

SUCESIONES ESPECTRALES

SEBASTIÁN FUENTES Y ERNESTO TREUMÚN

RESUMEN. En este artículo se presentarán todas las herramientas necesarias para comprender las *sucesiones espectrales*, objeto matemático que permite calcular grupos de cohomologías.

ÍNDICE

1. Introducción	1
2. Teoría de categorías y prehaces	2
3. Cohomología	4
4. Espacios contractibles	7
5. Sucesión exacta de Mayer-Vietoris	8
6. Cohomología de Čech	12
7. Sucesiones espectrales	18
8. Aplicaciones	28
Referencias	29

“Lo más llamativo de la conferencia fue el uso frecuente de la misma herramienta en dos o más disciplinas ampliamente separadas, sugiriendo fuertemente una probable unificación de la geometría a grandes niveles”.

Norman Steenrod- Reportaje respecto a la conferencia “Fiber bundles and differential geometry”, 1953, refiriéndose a las sucesiones espectrales.

1. INTRODUCCIÓN

Es por allá por el año 1946 que, Jean Leray se encuentra trabajando en la teoría de haces y el cálculo de cohomología, y es en este contexto que, con el objetivo de calcular estos objetos, introduce una potente idea que en nuestros días conocemos como sucesiones espectrales.

La potencia de esta idea radicaba en que, posteriormente se observó la presencia del mismo fenómeno en otros contextos. Notablemente, la sucesión espectral de Grothendieck, introducida en 1957 en su célebre *Tôhoku paper*, logra unificar gran parte de los ejemplos de sucesiones espectrales.

En este artículo se pretende dar una introducción a las ideas detrás del concepto de sucesión espectral y aplicarlas para obtener algunos interesantes resultados sobre cohomología de de Rham. Para ello se presenta un preludeo acerca de teoría de categorías, haces y cohomología.

A modo de entrada, se discutirá acerca de la sucesión exacta de Mayer-Vietoris, el principio generalizado de Mayer-Vietoris y la cohomología de Čech, que constituyen herramientas básicas de cálculo cohomológico. Luego de todo lo anterior, se introduce el concepto de sucesión espectral, esto mediante el uso de pares exactos, complejos filtrados y dobles complejos. Provisos de todas las herramientas anteriores, concluiremos demostrando la fórmula de Künneth y calculando la cohomología del espacio proyectivo complejo.

2. TEORÍA DE CATEGORÍAS Y PREHACES

La teoría de categorías es, en esencia, un intento por capturar las características fundamentales que debe tener una clase de objetos matemáticos, poniendo mayor énfasis en las relaciones entre los objetos más que en los objetos como tales. Es por esta razón que el concepto de morfismo queda en el centro de atención. En lo que sigue introduciremos las nociones fundamentales provenientes de la teoría de categorías que serán necesarias para nuestros propósitos. Comenzamos entonces definiendo el concepto de categoría.

Definición 2.1 (categoría). Una categoría $\mathcal{C}$ consiste de

1. Una colección de objetos denotada por $\text{Obj}(\mathcal{C})$.
2. Para todo par de objetos $A, B \in \mathcal{C}$ un conjunto de *morfismos* $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ con las siguientes características:
 - a) Existe una función

$$\text{Hom}(A, B) \times \text{Hom}(B, C) \rightarrow \text{Hom}(A, C), \quad (f, g) \mapsto g \circ f$$
 es decir, hay una noción de composición de morfismos.
 - b) La composición es asociativa, i.e., $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.
 - c) Para todo $A \in \text{Obj}(\mathcal{C})$ existe un morfismo $\text{Id}_A \in \text{Hom}(A, A)$ tal que $\text{Id}_A \circ f = f$ y $g \circ \text{Id}_A = g$ para todos f, g .

Observación 2.2. Es importante entender que los morfismos de una categoría no son necesariamente funciones. A pesar de esto, la notación $f : A \rightarrow B$ para $f \in \text{Hom}(A, B)$ es universalmente utilizada.

