Ayudantía 1 (MAT426 2021-2)

Pedro Montero

Departamento de Matemática, Universidad Técnica Federico Santa María

1. Ejercicios de clases

1. Sea X un espacio topológico y sea G un grupo abeliano. Dado un punto $x_0 \in X$, definimos el **prehaz rascacielos** $i_{x_0}(G)$ por
$$(i_{x_0}(G)(U) = \begin{cases} \{0\} & \text{si } x_0 \notin U \\ G & \text{si } x_0 \in U \end{cases}$$
para todo abierto $U \subseteq X$. Probar que $i_{x_0}(G)$ es un haz.

2. Sea $\mathscr{F}$ un prehaz de grupos abelianos en un espacio topológico X, y sea $\mathscr{F}^+$ su haz asociado. Probar que para todo $x \in X$ se tiene un isomorfismo de grupos abelianos $\mathscr{F}_x \cong \mathscr{F}_x^+$.

2. Discusión: Límites y colímites en una categoría

El objetivo de esta sección es discutir los conceptos de *límites y cólimites* en una categoría $\mathscr{C}$ tal que todos los objetos de $\mathscr{C}$ son conjuntos (eventualmente con estructura adicional).

Consideremos $(I, \leq)$ un conjunto parcialmente ordenado[1].

2.1. Límites (proyectivos)

Sea $\{A_i\}_{i\in I}$ una familia de objetos en $\mathscr{C}$ indexada por I y supongamos que existen morfismos
$$f_{ij} : A_j \longrightarrow A_i \text{ para cada } i \leq j$$
verificando las siguientes propiedades:

(P1) Para cada $i \in I$, el morfismo f_{ii} es la identidad Id_{A_i} en A_i.

(P2) Para todos $i \leq j \leq k$ en I, se tiene que $f_{ik} = f_{ij} \circ f_{jk}$, i.e., el diagrama
$$\begin{tikzcd} A_k \arrow[r, "f_{jk}"'] \arrow[rr, bend left, "f_{ik}"] & A_j \arrow[r, "f_{ij}"'] & A_i \end{tikzcd}$$
es conmutativo.

Entonces, decimos que el par $(\{A_i\}_{i\in I}, \{f_{ij}\}_{i,j\in I}$ es un **sistema proyectivo** o **sistema inverso** sobre I.

Definimos el **límite proyectivo** o **límite inverso** del sistema proyectivo $(\{A_i\}_{i\in I}, \{f_{ij}\}_{i,j\in I}$ como
$$\varprojlim_{i\in I} A_i := \left\{ (a_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} A_i \text{ tal que } a_i = f_{ij}(a_j) \text{ para todo } i \leq j \right\}.$$
En particular, el límite $\varprojlim_{i\in I} A_i$ viene dotado de *morfismos de proyección*
$$\pi_j : \varprojlim_{i\in I} A_i \to A_j,\ (a_i)_{i\in I} \mapsto a_j$$
para todo $j \in I$.

Ejemplos.

1. Sea p un número primo. Consideremos para todo $i \in \mathbb{N}$ el objeto (en la categoría de anillos conmutativos con unidad) dado por
$$A_i := \mathbb{Z}/p^i\mathbb{Z}$$
junto con los morfismos de proyección naturales $f_{ij} : \mathbb{Z}/p^j\mathbb{Z} \twoheadrightarrow \mathbb{Z}/p^i\mathbb{Z}$ para todo $i \leq j$. El límite proyectivo
$$\mathbb{Z}_p := \varprojlim_{i\in \mathbb{N}} \mathbb{Z}/p^i\mathbb{Z}$$
es un anillo conmutativo con unidad, llamado el **anillo de enteros p-ádicos**.

[1] Algunos autores requieren que $(I, \leq)$ sea **dirigido**, i.e., para todos $i, j \in I$ existe $k \in I$ tal que $i \leq k$ y tal que $j \leq k$.

