# Ayudantía 2 (MAT426)

Tobías Martínez

# 1. Ejercicios

1. Sea $C = \{(x, y) \in \mathbb{A}^2 : y^2 = x^3\}$. Probar que $C$ es irreducible y calcular $I(C)$. Deducir que $C$ no es isomorfa a $\mathbb{A}^1$.

2. Probar que $\Gamma(\mathbb{P}^n, \mathscr{O}_{\mathbb{P}^n}) \cong k$. Deducir que $\mathbb{P}^n$ no es una variedad afín.

# 2. Grupos Algebraicos

*Motivación:* En topología se estudian los grupos topológicos que son grupos $G$ que además son espacios topológicos y que la operación del grupo $G \times G \to G$, $(x, y) \mapsto xy$ y la operación de inversos $G \to G$, $x \mapsto x^{-1}$ son funciones continuas. En el contexto de la Geometría Algebraica tenemos la siguiente definición.

**Definición 2.1.** Un *grupo algebraico* es una variedad $X$ con morfismos regulares

$$m : X \times X \to X$$

y

$$i : X \to X$$

satisfaciendo las reglas usuales de multiplicación e inversa en un grupo. Un morfismo de grupos algebraicos es una función $\varphi : G \to H$ que es una función regular y un homomorfismo de grupos.

Un *grupo algebraico* es un grupo que además es una variedad algebraica tal que el producto y la inversión son funciones regulares. Un morfismo de grupos algebraicos es un homomorfismo de grupos regular.

## 2.1. Ejemplos

1. Los grupos finitos.

2. El grupo aditivo $\mathbb{G}_a$, es el grupo $(k, +)$, i.e., la variedad afín $\mathbb{A}^1$ bajo la suma.

3. El grupo multiplicativo $\mathbb{G}_m$ es el grupo $(k^\times, \times)$, i.e., el conjunto abierto $\mathbb{A}^1 \backslash \{0\}$ bajo la multiplicación.

4. El grupo $GL_n = GL_n(k)$ es el grupo de matrices $n \times n$ sobre $k$ con determinante distinto de cero. $GL_n = \mathbb{A}^{n^2} \backslash \{M \in \mathbb{A}^{n^2} | det(M) = 0\}$ y por tanto $G_n$ es abierto y en consecuencia una variedad algebraica. El producto $GL_n \times \mathrm{GL}_n \to \mathrm{GL}_n$ es regular pues está dado por polinomios sobre $k$ y recordemos que $A \in \mathrm{GL}_n$,
$$A^{-1} = \frac{1}{detA} \mathrm{Adj}(A)$$
donde $\mathrm{Adj}(A)$ es la transpuesta de la matriz de cofactores (cuya entrada $ij$ se obtiene como $(-1)^{i+j} det(A_{ij})$ donde $A_{ij}$ se obtiene de $A$ eliminando la fila $i$ y la columna $j$.) Por lo que también es regular.

5. $\mathrm{PGL}_n := \mathrm{PGL}_n(k) = GL_n / Z(GL_n)$ donde $Z(GL_n)$ es el centro de $GL_n$ es decir, el conjunto de matrices escalares, es una variedad y para ver que el producto y la inversión son regulares, se procede análogo a $GL_n$.

## 2.2. Acciones de grupos

**Definición 2.2.** Por una ***acción*** de un grupo algebraico $G$ sobre una variedad algebraica $X$ nos referimos a una función regular
$$\varphi : G \times X \to X$$
satisfaciendo las reglas usuales de composición, esto es, $\varphi(g, \varphi(h, x)) = \varphi(gh, x)$. Expresaremos $g(p) := \varphi(g, p)$. Por una acción proyectiva sobre una variedad $X \subset \mathbb{P}^n$ nos referimos a una acción de $G$ sobre $\mathbb{P}^n$ tal que $\varphi(g, X) = X$ para todo $g \in G$. La órbita de $G$ en un punto $x \in X$ es el conjunto $O_x = \{g(x) | g \in G\}$.

### 2.2.1. Ejemplos

1. $\mathrm{PGL}_{n+1}K$ actúa sobre $\mathbb{P}^n$.

2. *(Ejercicio)* Sea $X \subset \mathbb{P}^n$ cualquier variedad. Mostrar que el subgrupo

$$Aut(X, \mathbb{P}^n) := \{A \in \mathrm{PGL}_{n+1}K : A(X) = X\},$$

   es un grupo algebraico llamado *el grupo de movimientos proyectivos de X.*

3. $\mathrm{PGL}_2K$ actúa sobre $\mathbb{P}^2$.

4. $\mathrm{PGL}_2K$ actúa sobre $\mathbb{P}^3$.

5. $\mathrm{PGL}_3K$ actúa sobre $\mathbb{P}^5$.

