Ayudantía 7 (MAT426)

Melanie Vargas

Ejercicios

1. Sean $a, b \in \mathbb{Z}$. En $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$, definimos $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m}(a,b) := \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(a) \boxtimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^m}(b) \in \mathrm{Pic}(\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m)$. Probar que el sistema lineal completo definido por $L = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m}(1,1)$ induce un morfismo regular $\varphi_L : \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m \hookrightarrow |L| \cong \mathbb{P}^N$ que coincide con la incrustación de Segre.

2. Sean $L, M \in \mathrm{Pic}X$ fibrados en recta en una variedad algebraica X. Probar que si L es muy amplio y M es globalmente generado, entonces $L \otimes M$ es muy amplio.

Discusión

Divisores en curvas

Definición 1. *Sea X una curva suave, proyectiva e irreducible.*

1. *Un **divisor** en X es una combinación lineal finita $k_1a_1 + \cdots + k_na_n$ de distintos puntos $a_1, \ldots, a_n \in X$ con $k_1, \ldots, k_n \in \mathbb{Z}$ para algún $n \in \mathbb{N}$. Los divisores en X forman un grupo abeliano bajo la suma de coeficientes. Denotamos a los divisores por $DivX$.*

2. *Un divisor $D = k_1a_1 + \cdots + k_na_n$ es llamado **efectivo**, denotado por $D \geq 0$, si $k_i \geq 0$ para cada $i = 1, \ldots, n$. Si D_1, D_2 son dos divisores tales que $D_2 - D_1$ es efectivo, escribimos que $D_2 \geq D_1$ o $D_1 \leq D_2$. En otras palabras, tenemos que $D_2 \geq D_1$ si y sólo si cada coeficiente de cada punto en D_2 es mayor o igual a los coeficientes de estos puntos en D_1.*

3. *El **grado** de un divisor $D = k_1a_1 + \cdots + k_na_n$ es el número $degD := k_1 + \cdots + k_n \in \mathbb{Z}$. El grado forma un homomorfismo deg:$DivX \to \mathbb{Z}$. Su kernel se denota como*

$$Div^0X = \{D \in DivX : degD = 0\}.$$

Construcción de divisiores de polinomios: Sea $X \subset \mathbb{P}^n$ una curva suave e irreducible.

1. Para un polinomio no nulo $f \in k(X)$, el **divisor** de f se define como

$$\mathrm{div}f := \sum_{a \in V_X(f)} \mathrm{mult}_a(f) \cdot a \in \mathrm{Div}X,$$

donde $V_X(f)$ denota los ceros de f en X. En otras palabras, el divisor div$f$ contiene los datos de los ceros de f junto a sus multiplicidades. Por el Teorema de Bézout, su grado es deg(div$f$)=deg$X$·deg$f$.

2. Si $n = 2$ e $Y \subset \mathbb{P}^2$ es otra curva que no contiene a X, el **divisor de intersección** de X e Y es
$$X \cdot Y := \sum_{a \in X \cap Y} \mathrm{mult}_a(X, Y) \cdot a \in \mathrm{Div}X.$$

Lema 1. *Sea X una curva suave, proyectiva e irreducible, y sean f, g polinomios no nulos. Entonces*
$$mult_a(fg) = mult_a(f) + mult_a(g)$$
para todo $a \in X$. En particlar, tenemos que $div(fg) = divf + divg \in DivX$.

Construcción de divisores de funciones racionales: Sea X una curva suave, proyectiva e irreducible, y sea $\varphi \in K(X)^*$ una función racional no nula. Podemos escribir $\varphi = \frac{g}{f}$ dos polinomios homogéneos f y g del mismo grado.

1. Definimos la multiplicidad de φ en un punto $a \in X$ como
$$\mathrm{mult}_a(\varphi) := \mathrm{mult}_a(g) - \mathrm{mult}_a(f) \in \mathbb{Z}.$$

2. Análogamente, por la primera construcción, definimos el divisor de φ como
$$\mathrm{div}\varphi := \sum_{a \in V_X(f) \cap V_X(g)} \mathrm{mult}_a(\varphi) \cdot a = \mathrm{div}g - \mathrm{div}f.$$

Observemos que el Lema 1 implica que $\mathrm{mult}_a(\varphi_1\varphi_2) = \mathrm{mult}_a(\varphi_1) + \mathrm{mult}_a(\varphi_2)$ para todo $a \in X$ para φ_1, φ_2 funciones racionales. Además se tiene que $\mathrm{div}(\varphi_1\varphi_2) = \mathrm{div}\varphi_1 + \mathrm{div}\varphi_2$, es decir, el mapeo $\mathrm{div} : K(X)^* \to \mathrm{Div}X$ es un homomorfismo de grupos.