Una vez se cuenta con la definición de categoría, es una buena idea preguntarse acerca de cómo relacionar categorías entre sí. De esto trata el concepto de functor.

Definición 2.3 (functor). Sean $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ categorías. Decimos que una regla $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ es un **functor covariante** si consiste de

1. Para cada objeto $A \in \text{Obj}(\mathcal{C})$ otro objeto $F(A) \in \text{Obj}(\mathcal{D})$.
2. Para cada morfismo $f : A \rightarrow B$ en $\mathcal{C}$ un morfismo $F(f) : F(A) \rightarrow F(B)$ en $\mathcal{D}$ de tal manera que
 - a) Para todo $A \in \text{Obj}(\mathcal{C})$ se tiene $F(\text{Id}_A) = \text{Id}_{F(A)}$.
 - b) Para todos $f : A \rightarrow B, g : B \rightarrow C$ morfismos en $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B), \text{Hom}_{\mathcal{C}}(B, C)$ respectivamente, se cumple $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$.

Decimos que un functor $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ es **contravariante** si verifica las mismas propiedades salvo que para $f : A \rightarrow B$ se tiene que $F(f) : F(B) \rightarrow F(A)$ es su morfismo asociado en $\mathcal{D}$, y además $F(g \circ f) = F(f) \circ F(g)$, i.e., un functor contravariante “invierte las flechas”.

Intuitivamente, los (pre)haces son objetos que permiten capturar propiedades locales de las funciones y obtener propiedades globales. Damos a continuación la definición de prehaz en su forma general.

Definición 2.4 (prehaz). Sea X espacio topológico y $\mathcal{C}$ una categoría. Un prehaz $\mathcal{F}$ de objetos en $\mathcal{C}$ sobre X consta de

1. Para cada abierto $U \subset X$ un objeto $\mathcal{F}(U) \in \text{Obj}(\mathcal{C})$.
2. Para toda inclusión de abiertos $U \hookrightarrow V$ un morfismo de “restricción”

$$r_{V,U} : \mathcal{F}(V) \rightarrow \mathcal{F}(U), \quad s \mapsto r_{V,U}(s) =: s|_U$$

de tal modo que

a) Si $U \hookrightarrow V \hookrightarrow W$ entonces las restricciones dan un diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccc} & & r_{W,U} & & \\ & \searrow & & \nearrow & \\ \mathcal{F}(W) & \xrightarrow{r_{W,V}} & \mathcal{F}(V) & \xrightarrow{r_{V,U}} & \mathcal{F}(U) \end{array}$$

b) Para todo abierto $U \subset X$, $r_{U,U} = \text{Id}_{\mathcal{F}(U)}$.

En particular podemos, por ejemplo, definir prehaces de grupos abelianos, esto es, todos los conjuntos $\mathcal{F}(U)$ son grupos abelianos y las restricciones son morfismos de grupos.

Algo interesante de notar es que el concepto de prehaz se puede reformular en términos categóricos de la siguiente manera. Dado un espacio topológico X definimos la categoría $\mathbf{Top}(X)$ como la categoría cuyos objetos corresponden a los abiertos de X y los morfismos vienen dados por:

$$\text{Hom}(U, V) = \begin{cases} \{\iota : U \rightarrow V\} & \text{si } U \subset V \\ \emptyset & \text{si } U \not\subset V \end{cases}$$

es decir, solo hay morfismos si el primer abierto está incluido en el segundo y en dicho caso el único morfismo es la inclusión.

Dado entonces un prehaz $\mathcal{F}$ sobre el espacio X con valores en una categoría $\mathcal{C}$, no es difícil notar que este contiene la misma información que un functor contravariante

$$\mathcal{F} : \mathbf{Top}(X) \rightarrow \mathcal{C}$$

puesto que los morfismos de restricción del haz se convierten ahora en los morfismos asociados a las inclusiones de abiertos mediante el functor.

