonces existe un isomorfismo $\pi_1(\mathfrak{h}^\circ \cap B, q) \to \mathbb{Z}$. Luego $1 \mapsto [\lambda]$ para cierto lazo λ basado en q.

Denotamos $\gamma_u[0,1] \to \mathfrak{h}$ al camino $\gamma_u(t) = \gamma(tu)$ y denotamos por $\varrho_{[\gamma]_H} = [\gamma_u^{-1} * \lambda * \gamma_u] \in \pi_1(\mathfrak{h}^\circ, p)$. Es fácil probar que $\varrho_{[\gamma]_H}$ depende únicamente en la clase de H-homotopía de γ, de modo que la notación está justificada. Llamamos a $\varrho_{[\gamma]_H}$ el *generador de monodromía alrededor de H asociado a $[\gamma]_H$*.

Tenemos el siguiente resultado (véase [BMR98], Proposición 2.8).

Teorema 7.16. *Existe una colección $\{\varrho_H\}_{H \in \mathcal{A}}$ donde cada ϱ_H es un generador de monodromía alrededor de $H \in \mathcal{A}$ de modo que $\pi_1(\mathfrak{h}^\circ, p)$ está generado por $\{\varrho_H\}_{H \in \mathcal{A}}$*

El grupo fundamental $\pi_1(\mathfrak{h}^\circ/W, \overline{p})$, donde $\overline{p}$ es la W-órbita de p, se llama el *grupo de trenzas* de W. Usaremos las notaciones

$$B_W = \pi_1(\mathfrak{h}^\circ/W, \overline{p}) = \pi_1(\mathfrak{h}^\circ/W, p).$$

La proyección natural $\mathfrak{h}^\circ \to \mathfrak{h}^\circ/W$ es un espacio recubridor regular (conocido también como recubrimiento de Galois). Denotamos por T_H a la imagen de ϱ_H en $\pi_1(\mathfrak{h}^\circ/W, p)$ bajo el homomorfismo inducido por la proyección $\mathfrak{h}^\circ \to \mathfrak{h}^\circ/W$.

Si c denota el parámetro de deformación del álgebra de Cherednik H_c, escribimos $\{r_0 = 0, r_1, \ldots, r_{n_H-1}\} = W_H$ y denotamos $c_{H,j} = c_{r_j}$ para cada $0 \leq j \leq n_H - 1$ y cada $H \in \mathcal{A}$.

El *álgebra de Hecke finita* de tipo W con parámetro c, denotada por $\mathcal{H}_c(W)$ se define como

$$\mathcal{H}_c(W) = \mathbb{C}B_W / \left\langle \prod_{j=0}^{n_H-1} \left(T_H - e^{2\pi i (c_{H,j} + j/n_H)}\right) \,\middle|\, H \in \mathcal{A} \right\rangle.$$

Elecciones de distintos generadores de monodromía producen un álgebra isomorfa a $\mathcal{H}_c(W)$, por lo que la definición de esta álgebra no depende de la elección de los generadores de monodromía.

El siguiente teorema ha sido probado caso por caso para cada grupo de reflexiones irreducible W (ver por ejemplo [Eti17-2] y las referencias ahí).

Teorema 7.17. *Si W es un grupo de reflexiones irreducible, entonces*

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{H}_c(W) = |W|.$$

7.8. El funtor de Kniznik-Zamolodchikov.

En esta última sección, W denotará un grupo de reflexiones complejas irreducible. Nuestro objetivo ahora será el de definir un funtor

$$\mathrm{KZ} : \mathcal{O}_c(W, \mathfrak{h}) \longrightarrow \mathcal{H}_c(W)\text{-Mod},$$

llamado *funtor de Knizhnik-Zamolodchikov*, o también *funtor* KZ. Esta construcción se realizará en varias etapas.

Fijemos $p \in \mathfrak{h}$. Sea

$$W_p = \{w \in W \mid w(p) = p\},$$

es decir, el grupo de isotropía de p. También denotamos por $I(p)$ al ideal de p en la variedad algebraica $\mathfrak{h}$, es decir,

$$I(p) = \{f \in \mathbb{C}[\mathfrak{h}] \mid f(p) = 0\}.$$

Definimos el *funtor de fibras*

$$F_p : \mathcal{O}_c \longrightarrow \mathbb{C}W_p\text{-Mod}, \quad M \longmapsto M(p) := M/I(p)M = (\mathbb{C}[\mathfrak{h}]/I(p)) \otimes_{\mathbb{C}[\mathfrak{h}]} M.$$