Observemos además que cualquier funcion racional en X es de la forma $\varphi = \frac{g}{f}$ para dos polinomios homogéneos del mismo grado, por la primera construcción, este divisor tiene grado cero:
$$\deg(\mathrm{div}\varphi) = \deg(\mathrm{div}g - \mathrm{div}f) = \deg\mathrm{div}g - \deg\mathrm{div}f = \deg X \cdot \deg g - \deg X \cdot \deg f = 0.$$

Por lo tanto el homomorfismo de la observación anterior puede ser visto como un morfismo $\mathrm{div} : K(X)^* \to \mathrm{Div}^0X$.

Definición 2. *Sea X una curva suave, proyectiva e irreducible.*

1. *Un divisor en X es llamado **principal** si es divisor de una función racional. Denotamos por $PrinX$ al conjunto de todos los divisores principales. Notemos que $PrinX$ es la imagen de un divisor por $div : K(X)^* \to Div^0X$ y por lo tanto es subgrupo de Div^0X y $DivX$.*

2. *El cociente*
$$PicX := DivX/PrinX$$
*es llamado el **grupo de Picard** o **grupo de clases divisorias** en X. Restrictos al grado cero, podemos definir $Pic^0X := Div^0X/PrinX$. Por abuso de notación, un divisor y su clase en $PicX$ lo denotaremos por el mismo símbolo.*

Observemos que los grupos Pic$X$ y Pic^0X llevan la misma información en X, como siempre tenemos

$$\text{Pic}X/\text{Pic}^0X \cong \text{Div}X/\text{Div}^0X \cong \mathbb{Z}.$$

Curvas cúbicas: Sean a, b dos puntos de $X \subset \mathbb{P}^2$ curva cúbica y suave, no necesariamente iguales. Existe una única recta $L \subset \mathbb{P}^2$ tal que $a + b \leq L \cdot X$ como divisores en X, llamada la recta que pasa por a y b si los puntos son distintos, y la recta tangente de X en $a = b$ en otro caso. Pero $L \cdot X$ es un divisor efectivo de grado 3 en X, y por lo tanto existe un único punto $c \in X$ con $L \cdot X = a + b + c$. En lo siguiente, denotaremos a c por $\psi(a, b)$.

Geométricamente, para $a, b \in X$, el punto $\psi(a, b)$ es el tercer punto de intersección de X con la recta que pasa por a y b. De hecho, uno puede mostrar que el mapeo $\psi : X \times X \to X$, $(a, b) \mapsto \psi(a, b)$ es un morfismo.

Proposición 1. *Sea $X \subset \mathbb{P}^2$ una curva cúbica suave. Entonces para todo $a, b \in X$ distintos, tenemos que $a - b \neq 0 \in Pic^0X$, es decir, no existe una función racional no nula φ en X tal que $div\varphi = a - b$.*

En particular, la proposición 1 implica que Pic$^0X \neq \{0\}$ para cada superficie cúbica $X \subset \mathbb{P}^2$.

Ley de grupo en curvas elípticas

Definición 3. *Una **curva elíptica** es una curva cúbica suave en $\mathbb{P}^2$.*

Veremos que las curvas elípticas se pueden dotar naturalmente de una estructura de grupo.

Proposición 2. *Sea $X \subset \mathbb{P}^2$ una curva elíptica, y sea $a_0 \in X$ un punto. Entonces el mapeo*

$$\Phi : X \to Pic^0X, \quad a \mapsto a - a_0$$

es una biyección.

Sea $X \subset \mathbb{P}^2$ una curva elíptica. Luego de escoger $a_0 \in X$, la proposición anterior nos da una biyección canónica entre la variedad X y el grupo abeliano Pic^0X, es decir, dos objetos matemáticos diferentes. Así, podemos usar esta la biyección para dotar a X de una estructura de grupo abeliano, y a Pic^0X la estructura de una variedad suave y proyectiva.

