Ayudantía 1 (MAT426)

Pedro Montero

Departamento de Matemática, Universidad Técnica Federico Santa María

1. Sea X un espacio topológico, y sea $\mathbf{Top}(X)$ la categoría cuyos objetos son los abiertos de X, y cuyos morfismos son:
$$\mathrm{Hom}(U,V) = \begin{cases} \{i : U \hookrightarrow V\} & \text{si } U \subseteq V \\ \emptyset & \text{si } U \not\subseteq V \end{cases}$$
Describir geométricamente la composición de morfismos en $\mathbf{Top}(X)$.

2. Sea $\mathscr{C}$ una categoría (pequeña) y sea $A \in \mathrm{Obj}(\mathscr{C})$ un objeto. Recordemos que el functor (contravariante) de Yoneda está dado por
$$h^A : \mathscr{C} \longrightarrow \mathbf{Conj},$$
donde $h^A(B) = \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(B,A)$ para todo objeto $B \in \mathrm{Obj}(\mathscr{C})$, y para todo morfismo $f : B \to C$ en $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(B,C)$ definimos $h^A(f) : \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(C,A) \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(B,A)$ mediante la composición $(g : C \to A) \mapsto (g \circ f : B \to A)$.

   El objetivo de este ejercicio es probar la versión contravariante del **Lema de Yoneda**, que informalmente afirma que es posible recuperar un objeto de una categoría si conocemos todos los morfismos hacia él.

   (a) Sea $F : \mathscr{C} \to \mathbf{Conj}$ un functor contravariante. Denotamos por $\mathrm{Nat}(h^A, F)$ la colección de todas las transformaciones naturales $\Phi : h^A \to F$. Describir la transformación natural $\Phi : h^A \to F$ en objetos $B \in \mathrm{Obj}(\mathscr{C})$ y en morfismos $f : B \to C$ en $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(B,C)$.

   (b) Con la notación del punto (a), deducir que para todo objeto $B \in \mathrm{Obj}(\mathscr{C})$ y todo morfismo $f : B \to A$ en $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(B,A)$ se tiene
$$\begin{tikzcd} \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A,A) \arrow[r, "h^A(f)"] \arrow[d, "\Phi_A"'] & \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(B,A) \arrow[d, "\Phi_B"] \\ F(A) \arrow[r, "F(f)"] & F(B) \end{tikzcd}$$
   diagrama conmutativo.

   (c) Considerando el diagrama del punto (b), sea $u \in F(A)$ la imagen de Id_A vía Φ_A (i.e., $u = \Phi_A(\mathrm{Id}_A)$). Probar que $\Phi_B(f) = F(f)(u)$ para todo $f : B \to A$ en $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(B,A)$, y deducir que la transformación natural $\Phi : h^A \to F$ está completamente determinada por u.

   (d) Considerando el diagrama del punto (b), probar que cada elemento $u \in F(A)$ define una transformación natural $\Phi : h^A \to F$ mediante la fórmula $\Phi_B(f) := F(f)(u)$, y concluir que
$$\mathrm{Nat}(h^A, F) \cong F(A).$$

3. Sea X un espacio topológico y sea G un grupo abeliano. Dado un punto $x_0 \in X$, definimos el **prehaz rascacielos** $i_{x_0}(G)$ por
$$(i_{x_0}(G)(U) = \begin{cases} \{0\} & \text{si } x_0 \notin U \\ G & \text{si } x_0 \in U \end{cases}$$
para todo abierto $U \subseteq X$. Probar que $i_{x_0}(G)$ es un haz.

4. **Discusión:** El objetivo de este ejercicio es discutir libremente sobre alguna noción o resultado que hayan sido mencionados en el curso o en las referencias, pero no definidos formalmente o sólo rápidamente. En esta ayudantía, discutiremos sobre el concepto de **propiedad universal**:

   Definición: Sea $F : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ un functor (covariante) entre dos categorías $\mathscr{C}$ y $\mathscr{D}$. Sean $X \in \mathrm{Obj}(\mathscr{D})$ y $A \in \mathrm{Obj}(\mathscr{C})$ dos objetos. Un **morfismo universal de** X **a** F es un par $(A, u : X \to F(A))$ en $\mathscr{D}$ que verifica la siguiente propiedad (conocida usualmente como **propiedad universal**):

   Para todo morfismo de la forma $f : X \to F(A')$ en $\mathscr{D}$, *existe un único* morfismo $h : A \to A'$ en $\mathscr{C}$ tal que el siguiente diagrama conmuta
$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "u"] \arrow[dr, "f"'] & F(A) \arrow[d, dotted, "\exists! F(h)"] \\ & F(A') \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} A \arrow[d, dotted, "\exists! h"] \\ A' \end{tikzcd}$$

En este caso, decimos que el par (A, u) verifica una **propiedad universal**.

(a) Proponer una definición análoga de un **morfismo universal de** F **a** X, considerando un diagrama de la forma

$$\begin{tikzcd}
X & F(A) \arrow[l, "u"'] & & A \\
& F(A') \arrow[ul, "f"] \arrow[u, dotted, "\exists! F(h)"'] & & A' \arrow[u, dotted, "\exists! h"']
\end{tikzcd}$$

(b) Discutir sobre propiedades universales conocidas. Por ejemplo, considerar la propiedad universal del producto (ver Vakil, §1.1), la propiedad universal de la *hacificación* $j : \mathscr{F} \to \mathscr{F}^+$, o bien §1.3 del libro de Vakil.