Cohomología de Haces Coherentes

Este texto busca resumir las reglas y resultados importante de la Cohomología de Haces Coherentes, y está fuertemente basado en la sección §B.9 de *Chapters on algebraic surfaces* por Miles Reid. Para más detalles ver *Faisceaux algébriques cohérents* por Jean-Pierre Serre.

Datos iniciales

Sea X una variedad algebraica (reducida y separada) definida sobre un cuerpo algebraicamente cerrado k, y sea $\mathcal{F}$ un haz coherente en X (e.g. el haz de secciones de un fibrado vectorial). La cohomología de haces permite asociar a $\mathcal{F}$ y a $i \in \mathbb{N}$ el k-espacio vectorial $\mathrm{H}^i(X,\mathcal{F})$, llamado el i-ésimo grupo de cohomología de $\mathcal{F}$ y cuya dimensión se denota $h^i(X,\mathcal{F}) \coloneqq \dim_k \mathrm{H}^i(X,\mathcal{F})$. Además, la construcción es functorial (covariante), en el sentido que si $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ es un morfismo de haces coherentes en X, entonces hay aplicaciones lineales inducidas

$$\mathrm{H}^i(\varphi) : \mathrm{H}^i(X,\mathcal{F}) \longrightarrow \mathrm{H}^i(X,\mathcal{G}).$$

Finalmente, si $0 \to \mathcal{F} \to \mathcal{G} \to \mathcal{H} \to 0$ es una sucesión exacta (corta) de haces coherentes en X, entonces hay un *morfismo de conexión*

$$\delta^i : \mathrm{H}^i(X,\mathcal{H}) \longrightarrow \mathrm{H}^{i+1}(X,\mathcal{F}),$$

que es functorial (respecto a morfismos de sucesiones exactas).

A continuación, listamos las principales propiedades y resultados de la cohomología de haces.

Secciones globales.

Para todo haz coherente $\mathcal{F}$ en X tenemos que $\mathrm{H}^0(X,\mathcal{F}) = \Gamma(X,\mathcal{F}) \coloneqq \mathcal{F}(X)$ es el espacio de secciones globales de $\mathcal{F}$.

Variedades afines.

Sea $X \subseteq \mathbb{A}^n$ variedad algebraica afín. Entonces, $\mathrm{H}^i(X,\mathcal{F}) = 0$ para todo $i > 0$. Más aún, $\mathrm{H}^0(X,\mathcal{F})$ es un $\mathcal{O}(X) = \mathrm{H}^0(X,\mathcal{O}_X)$-módulo que cumple

$$\mathrm{H}^0(U,\mathcal{F}) \cong \mathrm{H}^0(X,\mathcal{F}) \otimes_{\mathcal{O}(X)} \mathrm{H}^0(U,\mathcal{O}_X)$$

para todo abierto $U \subseteq X$, y $\mathcal{F}_x \cong \mathrm{H}^0(X,\mathcal{F}) \otimes_{\mathcal{O}(X)} \mathcal{O}_{X,x}$ para todo punto $x \in X$.

Dimensión.

Para todo haz coherente $\mathcal{F}$ en X tenemos que $\mathrm{H}^i(X,\mathcal{F}) = 0$ si $i > \dim(X)$.

Sucesión exacta larga.

Sea $0 \to \mathcal{F} \to \mathcal{G} \to \mathcal{H} \to 0$ es una sucesión exacta (corta) de haces coherentes en X, entonces la functorialidad de la construcción y la existencia de morfismos de conexión permiten probar que hay una sucesión exacta larga de grupos de cohomología

$$0 \to \mathrm{H}^0(X,\mathcal{F}) \to \mathrm{H}^0(X,\mathcal{G}) \to \mathrm{H}^0(X,\mathcal{H}) \to \mathrm{H}^1(X,\mathcal{F}) \to \mathrm{H}^1(X,\mathcal{G}) \to \mathrm{H}^1(X,\mathcal{H}) \to \mathrm{H}^2(X,\mathcal{F}) \to \cdots$$

asociada a $0 \to \mathcal{F} \to \mathcal{G} \to \mathcal{H} \to 0$.

Finitud.

Si X es una variedad proyectiva, entonces para todo haz coherente $\mathcal{F}$ en X y todo $i \in \mathbb{N}$, tenemos que $\mathrm{H}^i(X,\mathcal{F})$ es un k-espacio vectorial de dimensión finita, i.e., $h^i(X,\mathcal{F}) < +\infty$.

Fibrados en recta amplios y anulación de Serre.