Por definición este funtor es exacto por la derecha. Supongamos desde ahora que $p \in \mathfrak{h}^\circ$, entonces tenemos que $W_p = 1$ y por ende

$$F_p : \mathcal{O}_c \longrightarrow \mathbf{Vect}_{\mathbb{C}}$$

donde $\mathbf{Vect}_{\mathbb{C}}$ es la categoría de espacios vectoriales complejos. En este caso, el funtor F_p admite una factorización

$$\begin{tikzcd} \mathcal{O}_c \arrow[rr, "F_p"] \arrow[dr, "L"'] & & \mathbf{Vect}_{\mathbb{C}} \\ & D(\mathfrak{h}^\circ) \rtimes W\text{-mod} \arrow[ur, "F'_p"'] & \end{tikzcd},$$

en donde $D(\mathfrak{h}^\circ) \rtimes W$-mod es la subcategoría plena de $D(\mathfrak{h}^\circ) \rtimes W$-Mod que consiste de módulos que son finitamente generados sobre $\mathbb{C}[\mathfrak{h}]$;

$$L : \mathcal{O}_c \longrightarrow D(\mathfrak{h}^\circ) \rtimes W\text{-Mod}, \quad M \longmapsto \mathbb{C}[\mathfrak{h}^\circ] \otimes_{\mathbb{C}[\mathfrak{h}]} M$$

es el *funtor de localización*, y

$$F'_p : D(\mathfrak{h}^\circ) \rtimes W\text{-mod} \longrightarrow \mathbf{Vect}_{\mathbb{C}}$$

es el funtor de fibras $M \mapsto M(p) = (\mathbb{C}[\mathfrak{h}^\circ]/I^\circ(p)) \otimes_{\mathbb{C}[\mathfrak{h}^\circ]} M$, donde $I^\circ(p)$ es el ideal de p en la variedad $\mathfrak{h}^\circ$. En efecto, claramente tenemos un isomorfismo de $\mathbb{C}[\mathfrak{h}]$-módulos $\mathbb{C}[\mathfrak{h}^\circ]/I^\circ(p) \otimes_{\mathbb{C}[\mathfrak{h}^\circ]} \mathbb{C}[\mathfrak{h}^\circ] \cong \mathbb{C}[\mathfrak{h}]/I(p)$, y por ende

$$\begin{aligned} F'_p(L(M)) &= (\mathbb{C}[\mathfrak{h}^\circ]/I^\circ(p)) \otimes_{\mathbb{C}[\mathfrak{h}^\circ]} \left(\mathbb{C}[\mathfrak{h}^\circ] \otimes_{\mathbb{C}[\mathfrak{h}]} M\right) \\ &= \left((\mathbb{C}[\mathfrak{h}^\circ]/I^\circ(p)) \otimes_{\mathbb{C}[\mathfrak{h}^\circ]} \mathbb{C}[\mathfrak{h}^\circ]\right) \otimes_{\mathbb{C}[\mathfrak{h}]} M \\ &= (\mathbb{C}[\mathfrak{h}]/I(p)) \otimes_{\mathbb{C}[\mathfrak{h}]} M \\ &= F_p(M). \end{aligned}$$

El funtor de localización $L : \mathcal{O}_c \to D(\mathfrak{h}^\circ) \rtimes W$-Mod es exacto pues la localización es exacta (equivalentemente pues $\mathbb{C}[\mathfrak{h}^\circ]$ es un $\mathbb{C}[\mathfrak{h}]$-módulo plano). Veamos ahora que F'_p es un funtor exacto. Para ello, notemos que si M es un $D(\mathfrak{h}^\circ) \rtimes W$-módulo finitamente generado sobre $\mathbb{C}[\mathfrak{h}]$, este viene naturalmente equipado con una conexión

$$\partial : \mathfrak{h} \longrightarrow \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(M), \quad y \longmapsto \partial_y = D_y + \sum_{r \in R} c_r \langle \alpha_r, y \rangle \frac{1 - r}{\alpha_r}.$$

Es claro que esta conexión es plana y por ende M es un fibrado vectorial sobre $\mathfrak{h}^\circ$ equipado con una conexión plana, y el funtor de secciones horizonales nos produce un sistema local sobre $\mathfrak{h}^\circ$ cuyas secciones globales son un $\mathbb{C}$-espacio vectorial de dimensión finita. Esto define un nuevo funtor

$$D(\mathfrak{h}^\circ) \rtimes W\text{-mod} \longrightarrow \mathbf{Vect}_{\mathbb{C}}$$

que por construcción es naturalmente isomorfo a F'_p. Más aún este funtor es una equivalencia de categorías, de modo que F'_p es exacto. Esto prueba

Proposición 7.18. *Si $p \in \mathfrak{h}^\circ$, el funtor de fibras*

$$F_p : D(\mathfrak{h}^\circ) \rtimes W\text{-mod} \longrightarrow \mathbf{Vect}_{\mathbb{C}}$$

es exacto.