De hecho, Pic^0X se puede convertir en una variedad (llamada la **variedad de Picard**) para cada curva suave y proyectiva X. Sin embargo, en general no es isomorfa a X. Sólo se puede mostrar que el mapeo $\Phi : X \to \text{Pic}^0X$ $a \mapsto a - a_0$ de la proposición anterior es inyectivo si X no es isomorfo a $\mathbb{P}^1$, de modo que entonces podemos pensar en X como una subvariedad de Picard.

En contraste, el hecho de que X puede verse como grupo abeliano es especial en curvas elípticas. En lo siguiente exploraremos la estructura de grupo explícitamente.

Construcción de la estructura de grupo en una curva elíptica: Sea a_0 un punto fijo de $X \subset \mathbb{P}^2$. Como se dijo antes, podemos utilizar la biyección de la proposición 2 para definir una estructura de grupo en X. Más precisamente, si denotamos a esta operación de grupo por $\oplus$ (para distinguir de la adición en Div$X$ o Pic$X$), entonces $a \oplus b$ para $a, b \in X$ debe satisfacer

$$\Phi(a \oplus b) = \Phi(a) + \Phi(b).$$

Para hallar explícitamente $a \oplus b$, notemos que $a+b+\psi(a,b)$ y $a_0+\psi(a,b)+\psi(a_0,\psi(a,b))$ son divisores de polinomios lineales homogéneos, y por tanto

$$a+b+\psi(a,b)-a_0-\psi(a,b)-\psi(a_0,\psi(a,b))=0 \quad \in \mathrm{Pic}^0 X.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} a \oplus b &= \Phi^{-1}(\Phi(a)+\Phi(b)) \\ &= \Phi^{-1}(a-a_0+b-a_0) \\ &= \Phi^{-1}(\psi(a_0,\psi(a,b))-a_0) \\ &= \psi(a_0,\psi(a,b)). \end{aligned}$$

En otras palabras, para construir $a \oplus b$ dibujamos la recta que une a a y b. Luego dibujamos otra recta que pasa por el punto $\psi(a,b)$ y el punto a_0. El tercer punto de intersección de esta segunda recta con X es entonces $a \oplus b$.

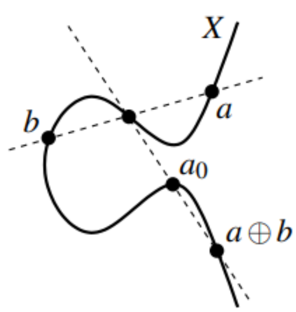
Similarmente, para construir la inversa $\ominus a$ de a en esta estructura de grupo, utilizamos la relación

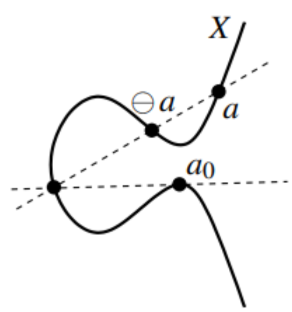
$$a_0+a_0+\psi(a_0,a_0)-a-\psi(a_0,a_0)-\psi(a,\psi(a_0,a_0))=0 \quad \in \mathrm{Pic}^0 X$$

para obtener

$$\begin{aligned} \ominus a &= \Psi^{-1}(-\Psi(a)) \\ &= \Phi^{-1}(a_0-a) \\ &= \Phi^{-1}(\psi(a,\psi(a,a_0))-a_0) \\ &= \psi(a,\psi(a_0,a_0)). \end{aligned}$$

Así, para construir la inversa $\ominus a$ dibujamos la recta tangente que pasa por a_0. Luego dibujamos otra recta que pasa por el punto de intersección $\psi(a_0,a_0)$ de esta tangente con X y el punto a. El tercer punto de intersección de la segunda recta con X es $\ominus a$.





Observemos que, utilizando la descripción geométrica, la operación $\oplus$ puede ser definida completamente elemental, sin hacer referencia a la teoría de divisores. Sin embargo, sería muy difícil demostrar que obtenemos una estructura de grupo, en particular, para probar la asociatividad.