Definición 2.5 (prehaz constante). Sea G un grupo. Definimos el prehaz constante $\mathcal{F}$ con grupo G como el prehaz que a cada abierto U le asocia

$$\mathcal{F}(U) = \{f : U \rightarrow G \mid \text{localmente constante}\}$$

3. COHOMOLOGÍA

A lo largo del presente texto trabajaremos con la categoría de *módulos/complejos diferenciales*, los cuales, para fijar ideas, pueden ser pensados como las formas diferenciales de una variedad junto con la derivada exterior. A denotará siempre un anillo conmutativo con unidad.

Definición 3.1 (módulo/complejo diferencial). Sea M un A –módulo. Un diferencial en M es un morfismo $d : M \rightarrow M$ de A –módulos tal que $d^2 = d \circ d = 0$. Decimos que el par (M, d) es un *módulo diferencial*. Un *complejo diferencial* de A –módulos es un A –módulo diferencial (M, d) que es $\mathbb{Z}$ –graduado, es decir, $M = \bigoplus_{p \in \mathbb{Z}} M^p$ y de tal modo que el diferencial sea de grado 1, esto es, $d(M^p) \subset M^{p+1}$ para todo $p \in \mathbb{Z}$. Los complejos diferenciales se suelen representar mediante diagramas de la forma

$$\dots \xrightarrow{d} M^{p-1} \xrightarrow{d} M^p \xrightarrow{d} M^{p+1} \xrightarrow{d} \dots$$

los cuales, por definición, verifican que $\text{im}(d) \subset \ker(d)$ en cada paso. Cuando el módulo diferencial (M, d) sea un complejo lo denotaremos por $(M^\bullet, d)$.

Como es usual, siempre que se tiene un nuevo objeto existe un impulso irrefrenable por definir morfismos entre ellos.

Definición 3.2. Sean $(M, d), (M', d')$ A –módulos diferenciales. Un morfismo $f : M \rightarrow M'$ de A –módulos diferenciales es un morfismo de A –módulos compatible con los diferenciales, esto es, $f \circ d = d' \circ f$. Un morfismo de complejos diferenciales $(M^\bullet, d_M), (N^\bullet, d_N)$ es una colección de morfismos $\{f_n : M^n \rightarrow N^n | n \in \mathbb{Z}\}$ de tal manera que los diagramas

$$\begin{array}{ccc} M^n & \xrightarrow{d_M} & M^{n+1} \\ f_n \downarrow & & \downarrow f_{n+1} \\ N^n & \xrightarrow{d_N} & N^{n+1} \end{array}$$

son conmutativos.

Definición 3.3 (cohomología). Sea (M, d) un módulo diferencial. Se define entonces su *grupo de cohomología* como

$$H(M) := \frac{\ker(d)}{\text{im}(d)}$$

Decimos que los elementos de $\ker(d)$ son *cociclos* y los de $\text{im}(d)$ *cobordes*. Si $(M^\bullet, d)$ es un complejo diferencial, entonces definimos su n –ésimo grupo de cohomología como

$$H^n(M^\bullet) = \frac{\ker(d) \cap M^n}{\text{im}(d) \cap M^n}$$

Presentamos a continuación una proposición que será de gran utilidad más adelante.

Proposición 3.4. Sea $0 \rightarrow N \xrightarrow{i} M \xrightarrow{\pi} P \rightarrow 0$ una sucesión exacta de A –módulos diferenciales. Entonces existe un morfismo $\delta : H(P) \rightarrow H(N)$ y un triángulo exacto en cohomología

$$\begin{array}{ccc} H(M) & \xrightarrow{H(\pi)} & H(P) \\ & \searrow H(i) & \swarrow \delta \\ & H(N) & \end{array}$$

Demostración. Construimos primero $H(i)$. Para ello notamos que podemos definir directamente $H(i)([n]) = [i(n)]$ para todo $[n] \in H(N)$. Veamos que este morfismo está bien definido. Para ello note que si $n \in \ker(d_N)$ entonces $d_M(i(n)) = i(d_N(n)) = 0$ y así $i(n) \in \ker(d_M)$, por lo que tiene sentido considerar la clase de cohomología $[i(n)]$. Resta entonces ver que esta definición no depende del elemento en la clase. Para ello note que si $[n_1] = [n_2]$ en $H(N)$ entonces $n_1 - n_2 = d_N(\alpha)$ para cierto $\alpha \in N$, de donde

$$i(n_1) - i(n_2) = i(n_1 - n_2) = i(d_N(\alpha)) = d_M(i(\alpha)) \in \text{im}(d_M) \Rightarrow [i(n_1)] = [i(n_2)] \text{ en } H(M)$$