Sea $X \subseteq \mathbb{P}^n$ subvariedad cerrada y consideramos $\mathcal{O}_X(1) \coloneqq \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)|_X$ fibrado en rectas muy amplio en X. Para todo haz coherente $\mathcal{F}$ en X y todo $m \in \mathbb{Z}$, definimos $\mathcal{F}(m) \coloneqq \mathcal{F} \otimes \mathcal{O}_X(m)$.

Entonces, para $\mathcal{F}$ haz coherente en X dado, existe $N = N(\mathcal{F})$ tal que para todo $m \geq N$ se tiene que la restricción $\mathrm{H}^0(X,\mathcal{F}(m)) \twoheadrightarrow \mathrm{H}^0(U,\mathcal{F}(m))$ es sobreyectiva para todo abierto $U \subseteq X$, y el morfismo de evaluación $\mathrm{ev}_x : \mathrm{H}^0(X,\mathcal{F}(m)) \to \mathcal{F}(m)_x,\ s \mapsto s(x) \coloneqq [s] \in \mathcal{F}(m)_x/\mathfrak{m}_x\mathcal{F}(m)$ es sobreyectivo para todo punto $x \in X$ (y decimos que $\mathcal{F}(m)$ es globalmente generado).

Más aún, $\mathrm{H}^i(X,\mathcal{F}(m)) = 0$ para todo $i > 0$ (anulación de Serre).

Dualidad de Serre.

Sea X variedad algebraica proyectiva suave e irreducible de $\dim(X) = n$, y sea $\omega_X \coloneqq \det(\Omega^1_X) \cong \bigwedge^n \Omega^1_X$ el fibrado en rectas canónico de X, donde $K_X \in \mathrm{Div}(X)$ tal que $\mathcal{O}_X(K_X) \cong \omega_X$ es llamado un divisor canónico de X.

Entonces, $\mathrm{H}^n(X,\omega_X) \cong k$ es un k-espacio vectorial de dimensión 1. Además, si E es (el haz de secciones de) un fibrado vectorial en X, entonces para todo $i \in \{0,1,\dots,n\}$ hay un emparejamiento perfecto

$$\mathrm{H}^i(X,E) \times \mathrm{H}^{n-i}(X,E^\vee \otimes \omega_X) \longrightarrow \mathrm{H}^n(X,\omega_X) \cong k.$$

Luego, hay un isomorfismo (no-canónico) $\mathrm{H}^i(X,E) \cong \mathrm{H}^{n-i}(X,E^\vee \otimes \omega)^\vee$ y en particular $h^i(X,E) = h^{n-i}(X,E^\vee \otimes \omega_X)$.

Si $L \cong \mathcal{O}_X(D)$ es un fibrado en rectas, donde $D \in \mathrm{Div}(X)$, entonces $L^\vee \cong \mathcal{O}_X(-D)$ y luego en este caso el emparejamiento anterior se reescribe como

$$\mathrm{H}^i(X,\mathcal{O}_X(D)) \times \mathrm{H}^{n-i}(X,\mathcal{O}_X(K_X - D))) \longrightarrow \mathrm{H}^n(X,\omega_X) \cong k,$$

de donde $\mathrm{H}^i(X,\mathcal{O}_X(D)) \cong \mathrm{H}^{n-i}(X,\mathcal{O}_X(K_X - D)))^\vee$.

Anulación de Kodaira.

Supongamos que $\mathrm{car}(k) = 0$ (e.g. $k = \mathbb{C}$). Sea X variedad algebraica proyectiva suave e irreducible y sea $L \in \mathrm{Pic}(X)$ fibrado en rectas *amplio*. Entonces,

$$\mathrm{H}^i(X,\omega_X \otimes L) = 0$$

para todo $i > 0$ (anulación de Kodaira). Equivalentemente, por dualidad de Serre, $\mathrm{H}^i(X,L^\vee) = 0$ para todo $i < n$.

Característica de Euler-Poincaré.

Supongamos que X es una variedad algebraica proyectiva. Entonces, para todo haz coherente $\mathcal{F}$ en X y todo $i \in \mathbb{N}$, tenemos que $\mathrm{H}^i(X,\mathcal{F})$ es un k-espacio vectorial de dimensión finita. En tal caso, definimos la característica de Euler-Poincaré de $\mathcal{F}$ mediante

$$\chi(X,\mathcal{F}) = \sum_{i\geq 0}(-1)^i h^i(X,\mathcal{F}) = h^0(X,\mathcal{F}) - h^1(X,\mathcal{F}) + \ldots + (-1)^{\dim(X)}h^{\dim(X)}(X,\mathcal{F}).$$

Por definición de sucesión exacta larga de cohomología, si $0 \to \mathcal{F} \to \mathcal{G} \to \mathcal{H} \to 0$ es una sucesión exacta (corta) de haces coherentes en X, entonces $\chi(X,\mathcal{G}) = \chi(X,\mathcal{F}) + \chi(X,\mathcal{H})$.

