Ayudantía 6: MAT426 2021-2

Patricio C. Rubilar

Viernes, 5 de Noviembre del 2021

1. Ejercicios de clases

1. Sea $f : Y \to X$ un morfismo regular entre variedades algebraicas, y sea $E \xrightarrow{p} X$ un fibrado vectorial.
Probar que

$$\Gamma(f) : H^0(X, E) \to H^0(Y, f^*E)$$
$$s \mapsto \Gamma(f)(s)$$
$$y \mapsto (\Gamma(f)(s))(y) := (y, s(f(y)))$$

está bien definida y es k-lineal.
2. Sean $E \to X$ y $F \to Y$ fibrados vectoriales.
Probar la **fórmula de Künneth**

$$H^0(X, E) \otimes_k H^0(F, Y) \cong H^0(X \times Y, E \boxtimes F)$$

donde $E \boxtimes F := pr_X^*(E) \otimes pr_Y^*(F)$ es el producto tensorial exterior de E y F.

2. Discusión: Teorema de Bézout

El objetivo de esta sección es discutir los conceptos necesarios para enunciar el Teorema de Bézout y ver cómo el plano afín no detecta intersecciones que en el plano proyectivo si se detectan.
e.g: Todas las rectas se intersectan en el plano proyectivo, **¡NO así en el plano afín!**
Lo cual probaremos fácilmente después de enunciar el teorema.
2.1 Intersecciones en el plano afín
Definición: Diremos que una curva algebraica plana afín $C \subseteq \mathbb{A}^2$ es el lugar de ceros de un polinomio no constante $f \in \mathbb{C}[X, Y]$, i.e

$$C = V(f) := \left\{(x, y) \in \mathbb{A}^2 \mid \text{tal que f(x,y)=0}\right\}$$

Definición: El grado de C, denotado por deg(C) es el grado total de f(x,y).
Recordatorio: Sea $p \in \mathbb{A}^2$ un punto. El anillo local de $\mathbb{A}^2$ en p es

$$\mathscr{O}_{\mathbb{A}^2,p} := \left\{ \frac{f}{g} \;\middle|\; f, g \in \mathbb{C}[X, Y] \text{ y } g(p) \neq 0 \right\}.$$

Que posee un único ideal maximal

$$\mathfrak{m}_p := \mathfrak{m}_{\mathbb{A}^2,p} := \left\{ \frac{f}{g} \;\middle|\; f, g \in \mathbb{C}[X, Y] \text{ con } f(p) = 0 \text{ y } g(p) \neq 0 \right\}.$$

Definición: Sean $f, g \in \mathbb{C}[X, Y]$ y $p \in \mathbb{A}^2$. Definimos la multiplicidad (o número) de intersección de f y g en p mediante

$$\mu_p(f, g) := \dim_{\mathbb{C}}(\mathscr{O}_{\mathbb{A}^2,p}/\langle f, g\rangle) \in \mathbb{N} \cup \infty.$$

