Certamen MAT426

Pedro Montero

Departamento de Matemática, Universidad Técnica Federico Santa María

En cada problema, debe **escoger solamente un ejercicio** para resolver, excepto en el Bonus (ver última página). Durante todo el Certamen denotamos por k un cuerpo algebraicamente cerrado, de característica arbitraria a menos que se especifíque lo contrario. Todas las variedades algebraicas están definidas sobre k y, tal como se mencionó en curso, las supondremos reducidas y separadas, pero no necesariamente irreducibles ni suaves.

1. **Categorías (10 pts).** Dar una definición rigurosa, usando la notación del curso, de una de las siguientes nociones y dar un ejemplo.
   (a) Ecualizador de morfismos.
   (b) Producto fibrado en una categoría.
   (c) Objeto inicial y objeto final.
   (d) 2-categoría.

2. **Prehaces y haces (10 pts).**
   (a) Sea G un grupo abeliano, y sea G (resp. $\underline{G}$) el prehaz de funciones constantes (resp. localmente constantes) en un espacio topológico X con valores en G. Probar que el morfismo de prehaces
   $$\varphi : G \longrightarrow \underline{G},$$
   que en cada abierto $U \subseteq X$ está dado por el morfismo $\varphi_U : G(U) \longrightarrow \underline{G}(U)$ que envía el elemento $g \in G(U) \stackrel{\text{def}}{=} G$ en la función (globalmente) constante $f : U \to G,\ x \mapsto f(x) = g$, es un isomorfismo para todo $U \subseteq X$ *abierto conexo.*
   (b) Sea $\mathscr{F}$ un prehaz de grupos abelianos en un espacio topológico X, y sea $\mathscr{F}^+$ su haz asociado. Probar que para todo $x \in X$ se tiene un isomorfismo de grupos abelianos $\mathscr{F}_x \cong \mathscr{F}_x^+$.
   (c) Sea $\mathscr{F}$ un haz de grupos abelianos en un espacio topológico X, y sea $s \in \Gamma(X, \mathscr{F})$ una sección global. Probar que el **soporte** de s, definido como
   $$\operatorname{Supp}(s) := \{x \in X \mid s_x \neq 0 \text{ en } \mathscr{F}_x\}$$
   es un subconjunto cerrado de X.
   (d) Sea $U \subseteq X$ un abierto de un espacio topológico X, y sea $0 \to \mathscr{F} \to \mathscr{G} \to \mathscr{H} \to 0$ una sucesión exacta de haces de grupos abelianos en X. Probar que la sucesión de grupos abelianos
   $$0 \to \Gamma(U, \mathscr{F}) \to \Gamma(U, \mathscr{G}) \to \Gamma(U, \mathscr{H})$$
   es exacta, y mostrar un ejemplo tal que $\Gamma(U, \mathscr{G}) \to \Gamma(U, \mathscr{H})$ **no** sea sobreyectivo.
   Indicación: Para el ejemplo, considerar la sucesión exponencial de Kodaira-Spencer.

