Ayudantía 4 (MAT426)

Lucas Montero

Departamento de Matemftica, Universidad Tónica Federico Santa Mará

1. Ejercicios:

1. Sea X un espacio topolgíco, demostrar que:

   a) X irreducible y $f : X \to Y$ función continua entre espacios topológicos, entonces $f(X) \subset Y$ es irreducible.

   b) Sea $S \subseteq X$ un subconjunto irreducible de X, entonces $\overline{S}$ es irreducible.

2. Determinar los componentes irreductibles de $X = V(x^2 + y^2 + z^2 - 4, y^2 + z^2 - 1) \subseteq \mathbb{A}^3$

3. Construir el blow-up de $X = V(y^2 - x^2(x + 1)) \subseteq \mathbb{A}^2$ en el punto $(0, 0) \in X$

2. Investigación:

1. <u>**Definición:**</u> Llamaremos a un anillo A **noetheriano** si satisface cualquiera de las siguientes condiciones equivalentes:

   a) Todo conjunto no-vacío de ideales en A posee un elemento maximal.

   b) Toda cadena ascendente de ideales en A es estacionaria.

   c) Todo ideal en A está finitamente generado.

2. <u>**Definición:**</u> Sea P un punto de X, el conjunto de funciones racionales que son regulares en P se denotan por $\mathscr{O}_P$, es claro que $\mathscr{O}_P$ es un anillo.

   Podemos denotar $\mathscr{O}_{X,P}$ si queremos especificar la dependencia de X.

   $\mathscr{O}_P$ es llamado el **anillo local de** P

3. <u>Ejercicio:</u> Un anillo es local $\Leftrightarrow$ el conjunto de las no-unidades forman un ideal.

   Indicación: Recordar que $\mathscr{O}_P$ posee un único ideal maximal.

4. <u>Ejercicio:</u> Mostrar que $\mathscr{O}_P/m_p = K$.

   Indicación: Recordar que $\mathscr{O}_P/m_p$ es una extensión algebraica de K.

5. <u>**Definición:**</u> Sea K un cuerpo, una **evaluación discreta** en K es una función $v : K^* \to \mathbb{Z}$ (dónde $K^* = K - \{0\}$ es un grupo multiplicativo de K), tal que

   a) $v(xy) = v(x) + v(y)$, es decir, v es un homomorfismo

   b) $v(x + y) \geq \min\{v(x), v(y)\}$ El conjunto que consiste de 0 y todos los $x \in K^*$ tales que $v(x) \geq 0$ es un anillo, llamado el **anillo de evaluación de** v, es un anillo de evaluación del cuerpo K.

   Aveces es conveniente extender v a todo K usando $v(0) = +\infty$. Para reducir se escribe **DVR**.

6. <u>Ejemplo:</u> Sea $K = \mathbb{Q}$, tomemos p un primo fijo, entonces $\forall x \in \mathbb{Q}$, tal que $x \neq 0$, puede ser escrito de la forma $p^a y$ donde $a \in \mathbb{Z}$ y el numerador y denominador de y son primos relativos de p. Definamos $v_p(x) = a$, luego el anillo de evaluación v_p es un anillo local de $\mathbb{Z}_{(p)}$

7. <u>**Proposición:**</u> Sea A un dominio noetheriano local de dimensión 1, $\mathfrak{m}$ su maximal ideal, $K = A/\mathfrak{m}$ es su cuerpo residual, entonces las siguientes expresiones son equivalentes:

   i) A es un DVR.

   ii) A es integralmente cerrado.

   iii) $\mathfrak{m}$ es un ideal principal.

   iv) $\dim_k(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2) = 1$

   v) Todo ideal distinto de 0 es una potencia de $\mathfrak{m}$

   vi) $\exists x \in A$ tal que todo ideal distinto de 0 es de la forma $(x^k), k \geq 0$.