Demostración del Teorema de Lefschetz

usando Teoría de Morse

Mario Pastrana Ramírez

Ayudantía 5, Octubre 2021

Contenidos

Contenidos

Problema 1

Consideremos el cono

$$X = \{(x, y, z) \in \mathbb{A}^3 : \; z^2 = xy\} \subseteq \mathbb{A}^3.$$

1. Probar que X es singular en $p := (0, 0, 0)$ y que X contiene a la recta $L = \{x = z = 0\} \cong \mathbb{A}^1$.
2. Probar que el ideal $I = \langle X, Z \rangle$ de $A = k[X, Y, Z]/\langle Z^2 - XY \rangle$ no es principal.
3. Deducir que $L \subseteq X$ no está definida por una única ecuación en $\mathcal{O}_{X,p}$.

Problema 1.1

Demostración:
Considere la recta $L = \{x = z = 0\} \cong \mathbb{A}^1$, claramente se tiene que

$$\{0\} \subsetneq L \subsetneq X \subsetneq \mathbb{A}^3,$$

como tenemos una cadena de cerrados propios, y $\dim \mathbb{A}^3 = 3$, podemos concluir que $\dim L = 1$ y $\dim X = 2$.
Para determinar que X es singular en p se debe probar que

$$\dim T_p X > \dim_p X.$$

Para calcular la dimensión del espacio tangente de X, observamos que $X = \mathcal{I}(f)$, donde $f = z^2 - xy$. La diferencial $d_{(x,y,z)}f : \mathbb{A}^3 \to \mathbb{A}^1$ está dada por la matriz

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y & -x & 2z \end{pmatrix}.$$

Problema 1.1

Un pequeño ejercicio de álgebra lineal nos dice que la dimensión del kernel de $d_{(x,y,z)}f$ es 3 en $(0,0,0)$ y es 2 en otro caso. Así hemos probado que X es singular solo en el punto $p = (0,0,0)$ pues

$$\dim T_{(0,0,0)}X \cong \dim \ker d_{(0,0,0)}f = 3 \gneq 2 = \dim_{(0,0,0)} X.$$

Problema 1

Consideremos el cono

$$X = \{(x, y, z) \in \mathbb{A}^3 : \ z^2 = xy\} \subseteq \mathbb{A}^3.$$

1. Probar que X es singular en $p := (0, 0, 0)$ y que X contiene a la recta $L = \{x = z = 0\} \cong \mathbb{A}^1$.
2. Probar que el ideal $I = \langle X, Z \rangle$ de $A = k[X, Y, Z]/\langle Z^2 - XY \rangle$ no es principal.
3. Deducir que $L \subseteq X$ no está definida por una única ecuación en $\mathcal{O}_{X,p}$.

Problema 1.2

Demostración:
Supongamos por contradicción que (2) no es cierto, es decir, el ideal $I = \langle X, Z \rangle$ de $k[X, Y, Z]/\langle Z^2 - XY \rangle$ es principal, luego $\mathcal{I}(L) = \langle f \rangle$, o equivalentemente,

$$\mathcal{O}(L) \cong \mathcal{O}(X)/\langle f \rangle.$$

Tras localizar en p se tendrá

$$\mathcal{O}_{L,p} \cong \mathcal{O}_{X,p}/\langle f \rangle,$$

y así, por Teorema de Krull obtendremos que

$$\dim T_p L = \dim T_p X - 1,$$

lo que es una contradicción.
Deducir (3) es directo de lo anterior, pues si L está definida por una única ecuación, entonces $\mathcal{I}(L) = \langle g \rangle$ y la contradicción se obtiene de manera idéntica.

Poblema 2

Pruebe que el cono

$$X = \{(x, y, z) \in \mathbb{A}^3 : \ z^2 = xy\} \subseteq \mathbb{A}^3$$

es normal.

Demostración:
En clases ya probamos que el cono

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{A}^3 : \ z^2 = x^2 + y^2\}$$

es normal, luego basta encontrar un morfismo birregular entre estos dos conos.