3. **Espacios anillados y $\mathscr{O}_X$-módulos (10 pts).**
   (a) Sea $f : X \to Y$ una función continua entre espacios topológicos y sea $\mathscr{F}$ (resp. $\mathscr{G}$) un haz en X (resp. en Y). Probar que para todo $x \in X$ hay morfismos
   $$(f_*\mathscr{F})_{f(x)} \longrightarrow \mathscr{F}_x \qquad \text{y} \qquad (f^{-1}\mathscr{G})_x \longrightarrow \mathscr{G}_{f(x)},$$
   y que $(f^{-1}\mathscr{G})_x \xrightarrow{\sim} \mathscr{G}_{f(x)}$ es un isomorfismo.
   (b) Sea $(X, \mathscr{O}_X)$ un espacio anillado, $\mathscr{F}$ y $\mathscr{G}$ dos $\mathscr{O}_X$-módulos y sea $U \subseteq X$ un abierto. Entonces, $\mathscr{F}|_U$ y $\mathscr{G}|_U$ son $\mathscr{O}_U$-módulos. Probar que el prehaz de grupos abelianos
   $$U \longmapsto \operatorname{Hom}_{\mathscr{O}_U}(\mathscr{F}|_U, \mathscr{G}|_U)$$
   es un haz, que denotamos $\mathscr{H}\!om_{\mathscr{O}_X}(\mathscr{F}, \mathscr{G})$, y que es un $\mathscr{O}_X$-módulo.
   (c) Sea $(X, \mathscr{O}_X)$ un espacio anillado, $U \subseteq X$ un abierto no-vacío y $i : U \hookrightarrow X$ la inclusión. Dado $\mathscr{F}$ un $\mathscr{O}_U$-módulo, definimos el prehaz **extensión por cero** $i_!^{\text{pre}}\mathscr{F}$ en X mediante
   $$(i_!^{\text{pre}}\mathscr{F})(V) = \begin{cases} \{0\} & \text{si } V \not\subseteq U \\ \mathscr{F}(V) & \text{si } V \subseteq U \end{cases}$$
   Probar que el haz asociado $i_!\mathscr{F} := (i_!^{\text{pre}}\mathscr{F})^+$ es un $\mathscr{O}_X$-módulo y que para todo $x \in X$ se tiene que $(i_!\mathscr{F})_x = \mathscr{F}_x$ si $x \in U$ y $(i_!\mathscr{F})_x = \{0\}$ si $x \notin U$.

4. **Variedades algebraicas afines y morfismos regulares (10 pts).**

   (a) Consideremos la variedad algebraica afín
   $$X = \{(x, y, z) \in \mathbb{A}^3 \text{ tal que } y = x^2,\ z = x^3\}.$$
   Determinar el ideal $\mathcal{I}(X)$. ¿Es X irreducible?

   (b) Calcular el ideal de $S = \{(0, 0, 0), (0, 1, 0), (1, 0, 0)\}$ en $\mathbb{A}^3$.

   (c) Probar que la sub-variedad afín de $\mathbb{A}^3$ definida por las ecuaciones $X^2 = YZ$ y $XZ = X$ tiene 3 componentes irreducibles.

5. **Variedades algebraicas proyectivas (10 pts).**

   (a) Sea X una variedad algebraica proyectiva y supongamos que $f : X \hookrightarrow Y$ es una incrustación cerrada, donde Y es una variedad algebraica afín. Probar que $f(X)$ es un conjunto finito de puntos.

   (b) Probar que el grupo cociente
   $$\mathrm{PGL}_n(k) := \mathrm{GL}_n(k)/\mathbb{G}_m$$
   es una variedad algebraica afín, donde $\mathbb{G}_m \cong \{\lambda\, \mathrm{I}_n,\ \lambda \in k^*\}$ se identifica con el centro del grupo $\mathrm{GL}_n(k)$.

   (c) Supongamos que $\mathrm{car}(k) \neq 2$ y sea $\mathbb{P}^2 = \mathbb{P}(V)$ la proyectivización de $V \cong k^3$. Sea $C \subseteq \mathbb{P}^2$ una **cónica**, i.e., una hipersuperficie de $\mathbb{P}^2$ dada por un polinomio homogéneo $f \in k[X, Y, Z]$ de grado 2. Probar que, en una base conveniente de V, podemos suponer que
   $$C = \{[x, y, z] \in \mathbb{P}^2 \mid ax^2 + by^2 + cz^2 = 0\},$$
   para ciertos $a, b, c \in k$. Deducir que si $abc \neq 0$ entonces $C \cong \mathbb{P}^1$.

   (d) Consideremos la inscrustación de Veronese $\nu_3 : \mathbb{P}^1 \hookrightarrow \mathbb{P}^3,\ [x, y] \mapsto [x^3, x^2y, xy^2, y^3]$, y sea $C = \nu_3(\mathbb{P}^1)$ la cúbica torcida de $\mathbb{P}^3$. Sea
   $$I = \langle T_0T_3 - T_1T_2, T_1^2 - T_0T_2, T_2^2 - T_1T_3\rangle$$
   ideal homogéneo de $k[T_0, T_1, T_2, T_3]$. Probar que $C = V(I) \subseteq \mathbb{P}^3$.