Polinomio de Hilbert.

Sea $X \subseteq \mathbb{P}^n$ subvariedad cerrada y consideramos $\mathcal{O}_X(1) := \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)|_X$ fibrado en rectas muy amplio en X. Para todo haz coherente $\mathcal{F}$ en X y todo $m \in \mathbb{Z}$, definimos $\mathcal{F}(m) := \mathcal{F} \otimes \mathcal{O}_X(m)$.

Entonces, el teorema de anulación de Serre implica que la función $P_{\mathcal{F}} : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ dada por $P_{\mathcal{F}}(m) = \chi(X,\mathcal{F}(m)) = \sum_{i\geq 0}(-1)^i h^i(X,\mathcal{F}(m))$ verifica $P_{\mathcal{F}}(m) = h^0(X,\mathcal{F}(m))$ para $m \gg 0$. Más aún, $P_{\mathcal{F}}(m)$ es una función polinomial en m, llamado el *polinomio de Hilbert* de $\mathcal{F}$. En particular, $P_X(m) := P_{\mathcal{O}_X}(m) = \chi(X,\mathcal{O}_X(m))$ es el polinomio de Hilbert de X.

Teorema de Riemann-Roch.

Sea X una variedad algebraica proyectiva suave e irreducible, y sea $D \in \mathrm{Div}(X)$ un divisor en X con fibrado en rectas asociado $\mathcal{O}_X(D)$. Históricamente, el k-espacio vectorial $\mathrm{H}^0(X,\mathcal{O}_X(D))$ es llamado el *espacio de Riemann-Roch* de D y su dimensión es también denotada $\ell(D) := h^0(X,\mathcal{O}_X(D))$. El motivo de esto, es que el Teorema de Riemann-Roch busca determinar (o dar cotas para) $h^0(X,\mathcal{O}_X(D))$ en términos de D y de invariantes geométricos de X.

Ejemplo 1. Supongamos que $\dim(X) = 1$, i.e., X es una curva algebraica. En tal caso, pensamos $D = \sum_{i=1}^r n_i \cdot p_i$ como un divisor de Weil (i.e., como una suma formal finita donde $n_i \in \mathbb{Z}$ y $p_i \in X$ es un punto) y definimos $\deg(D) := \sum_{i=1}^r n_i \in \mathbb{Z}$. Recordemos que $g(X) := h^0(X,\omega_X) = h^0(X,\Omega_X^1)$ es el género de la curva X, que coincide con $h^1(X,\mathcal{O}_X)$ por dualidad de Serre.

Entonces, el Teorema de Riemann-Roch afirma que

$$\chi(X,\mathcal{O}_X(D)) = \chi(X,\mathcal{O}_X) + \deg(D).$$

Por dualidad de Serre, $\chi(X,\mathcal{O}_X(D)) = h^0(X,\mathcal{O}_X(D)) - h^1(X,\mathcal{O}_X(D))$ es $h^0(X,\mathcal{O}_X(D)) - h^0(X,\mathcal{O}_X(K_X - D)) = \ell(D) - \ell(K_X - D)$. Del mismo modo, $\chi(X,\mathcal{O}_X) = h^0(X,\mathcal{O}_X) - h^1(X,\mathcal{O}_X) = 1 - g(X)$. Luego, el Teorema de Riemann-Roch se reescribe como

$$\ell(D) - \ell(K_X - D) = 1 - g(X) + \deg(D).$$

Ejemplo 2. Supongamos que $\dim(X) = 2$, i.e., X es una superficie algebraica. En tal caso, pensamos $D = \sum_{i=1}^r n_i C_i$ como un divisor de Weil (i.e., como una suma formal finita donde $n_i \in \mathbb{Z}$ y $C_i \subseteq X$ es una curva irreducible) y para un fibrado en rectas $L = \mathcal{O}_X(D')$ definimos el número de intersección entre D y D' como

$$D' \cdot D := \sum_{i=1}^r n_i(D \cdot C_i) \in \mathbb{Z},$$

donde $D \cdot C_i := \deg(\nu^*(L|_{C_i}))$ y $\nu : C_i^\nu \to C_i$ es la normalización de C_i, que es una curva algebraica proyectiva suave e irreducible (y luego $\deg : \mathrm{Pic}(C_i^\nu) \to \mathbb{Z}$ está bien definido). El producto de intersección es bilineal, y sólo depende de la clase de equivalencia lineal de D y D'.

