Ayudantía 9 (MAT426 2021-2)

Carlos A. Ajila Loayza

Instituto de Matemática, Universidad de Talca

1. Ejercicios de clases

$\boxed{1}$ (Ejercicio 3.7.13) Sea X una variedad algebraica proyectiva suave e irreducible de $\dim(X) \geq 1$.

(1) Probar que si $L \cong \mathscr{O}_X(D) \in \mathrm{Pic}(X)$ es un fibrado en rectas amplio, entonces

$$H^0(X, \mathscr{O}_X(-mD)) = 0 \quad \text{para todo } m \geq 1.$$

(2) Utilizar (1) para probar que si X es una variedad de Fano, entonces $P_m(X) = 0$ para todo $m \geq 1$.

(3) Probar que $P_m(X) = 1$ para todo $m \geq$ si X es de Calabi-Yau.

Solución

(1) Empezaremos probando el siguiente resultado:

Lema 1.1. (Ejercicio 3.3.15.) *Sean $L, M \in \mathrm{Pic}(X)$ fibrados en rectas sobre una variedad algebraica X. Si L es muy amplio y M es globalmente generado, entonces $L \otimes M$ es muy amplio.*

Demostración. Consideremos los morfismos asociados a L y M,

$$\varphi_L : X \to \mathbb{P}(H^0(X, L)^\vee) \cong \mathbb{P}^n \quad \text{y} \quad \varphi_M : X \to \mathbb{P}(H^0(X, M)^\vee) \cong \mathbb{P}^m,$$

respectivamente. Más precisamente, sea $\{s_0, \ldots, s_n\}$ una base de $H^0(X, L)$ y $\{t_0, \ldots, t_m\}$ una base de $H^0(X, M)$. Entonces

$$\varphi_L(x) = [s_0(x), \ldots, s_n(x)] \quad \text{y} \quad \varphi_M(x) = [t_0(x), \ldots, t_m(x)].$$

Notemos que entonces el conjunto $\{s_i \otimes t_j\}_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m}$ es una base de $H^0(X, L \otimes M)$ y por ende tenemos que

$$\varphi_{L\otimes M}(x) = [s_0(x)t_0(x), s_0(x)t_1(x), \ldots, s_n(x)t_m(x)].$$

Sea

$$\Delta : X \to X \times X, \quad x \mapsto (x, x)$$

el morfismo diagonal. Dado que X es separada, se tiene que Δ es una incrustación cerrada. Denotemos por

$$\psi : \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m \to \mathbb{P}^N,$$

con $N = nm + n + m$, a la incrustación de Segre, que sabemos que es una incrustación cerrada. Finalmente, sea

$$\varphi_L \times \varphi_M : X \times X \to \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m, \quad (x, y) \mapsto (\varphi_L(x), \varphi_M(y))$$

Podemos probar que $\varphi_L \times \varphi_M$ es un morfismo regular de manera muy elegante: Sean $\pi_1 : X \times X \to X$ y $\pi_2 : X \times X \to X$ las proyecciones en la primera y segunda componente, respectivamente, entonces las composiciones

$$\varphi_L \circ \pi_1 : X \times X \to \mathbb{P}^n, \quad \varphi_M \circ \pi_2 : X \times X \to \mathbb{P}^m$$

son morfismos regulares, y por la propiedad universal del producto inducen un morfismo regular

$$X \times X \to \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m,$$

que coincide precisamente con $\varphi_L \times \varphi_M$, lo que prueba que este es un morfismo regular. Si $G \subseteq X \times X$ es cerrado, entonces G es una (sub)variedad proyectiva (de $X \times X$) y por ende $\varphi_L \times \varphi_M(G)$ es cerrado en $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$, lo que prueba que $\varphi_L \times \varphi_M$ es un morfismo cerrado. Veamos que $(\varphi_L \times \varphi_M) \circ \Delta : X \to \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$ es una incrustación cerrada, para lo cual basta notar una inversa sobre la imagen de este morfismo está dada por

$$\mathrm{Im}((\varphi_L \times \varphi_M) \circ \Delta) \to X, \quad (x, y) \mapsto \varphi_L^{-1}(x),$$

la misma que es un morfismo regular pues es la composición $\varphi_L^{-1} \circ \pi_1$, que es composición de morfismos regulares, pues φ_L es una incrustación cerrada.

Finalmente, notemos que

$$\begin{aligned}
\psi \circ (\varphi_L \times \varphi_M) \circ \Delta(x) &= \psi([s_0(x), \ldots, s_n(x)], [t_0(x), \ldots, t_m(x)]) \\
&= [s_0(x)t_0(x), s_0(x)t_1(x), \ldots, s_n(x)t_m(x)] \\
&= \varphi_{L\otimes M}(x),
\end{aligned}$$

lo que prueba que $\varphi_{L\otimes M}$ es una incrustación cerrada y por ende que $L \otimes M$ es muy amplio. $\square$

En particular, si L y M son muy amplios, tenemos que $L\otimes M$ es muy amplio. Así, un argumento inductivo muestra que si L es muy amplio, entonces para todo $n\geq 1$ se tiene que $L^{\otimes n}$ es muy amplio. En particular, si $L\cong \mathscr{O}_X(D)\in \operatorname{Pic}(X)$ es muy amplio, tenemos que $\mathscr{O}_X(mD)$ es muy amplio para todo $m\geq 1$.
Teniendo esto en cuenta, consideramos las hipótesis del ejercicio. Si $L\cong \mathscr{O}_X(D)$ es amplio, existe $m_0\geq 1$ tal que $L^{\otimes m_0}\cong \mathscr{O}_X(m_0D)$ es muy amplio, y el análisis precedente nos permite concluir que $\mathscr{O}_X(mm_0D)$ es muy amplio para todo $m\geq 1$.

Observación 1.2. Es posible probar que $\mathscr{O}_X(mm_0D)$ es muy amplio para todo $m\geq 1$ de una manera distinta[1]: Como $L^{\otimes m_0}\mathscr{O}_X(m_0D)$ es muy amplio, el morfismo

$$\varphi_{L^{\otimes m_0}}: X\to \mathbb{P}^n$$

es una incrustación cerrada. Si denotamos por

$$\nu_m:\mathbb{P}^n\to\mathbb{P}^N$$

a la incrustación de Veronese, donde $N=\binom{n+m_0}{m_0}-1$, obtenemos una incrustación cerrada

$$\nu_m\circ\varphi_{L^{\otimes m_0}}: X\to \mathbb{P}^N,$$

y si $\{s_0,\dots,s_n\}$ es una base de $H^0(X,L^{\otimes m_0})$, entonces $\{s_{i_1}^{\otimes r_1}\otimes\cdots\otimes s_{i_\ell}^{\otimes r_\ell}\,|\,0\leq \ell\leq n, r_1+\cdots+r_\ell=m\}$, es una base para $H^0(X,L^{\otimes mm_0})$ y tenemos que

$$\begin{aligned}\nu_m\circ\varphi_{L^{\otimes m_0}}(x)&=\nu_m([s_0(x),\dots,s_n(x)])\\&=[s_0(x)^m, s_0(x)^{m-1}(x)s_1(x),\dots,s_n(x)^m]\\&=\varphi_{L^{\otimes mm_0}}(x),\end{aligned}$$

lo que prueba que $\varphi_{L^{\otimes mm_0}}$ es una incrustación cerrada, y por ende que $\mathscr{O}_X(mm_0D)$ es muy amplio para todo $m\geq 1$. ////

