Ayudantía 3 MAT426

Sebastián Fuentes Olguín

Universidad Técnica Federico Santa María

§1. Atlas algebraicos y funciones regulares

Ejercicio 1. Describir un atlas algebraico en $\mathbb{P}^n$ considerando el cubrimiento abierto dado por los abiertos estándar

$$U_i = \{[x_0, \dots, x_n] \in \mathbb{P}^n : x_i \neq 0\}$$

y considerando las cartas locales

$$\alpha_i : U_i \xrightarrow{\sim} \mathbb{A}^n, [x_0, \dots, x_n] \mapsto \left(\frac{x_0}{x_i}, \dots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \dots, \frac{x_n}{x_i}\right)$$

Demostración. En primer lugar notemos que claramente la colección $\{U_i\}$ es un cubrimiento abierto de $\mathbb{P}^n$. Las cartas α_i son biyectivas pues tienen inversa dada por

$$\alpha_i^{-1}(y_0, \dots, y_n) = [y_0, \dots, y_{i-1}, 1, y_{i+1}, \dots, y_n]$$

pues

$$\begin{aligned}
(\alpha_i^{-1} \circ \alpha)([x_0, \dots, x_n]) &= \alpha_i^{-1}\left(\frac{x_0}{x_i}, \dots, \frac{x_n}{x_i}\right) \\
&= \left[\frac{x_0}{x_i}, \dots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, 1, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \dots, \frac{x_n}{x_i}\right] \\
&= [x_0, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_n]
\end{aligned}$$

Más aún, son homeomorfismos. Tomemos $i = 0$. Si $F \subseteq U_0$ es cerrado, entonces su cerradura $\mathbb{P}^n$ es $\overline{F} = V(S)$ con $S \subseteq k[X_0, \dots, X_n]$ homogéneos. Podemos "hacer 1"la variable X_0 y ver S en $k[X_1, \dots, X_n]$, conjunto que denotaremos por S', ie, $S' = \{F(1, X_1, \dots, X_n) : F \in S\}$. Entonces se tendrá que $\alpha_0(F) = V(S')$. De una forma similar se prueba que α_0 es continua y así un homeomorfismo.

Sean $i \neq j$, y definamos $V_{ij} = \alpha_i(U_i \cap U_j)$. Notemos en primer lugar que

$$V_{ij} = \alpha_i(U_i \cap U_j) = \left\{\left(\frac{x_0}{x_i}, \dots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \dots, \frac{x_n}{x_i}\right) : x_j \neq 0\right\} = \mathbb{A}^n \setminus \{0\}$$

y por lo tanto los cambios de carta son:

$$\psi_{ij} := \alpha_j \circ \alpha_i^{-1} : \mathbb{A}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{A}^n \setminus \{0\},$$

Basta entonces probar que ψ_{ij} es birregular. Veremos entonces que las cartas α_i son birregulares. Tomemos $i = 0$. Una función regular u en U_0 es (localmente) de la forma $u = f/g$ para ciertos f, g polinomios homogéneos del mismo grado. Entonces

$$(\alpha_0^{-1})^*\left(\frac{f(x_0, \dots, x_n)}{g(x_0, \dots, x_n)}\right) = \frac{f \circ \alpha_0^{-1}(x_1, \dots, x_n)}{g \circ \alpha_0^{-1}(x_1, \dots, x_n)} = \frac{f(1, x_1, \dots, x_n)}{g(1, x_1, \dots, x_n)}$$

es localmente cociente de polinomios y por lo tanto es regular. Similarmente, se tiene que una función regular en $\mathbb{A}^n$ es (localmente) un cociente f/g (de hecho polinomios) con $f, g \in k[X_1, \dots, X_n]$, y luego

$$\alpha_0^*\left(\frac{f(x_1, \dots, x_n)}{g(x_1, \dots, x_n)}\right) = \frac{f(\frac{x_1}{x_0}, \dots, \frac{x_n}{x_0})}{g(\frac{x_1}{x_0}, \dots, \frac{x_n}{x_0})} = \frac{x_0^d f(\frac{x_1}{x_0}, \dots, \frac{x_n}{x_0})}{x_0^d g(\frac{x_1}{x_0}, \dots, \frac{x_n}{x_0})}$$

donde $d = \text{máx}\{\deg(f), \deg(g)\}$ y así α_0 es regular pues la expresión anterior define una función regular sobre U_0 (pues $x_0 \neq 0$). Se concluye así que los α_i son birregulares.

$\square$

Ejercicio 2. Probar que toda función regular en el espacio proyectivo definida globalmente es constante, ie,

$$\Gamma(\mathbb{P}^n, \mathscr{O}_{\mathbb{P}^n}) \cong k$$

y deducir que $\mathbb{P}^n$ no es una variedad algebraica afín.

