Mat426 - Ayudantía 12

Emilio Oyanedel

07 de Diciembre, 2020

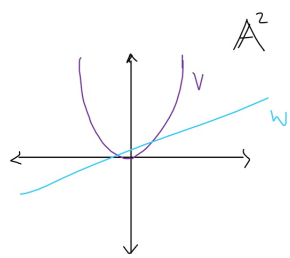
Ejercicios

1. Sea $\tilde{S} = Bl_p(S) \xrightarrow{\varepsilon} S$ con S superficie proyectiva suave e irreducible, y sea $E = \varepsilon^{-1}(p) \cong \mathbb{P}^1$ divisor excepcional. Probar que $\mathcal{O}_{\tilde{S}}(E)$ no es amplio.

2. Sea $f : X \to Y$ morfismo regular entre variedades algebraicas. Probar que el functor $f_* : \underline{Q_{coh}}(X) \to \underline{Q_{coh}}(Y)$, $\mathscr{F} \mapsto f_*\mathscr{F}$ es exacto por la izquierda.

Discusión: Grado y Teorema de Bézout

Motivación. Si tenemos dos curvas en el espacio afín $V, W \subseteq \mathbb{A}^2$ dadas por polinomios $V = V(f), W = V(g)$, $f, g \in k[X, Y]$, sin componentes irreducibles comunes, entonces su intersección $V \cap W = V((f) + (g))$ consiste en un conjunto finito de puntos, que está acotado por el grado de los polinomios que las definen. Por ejemplo, para $V = V(X^2 - Y)$ y $W = V(X - Y + 1)$ tenemos que su intersección consiste en 2 puntos, lo cual coincide con producto de los grados de los polinomios que definen las variedades.



Sin embargo, no siempre se tiene la igualdad, por ejemplo al considerar $W = V(Y + 1)$ y $k = \mathbb{R}$ no hay intersección. Además, puede ser el caso que la intersección sea única, por ejemplo para $W = V(X)$. Por tanto, para no tener estos problemas, vamos a considerar k un cuerpo algebraicamente cerrado y variedades proyectivas, por tanto, nuestra idea es poder extender el concepto de grado de forma de poder calcular la cantidad de intersecciones entre variedades proyectivas.

Recuerdo. La ayudantía pasada, dado un ideal homogéneo $I \subseteq k[x_0, \ldots, x_n]$ definimos el *polinomio de Hilbert* como el (único) polinomio $\chi_I \in \mathbb{Q}[d]$ tal que $\chi_I(d) = h_I(d)$ para casi todo $d \in \mathbb{N}$, de modo que

1. El grado de χ_I es $m := \dim(V(I))$
2. Si $V(I) \neq \emptyset$, el coeficiente principal es de la forma $\dfrac{a}{m!}$, con $a \in \mathbb{N}$.

Definición 1. Sea $I \subseteq k[X_0, \ldots, X_n]$ un ideal homogéneo tal que $V(I) \neq \emptyset$, y sea $m = \dim(V(I))$. Definimos *el grado de I*, denotado $\deg I$, como $m!$ veces el coeficiente principal del polinomio de Hilbert χ_I. En particular, para una variedad proyectiva $X \subseteq \mathbb{P}^n$, su *grado* se define como $\deg X := \deg I(X)$.

Ejemplos.

1. Si consideramos $X = \mathbb{P}^n$, entonces $I(X) = \{0\}$. Luego,
$$\chi_{\mathbb{P}^n}(d) = \binom{n+d}{n} = \frac{d^n}{n!} + \cdots$$
por tanto su dimensión es n y su grado es 1, que es lo esperado.

2. Sea ahora $f \in k[X_0, \dots, X_n]$ un polinomio homogéneo de grado r y $X = V(f) \subseteq \mathbb{P}^n$. Entonces,
$$\chi_{(f)}(d) = \binom{n+d}{n} - \binom{n+d-r}{n} = \frac{rd^{n-1}}{(n-1)!} + \cdots$$
pues todo polinomio homogéneo de grado $d - r + 1$, multiplicado por f es homogéneo de grado $n + 1$. Así, $\dim(X) = n - 1$ y el grado de X es $\deg X = r$, que es lo esperado.

Hemos definido una noción de grado para una variedad proyectiva tal que al reducirla al caso al caso de una variedad $X = V(f)$, para $f \in k[X_0, \dots, X_n]$, se reduce al grado del polinomio que lo define. Para la siguiente definición, nuestra idea es formalizar el concepto de *multiplicidad de la intersección.* Si volvemos a los ejemplos del inicio, para $V = V(X^2 - Y)$ y $W = V(X)$, tenemos que se intersectan solamente en $x = y = 0$, esta intersección es de multiplicidad 2, ya que las dos soluciones a la ecuación son iguales a $(0, 0)$.