En particular, como $\dim(X)\geq 1$ esto implica que $H^0(X,\mathscr{O}_X(mm_0D))\neq 0$, para todo $m\geq 1$. Supongamos, por reducción al absurdo, que $H^0(X,\mathscr{O}_X(-mD))\neq 0$ para cierto $m\geq 1$, entonces si $s\in H^0(X,\mathscr{O}_X(-mD))\neq 0$, tenemos que $0\neq s^{\otimes m_0}\in H^0(X,\mathscr{O}_X(-mm_0D))$, lo que implica que

$$H^0(X,\mathscr{O}_X(-mm_0D))=H^0(X,\mathscr{O}_X(mm_0D)^\vee)\neq 0$$

y por ende $\mathscr{O}_X(mm_0D)$ debe ser el fibrado en rectas trivial, $\mathscr{O}_X(mm_0D)\cong\mathscr{O}_X$. Pero entonces

$$H^0(X,\mathscr{O}_X(mm_0D))\cong k.$$

Luego, dado que mm_0D es muy amplio, tenemos la incrustación cerrada

$$\varphi_{\mathscr{O}_X(mm_0D)}: X\to \mathbb{P}(H^0(X,\mathscr{O}_X(mm_0D))^\vee)=\mathbb{P}(k^*)=\{\mathrm{pt}\},$$

lo que implica que $\dim(X)=0$, y eso contradice que $\dim(X)\geq 1$. Esta contradicción se produce pues supusimos que $H^0(X,\mathscr{O}_X(mD))\neq 0$ para cierto $m\geq 1$. Por lo tanto, concluimos que

$$H^0(X,\mathscr{O}_X(mD))=0\quad\text{para todo } m\geq 1.$$

(2) Dado que en este caso $\omega_X^\vee=\mathscr{O}_X(-K_X)$ es amplio, el resultado anterior implica que

$$H^0(X,\omega_X^{\otimes m})=0,\quad \text{para todo } m\geq 1,$$

de donde

$$P_m(X)=\dim_k H^0(X,\omega_X^{\otimes m})=0$$

para todo $m\geq 1$.

(3) En este caso tenemos que $\omega_X^{\otimes m}\cong\mathscr{O}_X$ para todo $m\geq 1$ y por ende

$$P_m(X)=\dim_k H^0(X,\mathscr{O}_X)=\dim_k k=1,$$

para todo $m\geq 1$.

[1]Agradezco a Pedro Montero por explicarme este camino.

$\boxed{2}$ Mostrar que el axioma (3) en la Definición 4.3.1. del Apunte puede debilitarse de cualquiera de las siguientes formas:

(3') Para cada par de objetos A_1, A_2 en $\mathscr{C}$, existe su producto $A_1 \times A_2$ con los respectivos morfismos de proyección $p_j : A_1 \times A_2 \to A_j$, $j = 1, 2$.

(3") Para cada par de objetos A_1, A_2 en $\mathscr{C}$, existe su coproducto $A_1 \oplus A_2$ con los respectivos morfismos de inclusión $\iota_j : A_j \to A_1 \oplus A_2$, $j = 1, 2$.

Más precisamente, muestre que (3), (3') y (3") son equivalentes bajo los axiomas (1) y (2).

Solución.
Es claro que el axioma (3) implica a los axiomas (3') y (3").
Asumamos el axioma (3') y sean A_1, A_2 objetos en la categoría $\mathscr{C}$ y consideremos el diagrama de producto

$$A_1 \xleftarrow{p_1} A_1 \times A_2 \xrightarrow{p_2} A_2$$

Ahora, consideremos el par de morfismos $1_{A_1} : A_1 \to A_1$ y $0 : A_1 \to A_2$. La propiedad universal del producto nos provee de un único morfismo $\iota_1 : A_1 \to A_1 \times A_2$ tales que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
A_1 & A_1 \times A_2 \arrow[l, "p_1"'] \arrow[r, "p_2"] & A_2 \\
& A_1 \arrow[ul, "1_{A_1}"] \arrow[u, dashed, "\iota_1"] \arrow[ur, "0"'] &
\end{tikzcd}$$

De manera análoga, existe un único morfismo $\iota_2 : A_2 \to A_1 \times A_2$ tal que el diagrama

$$\begin{tikzcd}
A_1 & A_1 \times A_2 \arrow[l, "p_1"'] \arrow[r, "p_2"] & A_2 \\
& A_1 \arrow[ul, "0"] \arrow[u, dashed, "\iota_2"] \arrow[ur, "1_{A_2}"'] &
\end{tikzcd}$$

conmuta.
Notemos que tenemos

$$p_1 \circ (\iota_1 \circ p_1 + \iota_2 \circ p_2) = (p_1 \circ \iota_1) \circ p_1 + (p_1 \circ \iota_2) \circ p_2 = 1_{A_1} \circ p_1 + 0 \circ p_2 = p_1$$

y similarmente $p_2 \circ (\iota_1 \circ p_1 + \iota_2 \circ p_2) = p_2$, de modo que el siguiente diagrama conmuta (con $u = \iota_1 \circ p_1 + \iota_2 \circ p_2$)

$$\begin{tikzcd}
A_1 & A_1 \times A_2 \arrow[l, "p_1"'] \arrow[r, "p_2"] & A_2 \\
& A_1 \times A_2 \arrow[ul, "p_1"] \arrow[u, "u"] \arrow[ur, "p_2"'] &
\end{tikzcd}$$

pero la identidad $1_{A_1 \times A_2} : A_1 \times A_2 \to A_1 \times A_2$ también hace conmutar al diagrama, y por la parte de unicidad en propiedad universal del producto, tenemos que

$$\iota_1 \circ p_1 + \iota_2 \circ p_2 = 1_{A_1 \times A_2} \tag{1}$$

Con esto, probaremos que el diagrama

$$A_1 \xrightarrow{\iota_1} A_1 \times A_2 \xleftarrow{\iota_2} A_2$$

es un coproducto en la categoría $\mathscr{C}$. Para ello sean $f_j : A_j \to B$, $j = 1, 2$ morfismos tales que el diagrama

$$\begin{tikzcd}
A_1 \arrow[r, "\iota_1"] \arrow[dr, "f_1"'] & A_1 \times A_2 & A_2 \arrow[l, "\iota_2"'] \arrow[dl, "f_2"] \\
& B &
\end{tikzcd}$$

conmuta. Entonces tenemos los morfismos $f_j \circ p_j \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A_1 \times A_2, B)$. Este conjunto es un grupo abeliano, de modo que podemos considerar el morfismo

$$f = f_1 \circ p_1 + f_2 \circ p_2 : A_1 \times A_2 \to B,$$

y por la bilinealidad de la composición tenemos que

$$f \circ \iota_1 = f_1 \circ (p_1 \circ \iota_1) + f_2 \circ (p_2 \circ \iota_1) = f_1 \circ 1_{A_1} + f_2 \circ 0 = f_1.$$