6. **Atlas algebraicos, producto de variedades y separación (10 pts).**

   (a) Describir un atlas algebraico en $\mathbb{P}^3$ y deducir que es una variedad separada.

   (b) Describir un atlas algebraico en $\mathrm{Bl}_p(\mathbb{P}^2)$, donde $p = [0, 0, 1]$.

   (c) Sean $n, m \in \mathbb{N}^{\geq 1}$. Probar que el producto $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$ **no** es isomorfo a $\mathbb{P}^{n+m}$.

   (d) Sea X una variedad algebraica separada. Probar que todo abierto $U \subseteq X$ y todo cerrado $Y \subseteq X$ es una variedad algebraica separada.

7. **Componentes irreducibles y aplicaciones racionales (10 pts).**

   (a) Sea $f : \mathbb{P}^3 \dashrightarrow \mathbb{P}^3, [x_0, x_1, x_2, x_3] \mapsto [x_0x_3, x_1x_3, x_2x_3, x_0^2 - x_1x_2]$ aplicación racional. Determinar el dominio de definición $\mathrm{Dom}(f) \subseteq \mathbb{P}^3$, probar que $f \in \mathrm{Bir}(\mathbb{P}^3)$ y determinar $f^{-1} : \mathbb{P}^3 \dashrightarrow \mathbb{P}^3$.

   (b) Probar que la curva $C = \{(x, y) \in \mathbb{A}^2 \mid y^2 = x^3 - 1\}$ **no** es birracional a $\mathbb{A}^1$ (i.e., no es racional).
   Indicación: Suponer por contradicción que existe una aplicación birracional $\mathbb{A}^1 \dashrightarrow C,\ t \mapsto (x(t), y(t))$, donde $x(t) = p(t)/q(t),\ y(t) = r(t)/s(t)$, y donde $p, q, r, s \in k[t]$ cumplen $(p, q) = (r, s) = 1$.

   (c) Sea $f : \mathbb{P}^2 \dashrightarrow \mathbb{P}^4,\ [x, y, z] \mapsto [x^2, y^2, xy, xz, yz]$ aplicación racional definida en $U = \mathrm{Dom}(f) = \mathbb{P}^2 \setminus \{p\}$, donde $p = [0, 0, 1]$. Sea $X = \mathrm{Bl}_p(\mathbb{P}^2) \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{P}^2$ el blow-up de $\mathbb{P}^2$ en p. Probar que existe un morfismo regular[1] $g : X \to \mathbb{P}^4$ tal que el diagrama
   $$\begin{tikzcd} X \arrow[d, "\varepsilon"'] \arrow[dr, "g"] & \\ \mathbb{P}^2 \arrow[r, dotted, "f"'] & \mathbb{P}^4 \end{tikzcd}$$
   es conmutativo, i.e., $g = f \circ \varepsilon$.

8. **Dimensión y morfismos finitos (10 pts).**

   (a) Sea $f : X \to Y$ un morfismo entre variedades algebraicas. Probar que si $\dim(X) < \dim(Y)$ entonces f **no** es dominante.

[1] **Bonus (5 puntos)**: De hecho, se puede probar que $g : \mathrm{Bl}_p(\mathbb{P}^2) \hookrightarrow \mathbb{P}^4$ es un incrustamiento cerrado.

(b) Sea $X = \{(x, y) \in \mathbb{A}^3 \mid x^2 + y^2 = z^2\}$ y sea $f : X \to \mathbb{A}^2,\ (x, y, z) \mapsto (x, y)$ morfismo regular. Probar que f es un morfismo finito.

(c) Probar que la composición de morfismos finitos es un morfismo finito.

(d) Sea $X = V(I) \subseteq \mathbb{P}^n$ variedad algebraica proyectiva definida por el ideal homogéneo $I \subseteq k[X_0, \ldots, X_n]$, y sea $C(X) := V(I) \subseteq \mathbb{A}^{n+1}$ el **cono afín** asociado a X. Probar que $\dim(C(X)) = \dim(X) + 1$.