Entonces, el Teorema de Riemann-Roch afirma que

$$\chi(X,\mathcal{O}_X(D)) = \chi(X,\mathcal{O}_X) + \frac{1}{2}(D^2 - D \cdot K_X).$$

Más aún, para $k = \mathbb{C}$ tenemos la fórmula de Noether

$$\chi(X,\mathcal{O}_X) = \frac{1}{12}(K_X^2 + \chi_{\mathrm{top}}(X)),$$

donde $\chi_{\mathrm{top}}(X) = \sum_{i=0}^4(-1)^i b_i(X)$ es la característica de Euler-Poincaré *topológica*, y donde $b_i(X) := \dim_{\mathbb{R}} \mathrm{H}^i(X,\mathbb{R})$ son los números de Betti de X.

Observación:

En dimensión arbitraria, el Teorema de Hirzebruch-Riemann-Roch afirma que si E es un fibrado vectorial en una variedad algebraica proyectiva suave e irreducible, entonces

$$\chi(X,E) = \int_X \mathrm{ch}(E) \cdot \mathrm{td}(X),$$

donde $\mathrm{ch}(E)$ es el *caracter de Chern* de E y $\mathrm{td}(X)$ es la *clase de Todd* de X, y son objetos que toman valores en el *anillo de Chow* $\mathrm{CH}^*(X)$ de X (o en el anillo de cohomología singular $\mathrm{H}^{2*}(X,\mathbb{Q})$ si $k = \mathbb{C}$), y el símbolo integral se interpreta en la práctica como calcular el producto de dichas cantidades en el anillo graduado $\mathrm{CH}^*(X)$ y considerar la parte de grado máximo, donde esta última puede interpretarse como un número entero.

Por ejemplo, si $\dim(X) = 3$ entonces se obtiene la fórmula

$$\chi(X,\mathcal{O}_X(D)) = \chi(X,\mathcal{O}_X) + \frac{1}{12}D\cdot(D - K_X)(2D - K_X) + \frac{1}{12}D \cdot c_2(X),$$

donde $c_2(X)$ es la *segunda clase de Chern* de X. Además, $\chi(X,\mathcal{O}_X) = -\frac{1}{24}K_X \cdot c_2(X)$.

En 1957, Grothendieck generaliza lo anterior y formula el teorema de Grothendieck-Hirzebruch-Riemann-Roch, que extiende la fórmula general al caso de un morfismo $f : X \to Y$ entre variedades algebraicas proyectivas suaves e irreducibles. Otra importante generalización del Teorema de Hirzebruch-Riemann-Roch es el Teorema de Atiyah-Singer que reinterpreta la fórmula anterior en términos de operadores diferenciales elípticos en variedades compactas.

Teorema de descomposición de Hodge y sección hiperplana de Lefschetz.

Supongamos que $k = \mathbb{C}$ y sea X una variedad algebraica proyectiva suave e irreducible. Entonces, usando métodos analíticos, se prueba el Teorema de descomposición de Hodge

$$\mathrm{H}^i(X,\mathbb{C}) = \bigoplus_{p+q=i} \mathrm{H}^{p,q}(X),$$

donde $\mathrm{H}^{p,q}(X) := \mathrm{H}^q(X,\Omega_X^p)$ y donde $\mathrm{H}^{q,p}(X) = \overline{\mathrm{H}^{p,q}(X)}$ (conjugación compleja). En particular, los *números de Hodge* $h^{p,q}(X) := \dim_{\mathbb{C}} \mathrm{H}^q(X,\Omega_X^p)$ verifican $h^{p,q}(X) = h^{q,p}(X)$ y $b_i(X) = \sum_{p+q=i} h^{p,q}(X)$.

Además, si $Y \subseteq X$ es una hipersuperficie tal que $\mathcal{O}_X(Y)$ es *amplio*. Entonces, el Teorema de sección hiperplana de Lefschetz afirma que la restricción $\mathrm{H}^i(X,\mathbb{Z}) \to \mathrm{H}^i(Y,\mathbb{Z})$ es un isomorfismo cuando $i \leq \dim(X) - 2$ y es inyectiva para $i = \dim(X) - 1$. Además, si $\dim(X) \geq 4$ entonces la restricción $\mathrm{Pic}(X) \to \mathrm{Pic}(Y)$ es un isomorfismo. Finalmente, si además suponemos Y suave e irreducible, entonces la restricción $\mathrm{H}^q(X,\Omega_X^p) \to \mathrm{H}^q(Y,\Omega_Y^p)$ es un isomorfismo para $p + q \leq \dim(X) - 2$ y es inyectiva para $p + q = \dim(X) - 1$.

Citando a Miles Reid, *no puedes crecer como geometra hasta que hayas memorizado estas fórmulas. Eventualmente, habrás aprendido qué significan y cómo calcular con ellas también.*