Demostración. Sea $f \in \Gamma(\mathbb{P}^n, \mathscr{O}_{\mathbb{P}^n}) := \mathscr{O}_{\mathbb{P}^n}(\mathbb{P}^n)$. Dado que tenemos un atlas algebraico en $\mathbb{P}^n$, podemos mirar la regularidad de funciones a través de este. Así, tenemos que $f \in \mathscr{O}(\mathbb{P}^n)$ si y sólo si $f_i := f|_{U_i} \in \mathscr{O}(U_i)$ para todo i, que es equivalente al hecho de que $f_i \circ \alpha_i^{-1} : \mathbb{A}^n \to k$ sea regular para todo i. Por lo tanto

$$f_i \circ \alpha_i^{-1} \in \mathscr{O}_{\mathbb{A}^n}(\mathbb{A}^n) = k[X_1, \dots, X_n] \quad \forall i$$

Por lo tanto, para cada i existe $P_i \in k[X_1, \dots, X_n]$ de tal forma que

$$\begin{aligned} f_i([x_0, \dots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \dots, x_n]) = P \circ \alpha_i =& P\left(\frac{x_0}{x_i}, \dots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \dots, \frac{x_n}{x_i}\right) \\ =& P(x_0, \dots, x_n) \end{aligned}$$

Ahora, notemos que el polinomio P no depende de las coordenadas homogéneas, lo cual significa que P es homogéneo de grado 0, ie, $P \in k$. Así, tenemos que f es constante en cada U_i. Notemos ahora que $[1, \dots, 1] \in \bigcap_i U_i$, y dado que $\mathscr{O}_{\mathbb{P}^n}$ es un haz y se cumple

$$f|U_i = f([1, \dots, 1]) \in k \Rightarrow f \in k$$

Así, deducimos que $\Gamma(\mathbb{P}^n, \mathscr{O}_{\mathbb{P}^n}) \cong k$.
Para finalizar, si $\mathbb{P}^n$ fuera una variedad afín, recordemos que el Nullstellensatz nos da una biyección entre puntos de $\mathbb{P}^n$ e ideales maximales de $\mathscr{O}(\mathbb{P}^n)$, y como el último es un cuerpo, ie, posee un único ideal maximal, $\mathbb{P}^n$ se reduciría a un único punto. Así, $\mathbb{P}^n$ no es afín. $\square$

§2. Variedades completas y anillos de valuación

Motivación. Dado que las variedades algebraicas están fuertemente ligadas a la topología (pues son esencialmente espacios topológicos) es que nos gustaría encontrar análogos algebraicos de las propiedades clásicas de topología. En particular en el caso complejo, ie $k = \mathbb{C}$, la compacidad se refleja de buena forma en el concepto de variedad completa. Sin embargo, en esta ocasión no ahondaremos en esta relación, sino más bien en cómo explicar el concepto de completitud de una variedad mediante criterios algebraicos. En esta línea aparecerá el concepto de anillo de valuación, que nos llevará a concluir que la completitud se puede mirar a través del anillo local de la variedad.

Definición 1 (Variedad completa)**.** *Sea X una variedad algebraica. Decimos que X es completa si para toda variedad algebraica Y la proyección $p_2 : X \times Y \to Y$ es una aplicación cerrada.*

Ejemplo 2. *Consideremos la proyección $\mathbb{A}^1 \times \mathbb{A}^1 \to \mathbb{A}^1, \quad (x, y) \mapsto y$. Dicha proyección no es cerrada pues el conjunto $\{(x, y) : xy = 1\}$ es cerrado en $\mathbb{A}^1 \times \mathbb{A}^1$, pero su proyección es $\mathbb{A}^1 \setminus \{0\}$ que no es cerrado. Por lo tanto la recta afín no es completa.*

Proposición 3. *Sean X, Y variedades algebraica, con X completa. Entonces se verifica que:*

1. *Si $Z \subseteq X$ es una subvariedad cerrada, Z es completa.*
2. *Si Y es separada y $f : X \to Y$ es un morfismo regular, $f(X) \subseteq Y$ es cerrada completa.*
3. *Si Y es completa, entonces $X \times Y$ es completa.*

Demostración.

1. Si V es una variedad, basta notar que la proyección $Z \times V$ se factoriza como $Z \times V \hookrightarrow X \times V \to V$ mediante la inclusión y la proyección, siendo ambos cerrados.
2. Consideremos el grafo $\Gamma_f = \{(x, f(x))\} \subseteq X \times Y$, el cual es cerrado pues Y es separada. Notamos entonces que $f(X) = p_2(\Gamma_f)$ será cerrado pues X es completa.
3. Notemos que, para una variedad Z, la proyección $X \times Y \times Z \to Z$ se factoriza como la composición de proyecciones $X \times Y \times Z \to Y \times Z \to Z$.

□

Además de las propiedades anteriores, el siguiente resultado afirma que basta observar la completitud en las componentes irreducibles de una variedad.