De manera similar tenemos que $f \circ \iota_2 = f_2$. Es decir, el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} A_1 \arrow[r, "\iota_1"] \arrow[dr, "f_1"'] & A_1 \times A_2 \arrow[d, dashed, "f"] & A_2 \arrow[l, "\iota_2"'] \arrow[dl, "f_2"] \\ & B & \end{tikzcd}$$

Aún nos queda probar que f es única. Para ello supongamos que existe otro morfismo $h : A_1 \times A_2 \to B$ tal que $h \circ \iota_j = f_j$, $j = 1, 2$. Luego gracias a (1) tenemos que

$$h = h \circ 1_{A_1 \times A_2} = h \circ (\iota_1 \circ p_1 + \iota_2 \circ p_2) = (h \circ \iota_1) \circ p_1 + (h \circ \iota_2) \circ p_2 = f_1 \circ p_1 + f_2 \circ p_2 = f,$$

lo que completa la demostración. Así tenemos que el mismo objeto $A_1 \times A_2$ sirve de coproducto y producto en esta categoría, lo que implica (3) y (3").
La demostración de que (3") implica (3) y (3') es completamente análoga.

$\boxed{3}$ Demuestre que el axioma (4) en la definición de categoría abeliana es equivalente al siguiente axioma:

(4') Todo monomorfismo es el kernel de algún morfismo y todo epimorfismo es el cokernel de algún epimorfismo.

Más aún, pruebe que ambos axiomas son equivalentes al siguiente:

(4") Todo monomorfismo es el kernel de su cokernel y todo epimorfismo es el cokernel de su kernel.

Solución.
Iniciemos probando que (4') y (4") son equivalentes. Claramente (4") implica (4'). Supongamos entonces que se satisface el axioma (4') y sea $f : A \to B$ un monomorfismo. Sea $q : B \to C$ su cokernel. Por hipótesis, existe un homomorfismo $g : B \to D$ tal que $f = \ker(g)$, es decir, $g \circ f = 0$ y f es universal con respecto a esta propiedad, en el sentido de que si $h : A' \to B$ es cualquier morfismo con $g \circ h = 0$, existe un único morfismo $h' : A' \to A$ tal que el diagrama

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] & B \arrow[r, shift left, "g"] \arrow[r, shift right, "0"'] & D \\ A' \arrow[u, dashed, "h'"] \arrow[ur, "h"'] & & \end{tikzcd}$$

conmuta[2]. Ahora, por la propiedad universal del cokernel, existe un único morfismo $g' : C \to D$ tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} & & C \arrow[d, dashed, "g'"] \\ A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "0"'] & B \arrow[ur, "q"] \arrow[r, "g"'] & D \end{tikzcd}$$

Probaremos con esto que f es el kernel de q. Para ello, sea $h : A' \to B$ un morfismo tal que $q \circ h = 0$, entonces

$$g \circ h = g' \circ q \circ h = g' \circ 0 = 0,$$

y dado que f es el núcleo de g, tenemos que existe un único morfismo $h' : A' \to A$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} & & C \arrow[d, dashed, "g'"] \\ A \arrow[r, "f"] & B \arrow[ur, shift left, "q"] \arrow[ur, shift right, "0"'] \arrow[r, "g"'] & D \\ A' \arrow[u, dashed, "h'"] \arrow[ur, "h"'] & & \end{tikzcd}$$

[2]El núcleo es un caso particular del concepto de *ecualizador*: Dados dos morfismos $f, g : A \to B$ en una categoría, un ecualizador es un morfismo $e : E \to A$ que verifica $f \circ e = g \circ e$ y que es universal con respecto a esta propiedad, en el sentido de que si $h : H \to A$ es otro morfismo tal que $f \circ h = g \circ h$, entonces exise un único morfismo $h' : H \to E$ tal que el diagrama

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "e"] & A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & B \\ H \arrow[u, dashed, "h'"] \arrow[ur, "h"'] & & \end{tikzcd}$$

conmuta. Un *coecualizador* se obtiene dualizando la definición de ecualizador, y el cokernel es un ejemplo de este último.

Esto prueba lo deseado. Así, todo monomorfismo es el kernel de su cokernel. La demostración de que todo epimorfismo es el cokernel de su kernel es similar.

Ahora, probaremos que (4) es equivalente a (4'). Primero supongamos que para todo morfismo $f : A \to B$ el homomorfismo inducido $f' : \mathrm{Coim}(f) \to \mathrm{Im}(f)$ es un isomorfismo. Es importante entender cómo se construye este homomorfismo inducido, por lo que repetimos la construcción aquí: Sea $i : K \to A$ el núcleo de f y $q : B \to C$ el cokernel de f. Sea $p : A \to \mathrm{Coim}(f)$ el cokernel de i y sea $j : \mathrm{Im}(f) \to B$ el kernel de q. Como $f \circ i = 0$, la propiedad universal del cokernel p implica que existe un único homomorfismo $h : \mathrm{Coim}(f) \to B$ tal que $h \circ p = f$, es decir, el diagrama siguiente conmuta:

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r, "i"] & A \arrow[rrr, "f"] \arrow[dr, "p"'] & & & B \arrow[r, "q"] & C \\ & & \mathrm{Coim}(f) \arrow[urr, dashed, "h"] & \mathrm{Im}(f) \arrow[ur, "j"'] & & \end{tikzcd}$$

Notemos que $q \circ h \circ p = q \circ f = 0$ y como p es un cokernel, es un epimorfismo[3], de donde $q \circ h = 0$ y por la propiedad universal del kernel aplicada a j, existe un único morfismo $f' : \mathrm{Coim}(f) \to \mathrm{Im}(f)$ tal que $j \circ f' = q \circ h$. Luego

$$j \circ f' \circ p = h \circ p = f,$$

es decir, tenemos que el diagrama

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r, "i"] & A \arrow[rrr, "f"] \arrow[dr, "p"'] & & & B \arrow[r, "q"] & C \\ & & \mathrm{Coim}(f) \arrow[r, "f'"'] & \mathrm{Im}(f) \arrow[ur, "j"'] & & \end{tikzcd}$$

conmuta. Nuestra hipótesis es que f' es un isomorfismo.

Sea $f : A \to B$ un monomorfismo, entonces su kernel es $K = 0 \xrightarrow{0} A$. En efecto, claramente $f \circ 0 = 0$ y si $g : C \to A$ es tal que $f \circ g = 0$, como f es monomorfismo tenemos que $g = 0$, de modo que g se factoriza a través del 0 (análogamente, si f es un epimorfismo, su cokernel es 0). Veamos entonces que $\mathrm{Coim}(f) = A$. En efecto, es claro que $1_A \circ 0 = 0$. Si $g : A \to D$ es algún morfismo tal que $g \circ 0 = 0$ (es decir, cualquier morfismo) entonces g es el único morfismo tal que $g \circ 1_A = g$, de modo que $1_A : A \to A$ verifica la propiedad universal del cokernel para $0 \to A$, es decir, $\mathrm{Coim}(f) = A$. Se sigue que $f' : A \to \mathrm{Im}(f)$ es un isomorfismo. Entonces tenemos que $f = j \circ f'$ y como f' es un isomorfismo y j es un núcleo de q, se sigue que f es un núcleo de q.