A pesar de ser un poco abstracta la definición en un principio, podemos deducir ciertas propiedades por definición:
(1) $\mu_p(f, g) = \mu_p(g, f)$ para todos $f, g \in \mathbb{C}[X, Y]$.
(2) Si $h \in \mathbb{C}[X, Y]$ entonces $\langle f, g + fh\rangle = \langle f, g\rangle$ y luego $\mu_p(f, g + fh) = \mu_p(g, f) \forall p \in \mathbb{A}^2$
Lema: Sea $p \in \mathbb{A}^2$ un punto, y sean $f, g \in \mathbb{C}[X, Y]$. Entonces
(1) $\mu_p(f, g) \neq 0 \Leftrightarrow p \in V(f) \cap V(g)$.
(2) $\mu_p(f, g) = 1 \Leftrightarrow \langle f, g\rangle = \mathfrak{m}_{\mathbb{A}^2,p}$ en $\mathscr{O}_{\mathbb{A}^2,p}$.
Obs: Si f,g poseen un factor irreducible común h tal que h(p)=0, entonces $\mu_p(f, g) = \infty$.
Def: Dado $f \in \mathbb{C}[X, Y]$ de grado $d \in \mathbb{N}$, definimos la parte de grado l de f con ($l \in (0, 1, ..., d)$) como la suma f_l de los monomios $a_{ij}X^iY^j$ en f tales que $i+j = l$. En particular los f_l son homogeneos de grado l y $f = f_0+f_1+...+fd$.
Diremos que:
(i) f_0 es la parte constante de f.
(ii) f_1 es la parte lineal de f.
(iii) f_d es la parte principal de f.
Proposición: Sean $f, g \in \mathbb{C}[X, Y]$ no-constantes tales que $p = (0, 0) \in V(f) \cap V(g)$. Entonces:
$\mu_p(f, g) = 1 \Leftrightarrow$ las formas lineales (f_1, g_1) son linealmente independientes.

Definición: Sea $p \in (0,0) \in \mathbb{A}^2$ y $f \in \mathbb{C}[X,Y]$. Si definimos $g(X,Y) := f(X+x_0, Y+y_0)$ entonces, la multiplicidad de f en $p = (x_0, y_0)$ es

$$m_p(f,g) := min\{l \in \mathbb{N} \text{ tal que } g_l \neq 0\}$$

Los factores lineales de g_m, con $m = m_p(f)$ son llamados tangentes de f en p.
Definición: Sea $f \in \mathbb{C}[X,Y]$ no constante y $p \in V(f)$. Diremos que p es un punto suave (resp. singular) si $m_p = 1$ (resp. $m_p \geqslant 2$ y decimos que la curva $V(f) \subseteq \mathbb{A}^2$ es suave (resp. singular) si todos sus puntos son suaves (resp. si existe un punto singular).
Con la nueva definición podemos hacer una reformulación de la proposición anterior:
Proposición: Sean $f, g \in \mathbb{C}[X,Y]$ no-constantes tales que $p = (0,0) \in V(f) \cap V(g)$. Entonces:
$\mu_p(f,g) = 1 \Leftrightarrow p$ es un punto suave de $V(f)$ y $V(g)$, y además $T_p f \neq T_p g$.
Para poder estudiar el siguiente conjunto

$$Sing(V(f)) := \{p \in V(f) \text{ tal que } p \text{ es singular } \}.$$

Enunciaremos el siguiente teorema que nos permitirá analizar de forma más sencilla los puntos suaves y singulares de una variedad y así poder estudiar la multiplicidad de éstos:
Teorema: Sea $f \in \mathbb{C}[X,Y]$ no-constante y $p = (x_0, y_0) \in V(f)$. Entonces:
(1) p es singular $\Leftrightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$.
(2) Si p es suave, entonces $T_p f$ está dada por la forma lineal

$$T_p f = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(X - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(Y - y_0)$$

En particular, $Sing(V(f)) = V(f, \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}) \subseteq V(f)$.
Como hemos podido notar, la multiplicidad de intersecciones es una propiedad local, por lo cual nos sería interesante saber cómo relacionar ésto con el punto de vista global, para ello está la siguiente proposición:
Proposición: Si $f, g \in \mathbb{C}[X,Y]$ no-constantes sin factores irreducibles comunes, entonces

$$\mathbb{C}[X,Y]/\langle f, g\rangle \xrightarrow{\sim} \bigoplus_{p \in V(f) \cap V(g)} \mathscr{O}_{\mathbb{A}^2, p}/\langle f, g\rangle$$

es un isomorfismo. En particular,

$$\dim_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}[X,Y]/\langle f, g\rangle) = \sum_{p \in V(f) \cap V(g)} \mu_p(f,g).$$