Lema 4. *Una variedad es completa si y sólo si sus componentes irreducibles son completas.*

Demostración. Sabemos que las componentes irreducibles son cerradas, y por lo tanto son completas por el lema anterior. Recíprocamente, si suponemos que las componentes X_i de una variedad X son completas, si Z es cerrado en $X \times Y$ entonces $Z_i = Z \cap (X_i \times Y)$ es cerrado en $X_i \times Y$ y así $p_2(Z_i)$ es cerrado en Y. Finalmente $p_2(Z) = \bigcup p_2(Z_i)$. □

En la primera sección probamos que $\Gamma(\mathbb{P}^n, \mathscr{O}_{\mathbb{P}^n}) \cong k$, y más aún, en cátedra se probó que toda variedad proyectiva e irreducible verifica $\Gamma(X, \mathscr{O}_X) \cong k$. La prueba de lo anterior se extiende se forma idéntica al caso de variedades completas y podemos entonces

Teorema 5. *Si X es una variedad completa e irreducible entonces $\mathscr{O}(X) \cong k$.*

Proposición 6. *Toda variedad afín completa e irreducible consiste de un único punto.*

Demostración. Si X es afín, completa e irreducible, entonces por el Teorema 5 se tendrá que $\mathscr{O}(X) \cong k$. Nullstellensatz nos permite entonces concluir que X es un único punto. □

En contraste al resultado anterior, veremos que en el caso proyectivo toda variedad será completa. Esto ya fue demostrado en cátedra (implícitamente, pues no se dio la definición de variedad completa), sin embargo, introduciremos conceptos nuevos, los cuales nos permitirán redemostrar este hecho mediante argumentos algebraicos.

§2.1. Anillos de valuación

Recuerdo . *Un anillo A se dice* **local** *si posee un único ideal maximal $\mathfrak{m}$. El cuerpo $A/\mathfrak{m}$ se conoce como el cuerpo residual.*

Definición 7. *Sea k un cuerpo. Un subanillo propio $A \subseteq k$ se dirá* **anillo de valuación** *si para cada $x \in k^\times$, $x \in A$ o $x^{-1} \in A$.*

Observación 8. *Existe una interesante propiedad involucrando el concepto de anillo de valuación: Si $A \subseteq k$ es subanillo del cuerpo k entonces su clausura integral $\overline{A}$ corresponde a la intersección de todos los anillos de valuación de k que contienen a A.*

Lema 9. *Un anillo A es local si y sólo si $A - A^\times$ es un ideal.*

Demostración. Si $A - A^\times$ es un ideal entonces contiene todo ideal propio por lo que es el único maximal. Por otro lado, cada elemento de $A - A^\times$ pertenece a un ideal maximal, por lo que si existe un único maximal entonces debe ser $A - A^\times$. □

Teorema 10. *Todo anillo de valuación es local.*

Demostración. Sea A un anillo de valuación y denotamos $\mathfrak{m} = A - A^\times$. Notemos que si $x \notin A^\times$ entonces $xy \notin A^\times$ para todo $y \in A$. Por lo tanto $\mathfrak{m}A \subseteq \mathfrak{m}$. Además si $x, y \in \mathfrak{m}$ entonces $x/y \in A$ o $y/x \in A$. Por lo tanto $(x/y+1)y = x+y$ o $(y/x+1)x = y+x$ están en $\mathfrak{m}$, por ende $\mathfrak{m}$ es ideal y por el lema anterior A es local. □

§2.2. Criterio de valuación para la completitud y variedades proyectivas

Recuerdo . *Sea X variedad algebraica y $P \in X$. El anillo de gérmenes de funciones regulares en P, denotado $\mathscr{O}_{X,P}$, es un anillo local cuyo ideal maximal es*

$$\mathfrak{m}_P = \{f \in \mathscr{O}_{X,P} : f(P) = 0\}$$

y verifica $\mathscr{O}_{X,P}/\mathfrak{m}_P \cong k$.

Luego de revisar los conceptos y resultados anteriores, podemos entonces enunciar el siguiente resultado, el cual nos da un claro criterio para verificar la completitud de una variedad, mediante los anillos de valuación del cuerpo de funciones racionales.

Teorema 14. *Sea X una variedad tal que para toda subvariedad $Z \subseteq X$ y todo anillo de valuación A del anillo de funciones racionales $k(Z)$, existe un punto $P \in Z$ tal que $\mathscr{O}_{X,P} \subseteq A$. Entonces X es completa.*

Para probar nuestro resultado final, utilizaremos el siguiente lema.

Lema 15. *Sea A anillo de valuación del cuerpo k. Entonces para todos $x_0, \ldots, x_n \in k^\times$ existe $\lambda \in k^\times$ de tal forma que $\lambda x_0, \ldots, \lambda x_n \in A$ y $\lambda x_i \in A^\times$ para al menos un i.*

Demostración. Usamos inducción. Para $n = 0$ basta elegir $\lambda = 1/x_0$ y así $\lambda x_0 = 1 \in A^\times$. Si $\lambda x_0, \ldots, \lambda x_{n-1} \in A$ con $\lambda x_i \in A^\times$ para algún $i < n$. Si $\lambda x_n \in A$ el resultado se tiene. Si $1/(\lambda x_n) \in A$ escogemos $\lambda' = 1/x_n$. Asi $\lambda' x_j = x_j/x_n = \lambda x_j/(\lambda x_n) \in A$ para $j < n$ y $\lambda' x_n = 1 \in A^\times$ □

Finalmente, el criterio anterior nos permite redemostrar el siguiente teorema.

Teorema 16. *Toda variedad proyectiva es completa.*