Análogamente se prueba que si f es un epimorfismo, este es el cokernel de su kernel. Esto prueba (4").

Reíprocamente, supongamos (4") y sea $f : A \to B$ un morfismo. Manteniendo la notación anterior probaremos que f' es un monomorfismo y un epimorfismo.

Para esto, probaremos que $f' \circ p$ es un epimorfismo y que $j \circ f$ es un monomorfismo. Sea $g : \mathrm{Im}(f) \to D$ un morfismo tal que $g \circ f' \circ p = 0$. Sea $\ell : \ker(g) \to \mathrm{Im}(f)$ el kernel de g, entonces por la propiedad universal del núcleo, existe un único morfismo $\ell' : A \to \ker(g)$ tal que el diagrama siguiente conmuta:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "f' \circ p"'] \arrow[dd, dashed, "\ell'"'] & & B \\ & \mathrm{Im}(f) \arrow[ur, "j"'] \arrow[dr, "g"] & \\ \ker(g) \arrow[ur, "\ell"'] & & D \end{tikzcd}$$

Luego, $j \circ \ell$ es un monomorfismo por ser composición de monomorfismos, de modo que existe un morfismo $x : B \to X$ tal que $j \circ \ell = \ker(x)$, y tenemos que

$$x \circ f = x \circ j \circ (f' \circ p) = x \circ j \circ \ell \circ \ell' = 0 \circ \ell' = 0,$$

de este modo, como $q : B \to C$ es el cokernel de f, la propiedad universal del cokernel implica que existe un único morfismo $u : C \to X$ tal que $u \circ q = x$. Entonces tenemos

$$x \circ j = u \circ q \circ j = u \circ 0 = 0,$$

[3]Si $q : B \to C$ es un cokernel de $f : A \to B$, y tenemos que $k \circ q = \ell \circ q$ para ciertos $k, \ell : C \to D$, entonces por la propiedad universal del cokernel tenemos que existe un único $r : C \to D$ tal que $k \circ q = r \circ q = \ell \circ q$. Dado que k y ℓ verifican la misma propiedad que r, se sigue por unicidad que $k = \ell = r$ y así q es un epimorfismo. De manera similar se prueba que todo kernel es un monomorfismo.

y dado que $j \circ \ell$ es el núcleo de x, existe un único morfismo $y : \mathrm{Im}(f) \to \ker(g)$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} \ker(g) \arrow[r, "j\circ\ell"] & B \arrow[r, "x"] & X \\ & \mathrm{Im}(f) \arrow[ul, dashed, "y"] \arrow[u, "j"] \arrow[ur, "0"'] & \end{tikzcd}$$

De aquí $j \circ \ell \circ y = j = j \circ 1_{\mathrm{Im}(f)}$, de donde, como j es monomorfismo, se sique que $\ell \circ y = 1_{\mathrm{Im}(f)}$ y por ende ℓ es un epimorfismo. Dado que $g \circ \ell = 0$ se sigue que $g = 0$, lo que prueba que $f' \circ p$ es un epimorfismo.
De manera completamente análoga se prueba que $j \circ f'$ es un monomorfismo.
Con esto a la mano, notemos que Como $f' \circ p$ es un epimorfismo entonces también lo es f': Si $g : B \to D$ es un morfismo tal que $g \circ f' = 0$, entonces $g \circ f' \circ p = 0$ y por ende $g = 0$. Similarmente, como $j \circ f'$ es un monomorfismo, también lo es f'. Se sigue que f' es un monomorfismo y un epimorfismo.
Entonces la conclusión es consecuencia del siguiente

Lema 1.3. *Un morfismo en una categoría aditiva que verifica (4') (o, equivalentemente (4")) es un isomorfismo si y sólo si es un monomorfismo y un epimorfismo.*

Demostración. Sea $f : A \to B$ un isomorfismo. Entonces claramente f es mono y epi. Recíprocamente, supongamos que $f : A \to B$ es mono y epi. Entonces existe un morfismo $x : B \to X$ tal que $f = \ker(x)$, de donde $x \circ f = 0 = 0 \circ f$ y como f es epimorfismo, esto implica que $x = 0$. Así $f = \ker(0)$, con $0 : B \to 0$. Pero es claro que $1_B : B \to B$ es un núcleo de $B \to 0$ y dado que el núcleo es único salvo isomorfismo, se sigue que $f \circ g = 1_B$ para un único isomorfismo $g : B \to A$. De manera similar se construye $h : B \to A$ tal que $h \circ f = 1_A$ y entonces

$$h = h \circ 1_B = h \circ f \circ g = 1_A \circ g = g,$$

de donde g es una inversa de f y por ende f es un isomorfismo. □

2. Discusión: Variedades de carcaj

En esta discusión, presentaremos una breve introducción a las variedades de carcaj, que son espacios moduli de representaciones de carcajes.

2.1. Carcajes y sus representaciones

Definición 2.1. Un *carcaj* (*quiver* en inglés) es un cuadrupla ordenado $Q = (Q_0, Q_1, s, t)$ donde Q_0 y Q_1 son conjuntos y $s, t : Q_1 \to Q_0$ son dos funciones llamadas *salida* (o *source* en inglés) y *llegada* (*target*). Los elementos del conjunto Q_0 se llaman *vértices* y los elementos de Q_1 se llaman *aristas*. Si x es una arista, decimos que x es una *arista de* $s(x)$ *hacia* $t(x)$, o que x *inicia* en $s(x)$ y *termina* en $t(x)$. Cuando es claro para el contexto, diremos simplemente que $Q = (Q_0, Q_1)$ es un carcaj o que Q es un carcaj.
Si $p, q \in Q_0$, definimos el conjunto de aristas entre p y q como

$$Q(p, q) := \{x \in Q_1 \mid s(x) = p \text{ y } t(x) = q\}.$$

Un carcaj se dice *finito* si Q_0 y Q_1 son finitos.
Un *subcarcaj* de Q es un carcaj $Q' = (Q'_0, Q'_1, s', t')$ tal que $Q'_i \subseteq Q_i$, $i = 1, 2$ y tal las funciones de salida y llegada verifican $s' = s|_{Q'_1}$ y $t' = t|_{Q'_2}$.
Dados dos carcajes $Q = (Q_0, Q_1, s, t)$ y $Q' = (Q'_0, Q'_1, s', t')$, un *morfismo de carcajes* $\varphi : Q \to Q'$ está dado por un par de funciones $\varphi = (\varphi_0, \varphi_1)$ donde $\varphi_0 : Q_0 \to Q'_0$, $\varphi_1 : Q_1 \to Q'_1$ son tales que los siguientes diagramas conmutan:

$$\begin{tikzcd} Q_1 \arrow[r, "\varphi_1"] \arrow[d, "s"'] & Q'_1 \arrow[d, "s'"] \\ Q_0 \arrow[r, "\varphi_0"'] & Q'_0 \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} Q_1 \arrow[r, "\varphi_1"] \arrow[d, "t"'] & Q'_1 \arrow[d, "t'"] \\ Q_0 \arrow[r, "\varphi_0"'] & Q'_0 \end{tikzcd}$$

Usualmente denotaremos tanto a φ_0 como a φ_1 por φ.
Dados dos morfismos $\varphi = (\varphi_0, \varphi_1) : Q \to Q'$ y $\psi = (\psi_0, \psi_1) : Q' \to Q''$, definimos su composición $\psi \circ \varphi$ mediante

$$\psi \circ \varphi(\psi_0 \circ \varphi_0, \psi_1 \circ \varphi_1) : Q \to Q''.$$

Es claro que $\psi \circ \varphi$ es un morfismo de carcajes. Si Q es un carcaj, definimos $1_Q = (\mathrm{id}_{Q_0}, \mathrm{id}_{Q_1})$. Con esto, vemos que existe una *categoría de carcajes* cuyos objetos son carcajes, sus morfismos son morfismos de carcajes y donde la composición está definida como arriba. Denotamos a esta categoría mediante **Quiv**.