Definición 2. Un ideal primo $\mathfrak{p}$ se dice *ideal primo minimal* sobre un ideal I si es minimal entre los ideales primos conteniendo a I.

Proposición 1. *Sea A un anillo. Entonces las componentes irreducibles de Spec(A) están en biyección con los ideales primos minimales de A.*

Ejemplos.

1. El único primo minimal de $k[X, Y]$ es (0).
2. En $A = k[X, Y]/(XY)$, los únicos primos minimales son (X) e (Y). Geométricamente, $\mathrm{Spec}(A)$ se puede pensar como la unión de dos rectas afines.

Proposición 2. *Sea M un módulo graduado finitamente generado sobre un anillo Noetberiano graduado S. Entonces, existe una filtración $0 = M^1 \subseteq \cdots \subseteq M^r = M$ de submódulos graduados tales que para cada i, $M^i/M^{i-1} \cong (S/\mathfrak{p}_i)(l_i)$, donde $\mathfrak{p}_i$ es un ideal primo homogéneo de S, y $l_i \in \mathbb{Z}$. La filtración no es única, pero para cualquier filtración*

1. *Si $\mathfrak{p}$ es un ideal primo homogéneo de S, entonces $\mathfrak{p} \supseteq Ann(M)$ si y solo si $\mathfrak{p} \supseteq \mathfrak{p}_i$ para algún i. En particular, los elementos minimales del conjunto $\{\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_r\}$ son los primos minimales de M, ie, los primos que son minimales y contienen a $Ann(M)$*[1]*,*
2. *Para cada primo minimal en M, el número de veces que $\mathfrak{p}$ aparece en el conjunto $\{\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_r\}$ es igual a la longitud*[2] *de $M_\mathfrak{p}$ sobre el anillo local $S_\mathfrak{p}$ (y por tanto es independiente de la filtración.)*

Definición 3. Si $\mathfrak{p}$ es primo minimal de un S-módulo graduado M, definimos la *multiplicidad* de M sobre S en $\mathfrak{p}$, y denotamos por $\mu_\mathfrak{p}(M)$, como la longitud de $M_\mathfrak{p}$ en $S_\mathfrak{p}$.

Definición 4. Sea $Y \subseteq \mathbb{P}^n$ una variedad proyectiva de dimensión r, $H \subseteq \mathbb{P}^n$ una hipersuperficie que no contiene a Y. Entonces su intersección $Y \cap H = Z_1, \dots, Z_s$, donde Z_j son variedades de dimensión $r - 1$. Sea $\mathfrak{p}_j$ el ideal primo homogéneo de Z_j. Definimos la *multiplicidad de intersección* de Y y H a lo largo de Z_j como
$$i(Y, H; Z_j) := \mu_{\mathfrak{p}_j}(S/(I_Y + I_H))$$
donde I_Y e I_H son los ideales homogéneos de Y y H.

Para aterrizar este concepto, consideremos Y, H curvas en una superficie S y $p \in Y \cap H$. Entonces
$$i(Y, H; p) = \dim \mathcal{O}_{S,p}/(f, g)$$
donde f, g, son ecuaciones locales en torno a p de Y y H respectivamente.

[1] donde $\mathrm{Ann}(M) := \{s \in S : s \cdot M = 0\}$ es el aniquilador de M, que es un ideal en S.
[2] la longitud de un módulo M sobre un anillo S es el máximo largo de cadenas de submódulos $M_0 \subsetneq \cdots \subsetneq M_n = M$

Teorema 1. *(Teorema de Bézout). Sea $X \subseteq \mathbb{P}^n$ una variedad proyectiva de dimensión al menos 1, y sea H una hipersuperficie que no contiene a X. Sean $Z_1, \ldots, Z_s$ las componentes irreducibles de $X \cap H$. Entonces*

$$\sum_{j=1}^{s} i(X, H; Z_j) \cdot \deg(Z_j) = \deg(X) \deg(H)$$

Corolario. Sean Y, Z dos curvas distintas en $\mathbb{P}^2$, con grados d, r. Sea $Y \cap Z = \{P_1, \ldots, P_s\}$. Entonces

$$\sum_{j=1}^{s} i(Y, Z; P_j) = d \cdot r$$

Referencias

[1] R. Harshorne, *Algebraic Geometry*