## 2.3. Cocientes

Cuando se habla de acciones de grupo, se puede formar cocientes, esto es, tomar el conjunto de órbitas. Estamos interesados, en el contexto de la acción de un grupo algebraico $G$ sobre una variedad $X$, sobre lo que debería ser un cociente, ingenuamente, es una variedad $Y$ que se corresponde punto a punto con las órbitas de $G$ sobre $X$, tal que el correspondiente morfismo $X \to Y$ es regular, o de forma equivalente, un morfismo sobreyectivo de variedades $\pi : X \to Y$, tal que $\pi(p) = \pi(q)$ si y sólo si $g(p) = q$ para algún $g \in G$. De hecho debemos pedir que sea el mejor posible, esto es, diremos que $Y$ junto con un morfismo regular $X \to Y$ es un cociente de $X$ por la acción de $G$, si para cualquier morfismo regular $\rho : X \to Z$ en alguna otra variedad $Z$, se factoriza a través de $\pi$ si y sólo si $\rho(p) = \rho(g(p))$ para toda $g \in G$ y todo $p \in X$.

Esta última condición garantiza unicidad si el cociente existe por que de hecho no tiene en general por qué existir.
Por ejemplo si tomamos $K^\times = GL_1K$ actuando sobre $\mathbb{A}^1$, vemos que sólo hay dos órbitas, $\{0\}$ y $\mathbb{A}^1 \backslash \{0\}$. Pero no existe un morfismo sobreyectivo de $\mathbb{A}^1$ a una variedad de dos puntos.

El primer problema que se encuentra es justamente el anterior, que una órbita esté contenida en la clausura de otra y así la topología cociente dada por la aplicación que envíe un punto a su órbita puede ser patológica.

Lo que podemos hacer es restringir nuestra atención a un subconjunto abierto $U$ de la variedad $X$ y tratar de tomar el cociente de $U$ por $G$. El estudio de cuando tales cocientes existen y cuando son compactos, es profundo, llamado Teoría de invariantes geométricos.

Una circunstancia en la que siempre existen buenos cocientes es el caso de acciones de grupos finitos, (por ejemplo a través de un morfismo de $G$ en un subgrupo del grupo de morfismos birregulares de $X$).

### 2.3.1. Cocientes de variedades afines por grupos finitos.

**Proposición 2.3.** *Supongamos que un grupo finito $G$ actúa sobre una variedad afín $X$ digamos el lugar de ceros de $\{f_\alpha(x_1, \ldots, x_n)\}$ en $K^n$. Entonces el cociente de $X$ por $G$ existe.*

*Sketch de la demostración:*

1. Sea $I(X)$ el ideal de $X$ y $\mathscr{O}(X) = K[x_1, \ldots, x_n]/I(X)$ su álgebra de funciones regulares. Por el requerimiento de cocientes aplicado a $Z = \mathbb{A}^1$, la funciones regulares sobre $Y$ son exactamente las funciones regulares sobre $X$ invariantes bajo la acción de $G$, i.e., el álgebra de funciones regulares de $Y$ debe ser $\mathscr{O}(Y) = \mathscr{O}(X)^G \subset \mathscr{O}(X)$.

2. Mostrar que $\mathscr{O}(Y)$ es finitamente generada sobre $K$.
   Para ello notar que se puede escribir $\mathscr{O}(X)$ en la forma $(K[x_1, \ldots, x_m]/I)$, donde $G$ actúa sobre los generadores $x_i$ por permutación, todo lo que hay que hacer en agrandar el conjunto $\{z_i\}$ de generadores añadiendo las imágenes de los $z_i$ bajo todos los $g \in G$.
   Luego, obeservar que tenemos una sobreyección

$$K[x_1, \ldots, x_n]^G \twoheadrightarrow (K[x_1, \ldots, x_m]/I)^G,$$

a un elemento $\overline{\alpha} \in (K[x_1, \ldots, x_m]/I)^G$, le corresponde a un elemento $\alpha \in K[x_1, \ldots, x_m]$ congrente a sus imágenes $g^*(\alpha)$ mod. I y así la media

$$\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g^*(\alpha) \in K[x_1, \ldots, x_m],$$

será invariante bajo la acción de $G$ y su imagen será $\overline{\alpha}$.

3. Así, es suficiente mostrar que $K[x_1, \ldots, x_m]^G$ es finitamente generado sobre $K$. Para ello, notar que está intercalado
$$K[x_1, \ldots, x_m]^{S_m} \subset K[x_1, \ldots, x_m]^G \subset K[x_1, \ldots, x_m].$$
donde $S_m$ es el grupo simétrico en $m$ letras. El anillo $K[x_1, \ldots, x_m]^{S_m}$ es justamente el anillo de polinomios $K[y_1, \ldots, y_m]$, donde las $y_i$ son funciones simétricas elementales de las $x_j$ y como $K[x_1, \ldots, x_m]$ es un módulo finitamente generado sobre $K[y_1, \ldots, y_m]$, entonces $K[x_1, \ldots, x_m]^G$ también lo es.

4. Como $\mathscr{O}(Y)$ es finitamente generada, entonces $\mathscr{O}(Y) = K[w_1, \ldots, w_m]/(g_1(w), \ldots, g_l(w))$ con $w = (w_1, \ldots, w_m)$, y así tomamos a $Y$ como el lugar de ceros de los polinomios $g_\alpha(w)$ en $K^m$.

5. Probar que los puntos de $Y$ corresponden 1-1 a órbitas de $G$ sobre $X$.

6. Probar que $\pi$ es sobreyectiva.

7. (Ejercicio) Probar que $Y$ junto con $\pi : X \to Y$ satisface la propiedad universal.

## Referencias

[1] J. Harris. Algebraic Geometry: An Introduction, Springer-Verlag New York, Inc., 1992.