Problema 2

Considere el cambio de variables

$$
\begin{aligned}
x &= x + iy \\
y &= x - iy \\
z &= z
\end{aligned}
$$

pues en tal caso,

$$xy \mapsto (x+iy)(x-iy) = x^2 + y^2.$$

Este cambio es regular y su inversa estará dado por

$$
\begin{aligned}
x &= (x+y)/2 \\
y &= (x-y)/2i \\
z &= z
\end{aligned}
$$

que también es regular.

Problema 2

Así hemos probado que el cono

$$X = \{(x, y, z) \in \mathbb{A}^3 : \; z^2 = xy\} \subseteq \mathbb{A}^3$$

es normal.
Recordemos un teorema que nos dice que toda variedad X irreducible y normal, el conjunto de singularidades tiene dimensión menor igual que $\dim X - 2$. En el ejemplo del cono se puede observar que las singularidades es solo un punto (i.e. de $\dim 0$) mientras que la dimensión del cono es 2.

Contenidos

Teorema de Lefschetz

Nuestro objetivo es dar una demostración al **Teorema de la sección hiperplana de Lefschetz** que nos afirma que una variedad algebraica afin no singular compleja de dim n, en lugar de tener la topologia de algo de dimensión real 2n, tiene la topologia de algo real de dim n.
Explicitamente, se enuncia como sigue

Teorema de Lefschetz

Toda variedad algebraica afín no singular M de dimensión compleja k es homotopicamente equivalente a un CW-complejo finito $k-$dimesional.

Para ello, usaremos herramientas de geometría diferencial, principalmente la Teoría de Morse.

Contenidos

Preliminares

Comenzaremos dando resultados acerca de *variedades diferenciables* que se definen de manera distinta a las variedades algebraicas, pero conceptualmente es la misma idea.

Una variedad diferenciable (resp. compleja), es un espacio topológico localmente como un $\mathbb{R}^n$ (resp. $\mathbb{C}^n$), es decir, para cada punto p en la variedad existe un abierto que lo contiene que es homeomorfo a una abierto de $\mathbb{R}^n$ (resp. $\mathbb{C}^n$), diremos que n es la dimensión real (resp. compleja) de la variedad.

Estos homeomorfismos son llamados *cartas locales* y permiten asociar a cada punto en la variedad *coordenadas locales* que permite estudiar por ejemplo la diferenciabilidad de funciones al ser esta una propiedad *local*

Introducción a la teoría de Morse

Dada una función $f : M \to N$ entre variedades, diremos que un punto $p \in M$ es un **punto crítico** de f si es que la derivada $df_p : T_pM \to T_{f(p)}N$ no es sobreyectivo.

En lo que sigue, M será una variedad suave de dimensión n y $f : M \to \mathbb{R}$ una función suave.

Dado que $T_{f(p)}\mathbb{R}$ es un e.v. de dimensión 1, se tiene que p es un punto crítico de f, si y solo si, df_p es la función nula. Si $(x_1, \ldots, x_n)$ son coordenadas locales alrededor de p, esto significa que

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(p) = \cdots = \frac{\partial f}{\partial x_n}(p) = 0.$$

Definición

Un punto crítico $p \in M$ es **no degenerado** si es que en cartas locales $(x_1, \ldots, x_n)$, la matriz

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(p) \right)_{1 \leq i,j \leq n}$$

es invertible. En otro caso decimos que es un punto crítico **degenerado**.

Definición

Decimos que $f : M \to \mathbb{R}$ es una **función de Morse** si es que todos sus puntos críticos son no degenerados.

Definición

Sea $p \in M$ un punto crítico, el **hessiano** de f en p es la aplicación bilineal simétrica dada por

$$\begin{aligned} d^2 f_p : T_pM \times T_pM &\to \mathbb{R} \\ \left(\frac{\partial}{\partial x_i}|_p, \frac{\partial}{\partial x_j}|_p\right) &\mapsto \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(p) \end{aligned}.$$

Recuerdo

El **índice** de una forma bilineal B sobre un espacio vectorial V es la máxima dimensión de un subespacio V en cual B es definida negativa. Lo que equivale al número de valores propios negativos de cualquier representación matricial de B.