9. **Espacio tangente de Zariski (10 pts).**

(a) Consideremos la *cúbica nodal*

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{A}^2 \text{ tal que } y^2 = x^2(x + 1)\} \subseteq \mathbb{A}^2.$$

Calcular la transformada estricta $\widetilde{C}$ en $\mathrm{Bl}_p(\mathbb{A}^2)$, el blow-up de $\mathbb{A}^2$ en $p := (0, 0)$. Probar que $\widetilde{C}$ es una curva *suave*.

(b) Supongamos que $\mathrm{car}(k) \neq 2$. Sea $Q : k^{n+1} \to k$ una forma cuadrática no-nula, y sea

$$X = \{x \in \mathbb{P}^n \text{ tal que } Q(x) = 0\}$$

la hipersuperficie cuádrica asociada. Probar que X es suave si y sólo si Q es no-degenerada.

(c) Supongamos que $\mathrm{car}(k) = 0$. Sea

$$C_{a,b} = \{[x, y, z] \in \mathbb{P}^2 \text{ tal que } y^2 z = x^3 + axz^2 + bz^3\} \subseteq \mathbb{P}^2$$

cúbica plana, donde $a, b \in k$ constantes. Determinar un polinomio $\Delta(X, Y) \in k[X, Y]$ tal que $C_{a,b} \subseteq \mathbb{P}^2$ es suave si y sólo si $\Delta(a, b) \neq 0$.

(d) Sea G un grupo algebraico y sea X un **espacio homogéneo** respecto a G (i.e., X es una variedad algebraica dotada de una acción regular y transitiva $G \times X \to X,\ (g, x) \mapsto gx$). Probar que X es una variedad suave.

10. **Morfismos suaves, Teoremas de Bertini y Zariski (10 pts).**

(a) Sea X una variedad algebraica proyectiva normal e irreducible, y sea $C \subseteq X$ una curva algebraica irreducible. Probar que existe una curva algebraica **suave** $\widetilde{C}$ y un morfismo $f : \widetilde{C} \to X$ tal que $f(\widetilde{C}) = C$.

(b) Sea $X \subseteq \mathbb{P}^n$ una hipersuperficie irreducible de dimensión ≥ 2, definida por un polinomio homogéneo de grado $d \geq 1$, y sea $H \subseteq \mathbb{P}^n$ un hiperplano general. Probar que $X \cap H$ es irreducible.
Indicación: Dada la incrustación de Veronese $X \hookrightarrow \mathbb{P}^n \xhookrightarrow{\nu_d} \mathbb{P}^N$, probar que cada hiperplano $H \subseteq \mathbb{P}^n$ define un hiperplano $H' \subseteq \mathbb{P}^N$ tal que $X \cap H \cong \nu_d(X) \cap H'$. Aplicar el teorema de Bertini a $\nu_d(X)$.

(c) Dar un ejemplo de un morfismo $f : \mathbb{A}^1 \setminus \{0\} \to \mathbb{A}^1 \setminus \{0\}$ que sea étale pero cuyas fibras **no** sean irreducibles.

(d) Sean X e Y variedades algebraicas suaves e irreducibles. Probar que las proyecciones canónicas

$$\mathrm{pr}_X : X \times Y \longrightarrow X \text{ y } \mathrm{pr}_Y : X \times Y \longrightarrow Y$$

son morfismos suaves.

Bonus (30 puntos): El objetivo de este problema es estudiar más profundamente hipersuperficies del espacio proyectivo. Supongamos que $\mathrm{car}(k) = 0$ y sea $d \in \mathbb{N}^{\geq 2}$.

Sea $V = k[X_0, \ldots, X_n]_d$ el k-espacio vectorial de polinomios homogéneos de grado d en las variables $X_0, \ldots, X_n$, y consideremos la proyectivización $\mathbb{P}^N \cong \mathbb{P}(V)$, donde $N = \binom{n+d}{d} - 1$. Dado que $V(f) = V(\lambda f) \subseteq \mathbb{P}^n$ para todos $f \in V \setminus \{0\}$ y $\lambda \in k^\times$, tenemos que los puntos de $\mathbb{P}^N$ parametrizan hipersuperficies de grado d en $\mathbb{P}^n$. Por abuso de notación, denotaremos por $[X] \in \mathbb{P}^N$ al punto $[f]$ de $\mathbb{P}(V)$ que corresponde a la hipersuperficie $X = V(f) \subseteq \mathbb{P}^n$.