Observación 2.2. —

1. Podemos definir un subcarcaj de un carcaj $Q = (Q_0, Q_1, s, t)$ de manera equivalente como un carcaj $Q' = (Q'_0, Q'_1, s', t')$ tal que $Q'_i \subseteq Q_i$, $i = 1, 2$ de modo que el par de inclusiones $\iota = (\iota_0, \iota_1)$, con $\iota_i : Q'_i \to Q_i$ es un morfismo de carcajes $Q' \to Q$.

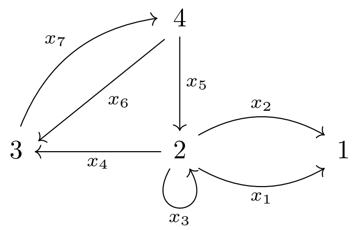
2. Si $\varphi : Q \to Q'$ es un morfismo de carcajes, para todo par de vértices p, q en Q obtenemos una aplicación inducida
$$\varphi : Q(p,q) \to Q'(\varphi(p), \varphi(q)), \quad x \mapsto \varphi(x).$$

Un carcaj $Q = (Q_0, Q_1)$ se representa gráficamente a través de un multidigrafo Γ como sigue: Los vértices de Γ son los vértices de Q, es decir, Q_0. Dados dos vértices p y q, dibujamos $|Q(p,q)|$ aristas dirigidas de p hacia q.

Ejemplo 2.3. Consideremos $Q_0 = \{1, 2, 3, 4\}$ y $Q_1 = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7\}$. Entonces definimos las funciones $s, t : Q_1 \to Q_0$ mediante la siguiente tabla:

x	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
$s(x)$	2	2	2	2	4	4	3
$t(x)$	1	1	2	3	2	3	4

y gráficamente este carcaj luce como sigue.



Definición 2.4. Dados dos vértices p, q en un carcaj Q, un *camino* de p a q es una sucesión $(x_1, \ldots, x_r)$ de aristas tales que
$$s(x_1) = p, \quad t(x_r) = q \quad \text{y} \quad s(x_i) = t(x_{i-1}) \text{ para todo } 1 < i \leq r.$$
Escribimos $x_1 x_2 \cdots x_r$ en lugar de $(x_1, \ldots, x_r)$. Si $x = x_1 \cdots x_r$ es un camino de p a q, definimos $s(x) = p$ y $t(x) = q$. Al número r lo llamamos el *largo* del camino y lo denotamos por $\ell(x)$. Denotamos por $\mathscr{P}_Q(p,q)$ al conjunto de todos los caminos de p a q y denotamos
$$\mathscr{P}_Q = \bigcup_{p,q \in Q_0} \mathscr{P}_Q(p,q)$$
al conjunto de todos los caminos en Q. Escribimos $\mathscr{P}_Q^\ell$ para el conjunto de todos los caminos de largo ℓ.
Un carcaj Q se dice *acíclico* si $\mathscr{P}_Q(p,p) = \emptyset$ para todo vértice p.

El siguiente resultado es obvio.

Lema 2.5. *Un carcaj finito Q es acíclico si y sólo si $\mathscr{P}_Q$ es finito.*

Ejemplo 2.6. En el ejemplo anterior, $x_5 x_4$ es un camino de 4 a 3. Además $x_3 x_3 x_3 x_1$ es un camino de 2 a 1, mientras que $x_6 x_7 x_6 x_7 x_6 x_7 x_6 x_7$ es un camino de 3 a 4. No existen caminos de 1 a 2.

Construcción 2.7. Fijemos un anillo conmutativo con unidad A. Vamos a definir un funtor
$$A(-) : \mathbf{Quiv} \longrightarrow A\text{-}\mathbf{grAlg}$$
de la categoría de carcajes hacia la categoría de A-álgebras asociativas graduadas (no necesariamente con 1). Sea $Q = (Q_0, Q_1, s, t)$ un carcaj. Para cada $p \in Q_0$ sea e_p un símbolo formal, con la condición de que $e_p \neq e_q$ si $p \neq q$ en Q_0. Definimos $A(Q)$ como el A-módulo libre con base el conjunto
$$\mathscr{P}_Q \cup \{e_p \,|\, p \in Q_0\}.$$
Queremos dotar a $A(Q)$ con una estructura de A-álgebra. Para ello definimos una forma A-bilineal
$$A(Q) \times A(Q) \to A(Q), \quad (a,b) \mapsto ab$$
como sigue:

1. Si $a = x_1 \cdots x_r$ y $b = y_1 \dots y_s$ son caminos, entonces

$$ab = \delta_{t(a),s(b)} x_1 \cdots x_r y_1 \cdots y_s = \begin{cases} x_1 \cdots x_r y_1 \cdots y_s & \text{si} t(a) = t(x_r) = s(y_1) = s(b) \\ 0 & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

2. Si $a = e_p$ y b es un camino, definimos

$$ab = \delta_{p,s(b)} = \begin{cases} b & \text{si } p = s(b) \\ 0 & \text{si } p \neq s(b). \end{cases}$$

3. Si a es un camino y $b = e_p$, definimos
$$ab = \delta_{t(a),p} a.$$

4. Si $a = e_p$ y $b = e_q$ entonces
$$ab = \delta_{p,q} e_p.$$

Luego, como A es libre, extendemos este producto por bilinealidad. Es claro que $A(Q)$ es una A-álgebra asociativa. Si Q es finito, entonces $A(Q)$ es una A-álgebra asociativa con unidad, donde

$$1 = \sum_{p \in Q_0} e_p.$$

Es claro, en este caso, que la familia $\{e_p\}_{p \in Q_0}$ es una familia de idempotentes ortogonales.
Denotemos por $A^0(Q)$ al A-submódulo de $A(Q)$ generado por $\{e_p \,|\, p \in Q_0\}$ y para $\ell \geq 1$, denotemos por $A^\ell(Q)$ al A-submódulo de $A(Q)$ generado por $\mathscr{P}_Q^\ell$. Entonces tenemos que

$$A(Q) = \bigoplus_{\ell \geq 0} A^\ell(Q)$$

y

$$A^\ell(Q) A^m(Q) = A^{\ell+m}(Q), \quad \text{para todo } \ell, m \geq 0.$$

De este modo, $A(Q)$ es una A-álgebra graduada.
Ahora sea $\varphi : Q \to Q'$ un morfismo de carcajes. Definimos un morfismo de A-álgebras $A(\varphi) : A(Q) \to A(Q')$ de la forma obvia: si $x = x_1 \cdots x_r$ es un camino, $A(\varphi)(x) = \varphi(x_1) \cdots \varphi(x_r)$ y $A(\varphi(e_p)) = e_{\varphi(p)}$. Dado que $A(Q)$ es libre, esto determina completamente un morfismo de A-módulos $A(\varphi) : A(Q) \to A(Q')$ y es claro por construcción que este es un morfismo de A-álgebras. Es claro entonces que obtenemos el funtor $A(\cdot)$ deseado.