2. En la categoría de conjuntos, si consideramos una familia de conjuntos $\{X_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ tal que

$$X_0 \supseteq X_1 \supseteq X_2 \supseteq \cdots \supseteq X_n \supseteq X_{n+1} \supseteq \cdots$$

y si consideramos $f_{ij} : X_j \hookrightarrow X_i$ como la inclusión para todo $i \leq j$, entonces

$$\varprojlim_{i\in\mathbb{N}} X_i = \bigcap_{i\in\mathbb{N}} X_i$$

es la intersección de dichos conjuntos.

2.2. Colímites

Sea $(I, \leq)$ un conjunto dirigido parcialmente ordenado. Sea $\{A_i\}_{i\in I}$ una familia de objetos en $\mathscr{C}$ indexada por I y supongamos que existen morfismos

$$f_{ij} : A_i \longrightarrow A_j \text{ para cada } i \leq j$$

verificando las siguientes propiedades:

(I1) Para cada $i \in I$, el morfismo f_{ii} es la identidad Id_{A_i} en A_i.

(I2) Para todos $i \leq j \leq k$ en I, se tiene que $f_{ik} = f_{jk} \circ f_{ij}$, i.e., el diagrama

$$\begin{tikzcd} A_i \arrow[r, "f_{ij}"'] \arrow[rr, bend left, "f_{ik}"] & A_j \arrow[r, "f_{jk}"'] & A_k \end{tikzcd}$$

es conmutativo.

Entonces, decimos que el par $(\{A_i\}_{i\in I}, \{f_{ij}\}_{i,j\in I}$ es un **sistema directo** o **sistema inductivo** sobre I.

Definimos el **colímite** o **límite directo** o **límite inductivo** del sistema inductivo $(\{A_i\}_{i\in I}, \{f_{ij}\}_{i,j\in I}$ como

$$\varinjlim_{i\in I} A_i := \bigsqcup_{i\in I} A_i \Big/ \sim$$

donde

> Para todos $a_i \in A_i$ y $a_j \in A_j$ se tiene que $a_i \sim a_j$ en $\varinjlim_{i\in I} A_i$ si existe $k \in I$ con $i, j \leq k$ tal que $f_{ik}(a_i) = f_{jk}(a_j)$.

En particular, el límite $\varinjlim_{i\in I} A_i$ viene dotado de *morfismos canónicos*

$$\varphi_j : A_j \to \varinjlim_{i\in I} A_i,\ a_j \mapsto [a_j]$$

para todo $j \in I$.

Ejemplos.

1. Sea $\mathscr{F}$ un prehaz en X. El **tallo** de $\mathscr{F}$ en un punto $x \in X$ está dado por

$$\mathscr{F}_x := \varinjlim_{U\ni x} \mathscr{F}(U) = \left(\coprod_{\substack{U\subseteq X \text{ abierto} \\ \text{tal que } x\in U}} \mathscr{F}(U) \right) / \sim,$$

donde

> Para todas $s \in \mathscr{F}(U)$ y $t \in \mathscr{F}(V)$ se tiene que $(s, U) \sim (t, V)$ en $\mathscr{F}_x$ si existe $W \subseteq U \cap V$ abierto tal que $x \in W$ y tal que $s|_W = t|_W$ en $\mathscr{F}(W)$.

Aquí, el orden parcial en el conjunto $I = \{U \subseteq X \text{ abierto tal que } x \in U\}$ está dado por la inclusión[2]. Además, si $U \subseteq V$ entonces definimos $f_{UV} := r_{V,U} : \mathscr{F}(V) \to \mathscr{F}(U),\ s \mapsto s|_U$.

[2] i.e., $U \leq V$ si y sólo si $U \subseteq V$.

2. En la categoría de conjuntos, si consideramos una familia de conjuntos $\{X_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ tal que

$$X_0 \subseteq X_1 \subseteq X_2 \subseteq \cdots \subseteq X_n \subseteq X_{n+1} \subseteq \cdots$$

y si consideramos $f_{ij} : X_i \hookrightarrow X_j$ como la inclusión para todo $i \leq j$, entonces

$$\varinjlim_{i\in\mathbb{N}} X_i = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} X_i$$

es la unión de dichos conjuntos.