De forma similar se puede construir $H(\pi)$. De hecho note que este es un hecho general: todo morfismo de módulos diferenciales induce un morfismo entre sus grupos de cohomología.

La parte importante es entonces construir δ . Sea $[p] \in H(P)$. Por exactitud existe $m \in M$ tal que $\pi(m) = p$ y luego tenemos $\pi(d_M(m)) = d_P(\pi(m)) = 0$ así que $d_M(m) = i(n)$ para cierto $n \in N$. Definimos entonces $\delta([p]) = [n]$. Se demuestra sin mayor problema que δ está bien definido y que el triángulo obtenido es exacto. ■

Observación 3.5. En la demostración anterior se vio que los morfismos entre módulos diferenciales inducen morfismos en las clases de cohomologías, pues mapean cociclos en cociclos y cobordes en cobordes. Ocupando exactamente el mismo argumento para el caso de complejos diferenciales $M = \bigoplus_{p \in \mathbb{Z}} M^p$, los morfismos entre complejos inducen morfismos graduados en cohomología, ie, $f : M \rightarrow N$ induce $f^* : H^p(M) \rightarrow H^p(N)$.

La versión para complejos diferenciales de la proposición anterior es un resultado fundamental de álgebra homológica y se presenta a continuación.

Proposición 3.6. Sea $0 \rightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \rightarrow 0$ una sucesión exacta corta de complejos, donde f y g son morfismos de complejos. Entonces, existe una sucesión exacta larga en cohomología

$$\cdots \rightarrow H^q(A) \xrightarrow{f^*} H^q(B) \xrightarrow{g^*} H^q(C) \xrightarrow{d^*} H^{q+1}(A) \rightarrow \cdots$$

Demostración. Haremos la demostración por cacería de diagramas. En primer lugar, la observación anterior nos dice que f^* y g^* están bien definidos. Consideremos el siguiente diagrama exacto:

$$\begin{array}{ccccccc} & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ 0 & \longrightarrow & A^{q+1} & \xrightarrow{f} & B^{q+1} & \xrightarrow{g} & C^{q+1} \longrightarrow 0 \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ 0 & \longrightarrow & A^q & \xrightarrow{f} & B^q & \xrightarrow{g} & C^q \longrightarrow 0 \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \end{array}$$

Sea $c \in C^q$ un cociclo, ie, $dc = 0$. Por exactitud, existe $b \in B^q$ tal que $g(b) = c$. Dado que $g(db) = d(gb) = dc = 0$, por exactitud existe (un único) $a \in A^{q+1}$ tal que $db = f(a)$. Definamos entonces $d^*[c] = [a] \in H^{q+1}(A)$. Para ver que la definición anterior no depende de las elecciones hechas, sea $b' \in B^q$ tal que $g(b') = c$ y sea a' el único elemento en $H^{q+1}(A)$ tal que $f(a') = db'$. Como $g(b' - b) = 0$, por exactitud existe un único $h \in A^q$ tal que $f(h) = b' - b$. Luego, $f(a' - a) = d(b' - b) = d(fh) = f(dh)$, por lo cual $a' - a = dh$. Hemos probado que existen morfismos en cohomología. Para probar la exactitud es necesario ocupar el lema de la serpiente, por lo cual decidimos omitir la demostración. ■

Observación 3.7. Cabe destacar que la principal diferencia con las proposiciones 3.4 y 3.6 es que esta última nos dice que el morfismo inducido preserva la graduación.

Para finalizar esta sección se presenta una última definición que cobrará especial relevancia al momento de introducir los primeros ejemplos de sucesiones espectrales.