(i) Consideremos la sub-variedad de incidencia, cerrada[2] en $\mathbb{P}^N \times \mathbb{G}(r,n)$, dada por

$$I = \{([X], [\Lambda]) \in \mathbb{P}^N \times \mathbb{G}(r,n) \mid \Lambda \subseteq X\}.$$

Probar que I es irreducible y determinar su dimensión.
Indicación: Probar que la fibra $\mathrm{pr}_2^{-1}([\Lambda]) \subseteq \mathbb{P}^N$ *es un subespacio lineal y determinar su dimensión. Notar que, módulo cambio de coordenadas, se puede suponer que* $\Lambda = \{x_0 = \ldots = x_{n-r-1} = 0\} \subseteq \mathbb{P}^n$.

(ii) Deducir que si $\delta := (r+1)(n-r) - \binom{d+r}{r} < 0$, entonces una hipersuperficie general de grado d en $\mathbb{P}^n$ no contiene subespacios lineales $\Lambda \cong \mathbb{P}^r$ de dimensión r. En particular, una superficie general de grado ≥ 4 en $\mathbb{P}^3$ no contiene rectas.
Indicación: Considerar la fibra $F_r(X) := \mathrm{pr}_1^{-1}([X]) = \{[\Lambda] \in \mathbb{G}(r,n) \mid \Lambda \subseteq X\} \subseteq \mathbb{G}(r,n)$.

(iii) Consideremos la sub-variedad de incidencia, cerrada[3] en $\mathbb{P}^N \times \mathbb{P}^n$, dada por

$$J = \{([X], x) \in \mathbb{P}^N \times \mathbb{P}^n \mid x \in X_{\mathrm{sing}}\},$$

y donde $\pi := \mathrm{pr}_1 : J \to \mathbb{P}^N$ y $\sigma := \mathrm{pr}_2 : J \to \mathbb{P}^n$ son las dos proyecciones. Probar que $\sigma^{-1}(x) \cong \mathbb{P}^{N-n-1}$ para todo $x \in \mathbb{P}^n$, y deducir que que J es irreducible de dimensión $\dim(J) = N - 1$.
Indicación: Utilizar el criterio Jacobiano para deducir que $\sigma^{-1}(x)$ *está dada por* $n+1$ *ecuaciones lineales independientes en* $\mathbb{P}^N$*. Notar que, módulo cambio de coordenadas, se puede suponer* $x = [1, 0, \ldots, 0]$.

(iv) Con la notación del punto (iii), sea $Z := \pi(J) \subseteq \mathbb{P}^N$. Probar que si $\dim(Z) < N - 1$ entonces toda hipersuperficie singular de grado d en $\mathbb{P}^n$ tiene infinitos puntos singulares.

(v) Sea $Y = V(g) \subseteq \mathbb{P}^{n-1}$ hipersuperficie suave en $\mathbb{P}^{n-1}$ dada por el polinomio homogéneo $g \in k[X_1, \ldots, X_n]$, y consideremos el **cono proyectivo** $\mathscr{C}(Y) := V(g) \subseteq \mathbb{P}^n$, obtenido al considerar $g \in k[X_0, \ldots, X_n]$. Probar que $\mathscr{C}(Y)$ es una hipersuperficie de grado d en $\mathbb{P}^n$ con un único punto singular en $p = [1, 0, \ldots, 0]$, y deducir que necesariamente $\dim(Z) = N - 1$.

(vi) Deducir que el conjunto de hipersuperficies singulares de grado d de $\mathbb{P}^n$ está parametrizado por una hipersuperficie irreducible $\Delta \subseteq \mathbb{P}^{N-1}$.

[2] Puede usarse directamente, sin demostración, el hecho que I es cerrada.
[3] Puede usarse directamente, sin demostración, el hecho que J es cerrada.