Definición

Definimos el **índice** de f en p como el índice de la aplicación bilineal $d^2 f_p$. Si f es clara del contexto escribiremos simplemente el índice de p.

Lema de Morse

Teorema (Lema de Morse)

Sea $p \in M$ un punto crítico no degenerado de f, luego existen coordenadas locales $(y_1, \ldots, y_n)$ tal que en una vecindad de p se tiene que

$$f = f(p) - (y_1)^2 - \cdots - (y_\lambda)^2 + (y_{\lambda+1})^2 + \cdots + (y_n)^2,$$

donde λ es el índice de f en p.

Corolario

Los puntos críticos no degenerados son *aislados*, esto es, si $p \in M$ es un punto crítico no degenerado, luego existe una vecindad U de p tal que p es el único punto crítico no degenerado en U.

Demostración: Sea $p \in M$ un punto crítico no degenerado de f, luego por el Lema de Morse, existen coordenadas locales $(y_1, \ldots, y_n)$ tal que en una vecindad de p se tiene que

$$f(y_1, \ldots, y_n) = f(p) - (y_1)^2 - \cdots - (y_\lambda)^2 + (y_{\lambda+1})^2 + \cdots + (y_n)^2,$$

y tras derivar parcialmente respecto a y_i se tiene que

$$\frac{\partial f}{\partial y_i}(q) = \pm 2 y_i(q),$$

por lo tanto, q es un punto crítico, si y solo si, $y_i(q) = 0$ para todo i, lo que solo es posible si $p = q$.

Resultados importantes

La Teoría de Morse nos permite entender y poder reconstruir la variedad analizando los puntos críticos de una función de Morse, enunciaremos los principales resultados.

Definición

El **conjunto de subnivel** de f es un subconjunto de M de la forma

$$M^a := \{x \in M : \ f(x) \leq a\}$$

para algún $a \in \mathbb{R}$.

Teorema

Sean $a, b \in \mathbb{R}$, con $a < b$ y tales que $f^{-1}([a, b]) \subseteq M$ es compacto y no contiene puntos críticos. Luego M^a es un retracto de M^b.

Teorema

Sea $p \in M$ un punto crítico no degenerado de f con $f(p) = c$ y sea $\delta > 0$ tal que $f^{-1}([c-\delta, c+\delta])$ es compacto y no contiene ningún otro punto crítico además de p. Luego, existe $\varepsilon > 0$ tal que $M^{c+\varepsilon}$ es homotópicamente equivalente a $M^{c-\varepsilon}$ con una $\lambda-$célula unida, donde λ es el índice de f en p.

Teorema

Supongamos que f tiene solo finitos puntos críticos, todos de ellos no degenerados y tales que M^a es compacto para todo $a \in \mathbb{R}$. Luego M es homotópicamente equivalente a un $CW-$complejo con una $\lambda-$célula para cada punto crítico de índice λ.

Contenidos

Supongamos ahora que $M \hookrightarrow \mathbb{R}^k$. Dado un punto $p \in \mathbb{R}^k$ definamos

$$\begin{aligned} L_p : M &\to \mathbb{R}, \\ q &\mapsto \|p - q\|^2. \end{aligned}$$

Como consecuencia del Teorema de Sard se tiene el siguiente resultado

Teorema

Para casi todo $p \in \mathbb{R}^k$ la función $L_p : M \to \mathbb{R}$ no tiene puntos no degenerados, es decir, L_p es una función de Morse.

Se puede observar que $L_p^{-1}((-\infty, a])$ es compacto para todo $a \in \mathbb{R}$.

Consideremos la variedad ortogonal a M dada por

$$N = \{(q, v) \in M \times \mathbb{R}^r : \ v \perp T_q M\},$$

que es de dimensión r y se puede incrustar de manera natural a $\mathbb{R}^{2r}$.
Sea $E : N \to \mathbb{R}^r$ dada por $(q, v) \mapsto q + v$.