Observación 2.8. Si $\varphi : Q \to Q'$ es un morfismo entre carcajes finitos y acíclicos, en general $A(\varphi) : A(Q) \to A(Q')$ no es un morfismo de A-álgebras con unidad, es decir, en general no se tiene que

$$A(\varphi)(1_{A(Q)}) = 1_{A(Q')}.$$

$A(\varphi)$ será un morfismo de A-álgebras con unidad si y sólo si $\varphi : Q_0 \to Q_0$ es una biyección.

Definición 2.9. Al álgebra $A(Q)$ de la construcción anterior se la llama el *álgebra de caminos* del carcaj Q con coeficientes en A.

Observación 2.10. Toda categoría pequeña es un carcaj.

Definición 2.11. Sea Q un quiver y k un cuerpo. Una *representación k-lineal* (también una k-representación, o simplemente una representación cuando k es claro para el contexto) de Q es un morfismo de carcajes $V : Q \to \mathscr{V}$ donde $\mathscr{V}$ es alguna subcategoría pequeña de la categoría de k-espacios vectoriales de dimensión finita.

Más específicamente, una k-representación de un carcaj $Q = (Q_0, Q_1)$ está dada por una asignación que a cada vértice $p \in Q_0$ le asigna un k-espacio vectorial de dimensión finita $V(p)$ y a cada arista $x \in Q_1$ le asigna una aplicación k-lineal
$$V(x) : V(s(x)) \to V(t(x)).$$

Definición 2.12. Sean V y W dos k-representaciones de un carcaj Q. Un *morfismo* de representaciones $\varphi : V \to W$ es una colección de aplicaciones lineales $\{\varphi_p : V(p) \to W(p) \,|\, p \in Q_0\}$ tal que para toda arista $x \in Q_1$, el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} V(s(x)) \arrow[r, "\varphi_{s(x)}"] \arrow[d, "V(x)"'] & W(s(x)) \arrow[d, "W(x)"] \\ V(t(x)) \arrow[r, "\varphi_{t(x)}"'] & W(t(x)). \end{tikzcd}$$

Es claro que entonces obtenemos una categoría $\mathbf{Rep}_k(Q)$ cuyos objetos son las k-representaciones del carcaj Q y sus morfismos son los morfismos de representaciones. La composición de dos morfismos $\varphi : U \to V$ y $\psi : V \to W$ se define como

$$(\psi \circ \varphi)_p = \psi_p \circ \varphi_p, \quad \text{para todo } p \in Q_0.$$

Asunción 2.13. Desde ahora en adelante todos los carcajes serán finitos. Denotamos por $\mathbf{Quiv}_0$ a la subcategoría plena de la categoría **Quiv** cuyos objetos son quivers finitos.

Construcción 2.14. Sea Q un carcaj y sea V una representación de Q. Definimos

$$L(V) = \bigoplus_{p \in Q_0} V(p),$$

Sea $\pi_p : L(V) \to V(p) \to L(V)$ la proyección en la p-ésima componente. Sobre $L(V)$ definimos una estructura de $k(Q)$-módulo izquierdo como sigue.

1. Si $x \in Q_1$ es una arista, definimos

$$\rho(x)(v) = \begin{cases} V(x)v & \text{si } v \in V(s(x)) \\ 0 & \text{si } v \notin V(s(x)). \end{cases}$$

   Entonces, por la propiedad universal de la suma directa, $\rho(x) : L(V) \to L(V)$ es una aplicación k-lineal bien definida.

2. Si $x = x_1 \cdots x_r$ es un camino, definimos

$$\rho(x) = \rho(x_1) \cdots \rho(x_r).$$

3. Para $p \in Q_0$, definimos $\rho(e_p) = \pi_p$.

4. En general, para un elemento del álgebra de caminos $x = a_1x_1 + \cdots + a_nx_n$ donde cada x_i es un camino o un elemento de la forma e_p, y los a_i son escalares en k, definimos

$$\rho(x) = a_1\rho(x) + \cdots a_n\rho(x_n).$$

De este modo, obtenemos un homomorfismo de k-álgebras

$$\rho : k(Q) \longrightarrow \mathrm{End}_k(L(V))$$

lo que es equivalente a definir una estructura de $k(Q)$-módulo izquierdo sobre $L(V)$.
Si $\varphi : V \to W$ es un morfismo de representaciones, definimos

$$L(\varphi) : L(V) \longrightarrow L(W)$$

mediante

$$L(\varphi)((v_p)_{p \in Q_0}) = (\varphi_p(v_p))_{p \in Q_0}.$$

Es fácil ver que $L(\varphi)$ es un morfismo de $k(Q)$-módulos y que esta construcción define un funtor

$$L : \mathbf{Rep}_k(Q) \to k(Q){-}\mathbf{Mod}.$$

Recíprocamente, si M es un $k(Q)$-módulo, definimos $M(p) = e_pm$ para cada $p \in Q_0$ y si $x \in Q_1$ es una arista definimos

$$M(x) = x|_{M(s(x))} : M(s(x)) \to M(t(x))$$

Notemos que esto tiene sentido pues

$$xM = e_{t(x)}xM \subseteq e_{t(x)}M = M(t(x)).$$

De este modo obtenemos una representación $M(\cdot)$ del carcaj Q. Es claro que para toda representación V de Q y todo $k(Q)$-módulo izquierdo M se tiene que

$$L(V)(\cdot) = V \quad \text{y} \quad L(M(\cdot)) = M.$$

Teorema 2.15. *Para todo carcaj Q, el funtor*

$$L : \mathbf{Rep}_k(Q) \longrightarrow k(Q){-}\mathbf{Mod}.$$

define una equivalencia de categorías cuya inversa está dada por el funtor $M \mapsto M(\cdot)$ descrito arriba.

Ejemplo 2.16. Sea Q un carcaj (finito). Para cada $p \in Q_0$, el conjunto

$$k(Q)e_p = \operatorname{span}_k\{x \in \mathscr{P}_Q \mid t(x) = p\}$$

es claramente un $k(Q)$-módulo izquierdo. Por ende, este corresponde a la siguiente respresentación V del carcaj V:

$$V(q) = e_q k(Q) e_p = \bigoplus_{x \in \mathscr{P}_Q(q,p)} kx$$

Más aún, notemos que

$$k(Q) = \bigoplus_{p \in Q_0} k(Q)e_p,$$

y dado que $k(Q)$ es un $k(Q)$-módulo libre, se sigue que los módulos $k(Q)e_p$ son proyectivos.