2.2 Intersecciones en el plano proyectivo

Definición: Una curva plana proyectiva $C \subseteq \mathbb{P}^2$ es el lugar de ceros de un polinomio **homogéneo** no-constante $F \in \mathbb{C}[X,Y,Z]$. Explícitamente,

$$C = V(F) \stackrel{\text{def}}{=} \{[x,y,z] \in \mathbb{P}^2 \text{ tal que } F(x,y,z) = 0\}.$$

Como en el caso afín, decimos que $\deg(F)$ es el grado de la curva C.
Definición (Parte afín y clausura proyectiva): Sea $F \in \mathbb{C}[X,Y,Z]$ homogéneo no-constante y sea $C = V(F) \subseteq \mathbb{P}^2$. La parte afín de C es $C_a := V(f) \subseteq \mathbb{A}^2$, donde $f = F(X,Y,1)$. Equivalentemente, $C_a \cong C \cap \mathbb{A}^2$ donde $\mathbb{A} \hookrightarrow \mathbb{P}^2$. Del mismo modo, decimos que

$$C_\infty := C \cap L \stackrel{\text{def}}{=} \{[x,y,0] \in \mathbb{P}^2 \mid F(x,y,0) = 0\} \subseteq L \cong \mathbb{P}^1$$

son los puntos al infinito de C.
Definición: Sea $p \in \mathbb{P}^2$ un punto. El anillo local de $\mathbb{P}^2$ en p es

$$\mathscr{O}_{\mathbb{P}^2, p} := \left\{ \frac{F}{G} \;\middle|\; F, G \in \mathbb{C}[X,Y,Z] \text{ homogéneos del mismo grado y } G(p) \neq 0 \right\}.$$

Si $p = [x_0, y_0, 1] \in \mathbb{A}^2 \subseteq \mathbb{P}^2$, entonces $\mathscr{O}_{\mathbb{P}^2, p} \xrightarrow{\sim} \mathscr{O}_{\mathbb{A}^2, (x_0, y_0)}$, $\frac{F}{G} \mapsto \frac{F(X,Y,1)}{G(X,Y,1)}$
Obs: El anillo $\mathscr{O}_{\mathbb{P}^2, p}$ **no** contiene $\mathbb{C}[X,Y,Z]$ como subanillo.
Definición: Sean $F, G \in \mathbb{C}[X,Y,Z]$ homogéneos no-constantes y $p \in \mathbb{P}^2$. Definimos la multiplicidad (o número) de intersección de F y G en p mediante

$$\mu_p(F,G) := \dim_{\mathbb{C}}(\mathscr{O}_{\mathbb{P}^2, p}/\langle F, G\rangle) \in \mathbb{N} \cup \infty.$$

Si $p = [x_0, y_0, 1] \in \mathbb{A}^2 \subseteq \mathbb{P}^2$, entonces $\mu_p(F,G) = \mu_{(x_0, y_0)}(f,g)$, donde $f = F(X,Y,1)$ y $g = G(X,Y,1)$.

Teorema de Bézout (1779): Sean $F, G \in \mathbb{C}[X,Y,Z]$ homogéneos no-constantes sin factores irreducibles comunes. Entonces,

$$\sum_{p \in V(F) \cap V(G)} \mu_p(F,G) = \deg(F) \cdot \deg(G).$$

Una última motivación que podría inspirar a seguir estudiando este tema sería la construcción que da los apuntes de Andreas Gathmann a partir de los Polinomios de Hilbert, así como también una consecuencia la cual es que **todo isomorfismo de $\mathbb{P}^n$ a $\mathbb{P}^n$ es lineal!**.

REFERENCIAS: P. Montero, Estructuras Algebraicas 2021-1
Andreas Gathmann:
https://www.mathematik.uni-kl.de/ gathmann/class/alggeom-2014/alggeom-2014-c12.pdf
https://www.mathematik.uni-kl.de/ gathmann/class/alggeom-2014/alggeom-2014-c13.pdf