Defición

Sea $q \in M$. Un punto $p \in \mathbb{R}^r$ se dice **punto focal de** (M, q) **con multiplicidad** μ si es que $p = E(q, v)$ para algún $v \perp T_q M$ se tiene que $dE(q, v)$ es no singular con *nulidad* $\mu > 0$.

Fijemos $q \in M$ y $(u_1, \ldots, u_r)$ coordenadas locales alrededor de q.

Definición

La **segunda forma fundamental de** M **en** q **en la dirección** v es la matriz

$$\left(v \cdot \frac{\partial^2 x}{\partial u_i \partial u_j}(q) \right)_{1 \leq i,j \leq k}$$

Definición

Dado $v \in (T_p M)^\perp$ con $|v| = 1$, la segunda forma fundamental de M en q en la dirección v es una matriz real simetrica, por lo tanto, con k valores propios reales (contando multiplicidad). Los denotaremos $K_1 \leq \cdots \leq K_k$ y diremos que son las **curvaturas principales de** M **en** q **en la dirección de** v.

Resultados importantes

Teorema

Dado $v \in (T_pM)^{\perp}$ con $|v| = 1$, los puntos focales de (M, q) sobre la recta $\{q + tv|\ t \in \mathbb{R}\}$ son exactamente de la forma $q + \frac{1}{K_i}v$ para todo $K_i \neq 0$. En particular, hay exactamente k puntos focales de (M, q), contando multiplicidad.

Teorema

Si $q \in M$ es un punto crítico no-degenerado de $L_p : M \to \mathbb{R}$ para algún $p \in \mathbb{R}^r$, entonces el índice de q como punto crítico de L_p es igual al número de puntos focales de (M, q) sobre el segmento $\overline{qp}$ contando multiplicidad.

Resultados importantes

Lema

Sea $M \subseteq \mathbb{C}^n$ es una subvariedad compleja de dimensión k y $q \in M$. Luego, los puntos focales de (M, q) son simétricos respecto a q, es decir, si $q + tv$ es un punto focal, entonces $q - tv$ es también un punto focal con la misma multiplicidad.

Lema

Sea $M \subseteq \mathbb{C}^n$ una variedad algebraica afín no singular y $p \in \mathbb{C}^n$ tal que todos los puntos críticos de la función $L_p : M \to \mathbb{R}$ son no degenerados. Entonces L_p tiene solo finitos puntos críticos.

Lema

Una variedad algebraica afín no singular $M \subseteq \mathbb{C}^n$ es una subvariedad compleja.

Contenidos

Demostración del Teorema de Lefschetz

Ya estamos en condiciones de probar el teorema principal.

Teorema de Lefschetz

Toda variedad algebraica afín no singular M de dimensión compleja k es homotopicamente equivalente a un CW-complejo finito $k-$dimesional.

Demostración

Identifiquemos $\mathbb{C}^n \cong \mathbb{R}^{2n}$, luego M será una subvariedad de dimensión *real* $2k$. Existirá algún $p \in \mathbb{R}^{2n}$ tal que la función $L_p : M \to \mathbb{R}$ sea una función de Morse, más aún, solo tendrá finitos puntos críticos. Ya observamos que $M^a = L_p^{-1}((-\infty, a])$ es cerrado y acotado, y luego compacto. Por lo tanto, podemos aplicar los teoremas anteriores para obtener que M es homotópicamente equivalente a un CW$-$complejo con una célula de dimensión λ para cada punto crítico de índice λ. Resta probar que todos los puntos críticos tienen índice a lo más k.

Demostración (continuación)

Sea $q \in M$ un punto crítico de L_p. El índice de q es igual al número de puntos focales de (M, q) sobre el segmento $\overline{qp}$. Pero el número de puntos focales sobre el segmento $\overline{qp}$ puede ser a lo más la mitad de puntos focales de (M, q) porque ellos se ubican simétricamente respecto a q. Finalmente, el número de puntos focales es igual al número de valores propios de la segunda forma fundamental. Dado que esta es una matriz $2k \times 2k$, solo puede poseer a lo más $2k$ valores propios, y como la mitad de esto es k se finaliza la demostración.