2.2. Cocientes GIT

En todo lo que sigue el cuerpo base será $\mathbb{C}$, el cuerpo de números complejos.
Sea G un grupo algebraico lineal. G se dice *(linealmente) reductivo*[4] si sus representaciones lineales de dimensión finita son semisimples (i.e. completamente reducibles). En lo que sigue, X denotará una variedad algebraica afín equipada con una acción algebraica de un grupo reductivo G, es decir, con un morfismo regular

$$G \times X \longrightarrow X, \quad (g, x) \longmapsto g \cdot x,$$

que satisface la propiedades usuales de una acción.
Denotamos $\mathbb{C}[X] = \Gamma(X, \mathscr{O}_X)$ a la k álgebra de funciones regulares globales. Entonces G actúa sobre $\mathbb{C}[X]$ del siguiente modo:

$$(g \cdot f)(x) = f(g^{-1} \cdot x), \quad \text{para todo } x \in X, g \in G, f \in \mathbb{C}[X].$$

Una función regular $f \in \mathbb{C}[X]$ se dice *G-invariante* si $g \cdot f = f$ para todo $g \in G$. Denotamos por $\mathbb{C}[X]^G$ al conjunto de funciones regulares G-invariantes. Es claro que $\mathbb{C}[X]^G$ es una subálgebra de $\mathbb{C}[X]$, a la que llamamos el *anillo de invariantes* X bajo G.

Teorema 2.17 (Hilbert-Nagata)**.** *Si G es un reductivo y X es una variedad algebraica afín, entonces el anillo de invariantes $\mathbb{C}[X]^G$ es finitamente generado.*

Este teorema fue demostrado por Hilbert para el caso de $X = \mathbb{A}^n$ y $G = \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ y generalizado por Nagata para cualquier cuerpo k de característica 0 y cualquier variedad afín X.
Definimos

$$X /\!/ G = \operatorname{Specm}(\mathbb{C}[X]^G),$$

y lo llamamos el *cociente categórico* de X por la acción de G. En virtud del teorema de Hilbert-Nagata, $X /\!/ G$ es una variedad algebraica afín. Dado que existe una inclusión obvia $\mathbb{C}[X]^G \hookrightarrow \mathbb{C}[X]$, esta induce un morfismo regular

$$\pi : X = \operatorname{Specm}(\mathbb{C}[X]) \longrightarrow X /\!/ G,$$

al que llamaremos el *morfismo cociente*. La variedad $X /\!/ G$ verifica la siguiente *propiedad universal*: Si $\varphi : X \to Y$ es un morfismo regular G-equivariante, entonces φ induce un único morfismo regular $\overline{\varphi} : X /\!/ G \to Y$ tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\pi"'] & Y \\ X /\!/ G \arrow[ur, dashed, "\overline{\varphi}"'] & \end{tikzcd}$$

Teorema 2.18. —

1. *El morfismo $\pi : X \to X /\!/ G$ es sobreyectivo y cada fibra contiene una única órbita cerrada.*
2. *Si $Y \subseteq X$ es una subvariedad cerrada, el morfismo inducido por la inclusión $Y /\!/ G \to X /\!/ G$ es una incrustación cerrada.*

Sea ahora $\chi : G \to \mathbb{C}^\times$ un carácter algebraico de G. Definimos el espacio de *semi-invariantes* mediante

$$\mathbb{C}[X]^{G, n\chi} = \{f \in \mathbb{C}[X] \mid g \cdot f = \chi(g)^n f \text{ para todo } g \in G\}.$$

A diferencia del anillo de invariantes, el conjunto $\mathbb{C}[X]^{G,n\chi}$ es solamente un espacio vectorial. Entonces definimos el *lugar semi-estable de X asociado a χ* como

$$X^{\chi - ss} = \{x \in X \mid \text{existe } f \in \mathbb{C}[X]^{G,n\chi} \text{ con } n > 0 \text{ y } f(x) \neq 0\}.$$

[4]En característica cero, que será el caso del que nos ocuparemos, linealmente reductivo y reductivo son sinónimos

Observación 2.19. El conjunto $X^{\chi-ss}$ es abierto en X, pues tenemos la igualdad

$$X^{\chi-ss} = \bigcup_{\substack{f\in\mathbb{C}[X]^{G,n\chi}\\ n>0}} X_f,$$

donde $X_f = X \setminus V(f)$ es un abierto principal.

Construcción 2.20. Sea $S_X^\chi = \bigoplus_{n\geq 0}\mathbb{C}[X]^{G,n\chi}$. Entonces X_X^χ tiene la estructura de una $\mathbb{C}$-álgebra graduada. Denotamos por $(S_X^\chi)_+ = \bigoplus_{n>0}\mathbb{C}[X]^{G,n\chi}$ a su ideal irrelevante.
Sea $\mathrm{Proj}(S_X^\chi)$ el conjunto de todos los ideales primos homogéneos $\mathfrak{p}$ que no contienen completamente a $(S_X^\chi)_+$. Si $\mathfrak{a}$ es un ideal homogéneo de S_X^χ, definimos

$$V(\mathfrak{a}) = \{\mathfrak{p}\in \mathrm{Proj}(S_X^\chi)\,|\,\mathfrak{p}\supseteq\mathfrak{a}\}.$$

Es inmediato que los conjuntos $V(\mathfrak{a})$ satisfacen los axiomas para los cerrados de una topología sobre $\mathrm{Proj}(S_X^\chi)$, a la que llamamos la *topología de Zariski* sobre $\mathrm{Proj}(S_X^\chi)$. Para cada $s\in(S_X^\chi)_+$ denotamos

$$D_+(f) = \{\mathfrak{p}\in \mathrm{Proj}(S_X^\chi)\,|\,f\notin\mathfrak{p}\}.$$

Es claro entonces que los conjuntos $D_+(f)$ constituyen una base de abiertos para la topología de Zariski sobre $\mathrm{Proj}(S_X^\chi)$.
Para cada $f\in(S_X^\chi)_+$ definimos $(S_X^\chi)_{(f)}$ como el conjunto de elementos de grado 0 en el anillo localizado $(S_X^\chi)_f$ y consideramos el esquema afín $\mathrm{Spec}(S_X^\chi)_{(f)}$ cuyo espacio topológico subyacente es claramente $D(f)_+$. Entonces podemos pegar estos espacios localmente anillados y así equipamos a $\mathrm{Proj}(S_X^\chi)$ con una estructura de esquema.