La acción por monodromía entonces induce un funtor

$$\mathcal{O}_c \longrightarrow \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(F_p)\text{-Mod}, \tag{7.3}$$

y esta misma acción, al ser W-invariante, induce una aplicación

$$\pi_1(\mathfrak{h}^\circ/W, p) \longrightarrow \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(F_p),$$

la que a su vez induce un homomorfismo de álgebras

$$\mathcal{H}_c(W) \longrightarrow \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(F_p). \tag{7.4}$$

Es posible probar que este homomorfismo es sobreyectivo. Además tenemos

Teorema 7.19. *Si $p \in \mathfrak{h}^\circ$, entonces*

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(F_p) = |W|.$$

Demostración. Ver [GGOR03], Sección 5. □

Entonces el homomorfismo (7.4) es un isomorfismo, y por ende obtenemos una equivalencia de categorías

$$\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(F_p)\text{-Mod} \longrightarrow \mathcal{H}_c(W)\text{-Mod},$$

que compuesta con el funtor (7.3) produce el funtor deseado

$$\mathrm{KZ} : \mathcal{O}_c(W, \mathfrak{h}) \longrightarrow \mathcal{H}_c(W)\text{-Mod},$$

lo que completa la construcción del funtor de Knizhnik-Zamolodchikov.

Observaciones 7.20. —

1. Si bien no hemos utilizado toda la potencia de los D-módulos algebraicos/analíticos, es posible hacerlo usando la hacificación del álgebra de Cherednik. En este caso, se define un análogo a la categoría $\mathcal{O}_c$ para $\mathcal{H}_c$-módulos. Estos módulos son coherentes y de rango finito sobre $\mathcal{O}_X$ y por ende son fibrados vectoriales planos. El funtor de secciones planas y la acción de monodromia producen el funtor deseado a nivel de haces. Ver por ejemplo [Et17-1]
2. Es posible obtener el funtor KZ como caso particular de una construcción más general: los funtores de restricción parabólica de Etingof-Bezrukavnikov. Ver [BE09].
3. Dado que el funtor KZ es exacto, está representado por un objeto proyectivo P_{KZ}. Es posible construir este objeto sin necesidad de recurrir al funtor KZ, lo que provee una descripción completamente algebraica de este funtor. Este enfoque se encuentra en [Th17].

Referencias

[BE09] Roman Bezrukavnikov & Pavel Etingof, *Parabolic induction and restriction functors for rational Cherenik algebras*, Sel. math. New ser. **14** (2009), 397-425.

[BMR98] Michel Broué, Gunter Malle, Raphael Rouquiër, *Complex reflection groups, braid groups, Hecke algebras*, J. reine angew. Math **500** (1998), 127-190.

[Cou95] Severino Collier Coutinho, *A Primer on Algebraic D-modules*, Cambridge University Press, London Mathematical Society Students Texts, **133**. (1995).

[DO03] Charles Dunkl & Eric Opdam, *Dunkl Operators for Complex Reflection Groups*, Proc. London Math. Soc. (3) 86 (2003) 70-108.

[Et17-1] Pavel Etingof, *Cherednik and Hecke algebras of varieties with a finite group action*, Mosc. Math. J. Vol 17 **4** (2017) 635–666.

[Eti17-2] Pavel Etingof, *Proof of the Broué-Malle-Rouquier conjecture in characteristic zero*, arXiv:1606.08456v2

[GGOR03] Victor Ginzburg, Nicolas Guay, Eric Opdam, Raphaël Rouquier, *On the category O for rational Cherednik algebras.* Invent. Math, **154** (2003), 617-651.

[Gri10] Stephen Griffeth, *Towards a combinatorial representation theory for the Rational Cherednik Algebra of type G(r,p,n)*, Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society (2010) **53**, 419–445.

[Har77] Robin Hartshorne, *Algebraic Geometry*, Graduate Texts in Mathematics **52**, Springer, (1977).

[Knapp02] Anthony Knapp, *Lie Groups Beyond an Introduction*, Second Edition, Progress in Mathematics **140**, Birkhäuser, (2002).

[LT09] Gustav Lehrer & Donald Taylor, *Unitary Reflection Groups*, Australian Mathematical Society Lecture Series **20**, Cambridge, (2009)

[ML91] Saunders Mac Lane, *Categories for the Working Mathematician*, Second Edition, Springer, (1991).

[Th17] Sam Thelin, *An algebraic approach to the KZ-functor for rational Cherednik algebras associated with cyclic groups*, Journal of Algebra **471** (2017) 113-148.

Instituto de Matemática, Universidad de Talca, talca, Chile.
Email address: `carlos.ajila.epn@gmail.com`