Definición 2.21. Dado un carácter algebraico $\chi : G\to\mathbb{C}^\times$, definimos el *cociente GIT* (del inglés *geometric invariant theoretic quotient*) de X con respecto a χ por

$$X /\!\!/^\chi G = \mathrm{Proj}(S_X^\chi).$$

2.3. Acciones Hamiltonianas y aplicación de momentum

Sea X una variedad algebraica. Una *forma simpléctica* es una 2-forma $\omega\in\Omega_X^2$ que es cerrada (i.e. $d\omega=0$) y es no degenerada. Al par (X,ω) lo llamamos una *variedad algebraica simpléctica*.
Dado un campo de vectores $v : X\to T_X$, consideramos la contracción $\iota_v\omega$ definida por $(\iota_v\omega)(w) = -\omega(v,w)$. Entonces el hecho de que ω es no degenerada significa que para toda 1-forma α existe un único campo de vectores Ω_α tal que $\iota_{\Omega_\alpha}\omega=\alpha$. En particular, para una función suave f, tenemos que df es una 1-forma y por ende existe un único campo de vectores Ω_{df} tal que $\iota_{\Omega_{df}}\omega = df$. Llamamos a Ω_{df} el *campo de vectores Hamiltoniano* asociado a f y lo denotamos por H_f o por $v(f)$. Esto permite definir una forma bilineal

$$\{\cdot,\cdot\} : \mathscr{O}_X\times\mathscr{O}_X\to\mathscr{O}_X,\quad \{f,g\} = \omega(H_f,H_g),\quad f,g\in\mathscr{O}_X.$$

Notemos que

$$v(f)g = \Omega_{df}g = dg\Omega_{df} = -\omega(\Omega_{dg},\Omega_{df}) = \omega(\Omega_{df},\Omega_{dg}) = \{f,g\},$$

de modo que tenemos $v(f)=\{f,\cdot\}$. La forma bilineal $\{\cdot,\cdot\}$ es un *corchete de Poisson*, en el sentido de que es bilineal, alternante, verifica la *identidad de Jacobi*

$$\{f,\{g,h\}\}+\{g,\{h,f\}\}+\{h,\{f,g\}\}=0$$

y la *regla de Leibniz no conmutativa*

$$\{f,gh\} = g\{f,h\}+\{f,g\}h.$$

Sea G un grupo algebraico, y denotemos por $\mathfrak{g}$ a su álgebra de Lie. Recordemos un poco esto: Sea $g\in G$, y consideramos el morfismo de multiplicación por g a la izquierda: $L_g : G\to G$, $h\mapsto gh$. Este morfismo induce un morfismo $\lambda_g : \mathscr{O}_G(G)\to\mathscr{O}_G(G)$ y decimos que una derivación D de $\mathscr{O}_G(G)$ es *invariante por izquierda* si

$$D\lambda_g = \lambda_g D,\quad \text{para todo } g\in G.$$

Entonces $\mathfrak{g}$ es el conjunto de todas las derivaciones invariantes por izquierda de $\mathscr{O}_G(G)$.
Supongamos que G actúa algebraicamente sobre una variedad algebraica afín X. Su acción se extiende a $\mathbb{C}[X]$ lo que provee una representación de $\mathfrak{g}$ sobre $\mathbb{C}[X]$ y esta acción es por derivaciones, de modo que obtenemos un homomorfismo de álgebras de Lie $\mathfrak{g}\to\mathrm{Vect}(X)$, $\xi\to\xi_X$, donde $\mathrm{Vect}(X)$ es el álgebra de Lie de campos vectoriales sobre X (secciones globales del fibrado tangente).
Si (X,ω) es una variedad simplética, un *simplectomorfismo* de X es un automorfismo $\rho : X\to X$ que preserva la forma simplética ω, es decir, que verifica $\rho^*\omega=\omega$. Una acción de G sobre X se dice *simpléctica* si cada elemento de G actúa por simplectomorfismos sobre X. En este caso, la aplicación $\mathbb{C}[X]\to\mathrm{Vect}(X)$ es G-equivariante.

Definición 2.22. Una acción simpléctica de grupo algebraico G sobre una variedad afín X es dice *Hamiltoniana* si viene equipada con un morfismo G-equivariante $\mathfrak{g} \to \mathbb{C}[X]$, $\xi \mapsto H_\xi$ tal que $\xi_X = v(H_\xi)$ para todo $\xi \in \mathfrak{g}$. La *aplicación de momentum* $\mu : X \to \mathfrak{g}^*$ se define como

$$\langle \mu(x), \xi \rangle = H_\xi(x)$$

2.4. Variedades de carcaj de Nakajima

Definición 2.23. Sea Q un carcaj. Una *representación co-enmarcada* de Q está dada por la siguiente información:

1. Para cada vértice $p \in Q_0$ dos espacios vectoriales complejos V_p y W_p junto con una aplicación $\mathbb{C}$-lineal $i_p : V_p \to W_p$
2. Para cada arista $a \in Q_1$, una aplicación lineal $x_a : V_{s(a)} \to V_{t(a)}$.

El vector $v = (v_p)_{p \in Q_0}$ dado por $v_p = \dim_{\mathbb{C}} V_p$ se llama *vector de dimensión*, y el vector $w = (w_p)_{p \in Q_0}$ dado por $w_p = \dim_{\mathbb{C}} W_p$ se llama *vector de enmarcado.*

Definimos el espacio vectorial

$$R = R(Q, v, w) = \bigoplus_{a \in Q_1} \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V_{s(a)}, V_{t(a)}) \oplus \bigoplus_{p \in Q_0} \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V_p, W_p)$$

El grupo $G = \mathrm{GL}(v) = \prod_{p \in Q_0} \mathrm{GL}(V_p)$ actúa naturalmente sobre R. Es claro que G es un grupo reductivo. Denotamos por $\mathfrak{g}$ a su álgebra de Lie.

Observación 2.24. Existe un isomorfismo $\mathbb{C}^{Q_0} \to (\mathfrak{g}^*)^G$ dado por

$$(\lambda_p)_{p \in Q_0} \longmapsto \sum_{p \in Q_0} \lambda_p \, \mathrm{tr}_{V_p}$$

Además, si denotamos por $\hat{G}$ al grupo de caracteres de G, tenemos un isomorfismo de grupos $\mathbb{Z}^{Q_0} \to \hat{G}$ dado por

$$(\chi_p)_{p \in Q_0} \longmapsto \left[(g_p)_{p \in Q_0} \mapsto \prod_{p \in Q_0} \det(g_p)^{\chi_p} \right].$$

Sea $X = T^*R$ el fibrado cotangente de $R = R(Q, v, w)$. Entonces X tiene una estructura natural de variedad simpléctica: Tenemos que $X \cong R^* \oplus R$ y el emparejamiento dual $\langle \cdot, \cdot \rangle$ se extiende de manera única a una forma simpléctica ω sobre X. El grupo G actúa claramente por simplectomorfismos sobre X, de modo que la acción de G sobre X es simpléctica. Entonces definimos una aplicación G-equivariante $\mathfrak{g} \to \mathbb{C}[X]$ mediante $\xi \mapsto H_\xi = \xi_R$, la derivación de $\mathbb{C}[X]$ asociada a $\xi \in \mathfrak{g}$. Notemos que esto está bien definido, pues todo campo vectorial sobre X puede verse como una función regular sobre X que es lineal en las fibras del fibrado $X \to R$. Entonces tenemos que la acción de G sobre X es Hamiltoniana y por ende podemos considerar la aplicación de momentum $\mu : X \to \mathfrak{g}^*$.

Definición 2.25. Sea Q un carcaj finito. Dados $\chi \in \mathbb{Z}^{Q_0}$ y $\lambda \in \mathbb{C}^{Q_0}$, definimos, para cada par de vectores $v, w \in (\mathbb{Z}_{\geq 0})^{Q_0}$, la *variedad de quiver de Nakajima* mediante

$$\mathscr{M}_\lambda^\chi(Q, v, w) = \mu^{-1}(\lambda) /\!\!/^{\chi} G.$$