Definición 3.8 (filtración). Sea (M, d) un módulo diferencial. Una filtración en (M, d) es una sucesión decreciente de submódulos¹

$$M = M_0 \supset M_1 \supset M_2 \supset \dots, \quad M_p := M \quad \forall p \leq 0$$

tales que $d(M_p) \subset M_p$ para todo $p \in \mathbb{N}$, es decir, cada submódulo es un módulo diferencial junto con d . Si $(M^\bullet, d)$ es un complejo diferencial entonces una filtración del complejo es una filtración como módulo diferencial, donde además cada submódulo forma un complejo junto con d , es decir, para todo $p \in \mathbb{N}$

$$M_p = \bigoplus_{q \in \mathbb{Z}} (M_p)_q, \quad (M_{p+1})_q \subset (M_p)_q, \quad d : (M_p)_q \rightarrow (M_p)_{q+1}.$$

¹Note que definimos las filtraciones para todo índice entero definiendo siempre $M_p = M$ para los índices negativos. Esto se hace por razones de notación.

4. ESPACIOS CONTRACTIBLES

En la presente sección enunciaremos definiciones y resultados acerca de los espacios *contractibles*, los cuales jugarán un rol no menor en las siguientes secciones.

Definición 4.1 (homotopía). Sean $f_0, f_1 : M \rightarrow N$ funciones suaves entre variedades diferenciables. Decimos que f_0, f_1 son homotópicamente equivalentes si existe $f : [0, 1] \times M \rightarrow N$ suave tal que $f(0, x) = f_0(x)$ y $f(1, x) = f_1(x)$ para todo $x \in M$ y en tal caso escribimos $f_0 \sim f_1$. Además decimos que una función suave $f : M \rightarrow N$ es una equivalencia homotópica si existe $g : N \rightarrow M$ tal que $f \circ g \sim \text{Id}_N$ y $g \circ f \sim \text{Id}_M$.

Proposición 4.2. *Dos funciones suaves homotópicamente equivalentes inducen el mismo mapeo en cohomología.*

Demostración. La demostración es aplicar directamente la functorialidad del pullback de formas inducido por una función suave. Explícitamente, sea $s_i : M \rightarrow M \times \mathbb{R}$ dado por $p \mapsto (p, i)$ para $i = 0, 1$ y sea F homotopía entre f y g . Por definición,

$$f = F \circ s_0, \quad g = F \circ s_1.$$

y por functorialidad,

$$f^* = s_0^* \circ F^*, \quad g^* = s_1^* \circ F^*.$$

Por otro lado, observe que s_0^* y s_1^* invierten simultáneamente a π^* , por lo que son iguales. Se sigue que $f^* = g^*$. ■

Definición 4.3 (tipo de homotopía y espacios contractibles). Decimos que dos variedades M, N tienen el mismo *tipo de homotopía* si existen funciones suaves $f : M \rightarrow N$ y $g : N \rightarrow M$ tales que $f \circ g$ y $g \circ f$ son homotópicamente equivalentes a la identidad. En particular, una variedad se dice *contractible* si tiene el mismo tipo de homotopía que un punto.

Observación 4.4. Una variedad contractible puede ser pensada como una variedad que se puede “contraer” a un solo punto.

En particular, gracias a la proposición tenemos el siguiente corolario.

Corolario 4.5 (lema de Poincaré). *Dos variedades con el mismo tipo de homotopía tienen la misma cohomología de de Rham. En particular, una variedad contractible M tiene como grupos de cohomología*

$$H^p(M) = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{si } p = 0 \\ 0 & \text{si } p > 0 \end{cases}$$

Observación 4.6. Notar que el lema de Poincaré usual nos dice que la cohomología de $\mathbb{R}^n$ es como la descrita en el corolario anterior. Lo que en realidad se prueba al demostrar dicho lema es que $\mathbb{R}^n$ es un espacio contractible.

5. SUCESIÓN EXACTA DE MAYER-VIETORIS

De la geometría diferencial tenemos un ejemplo de cohomología que es particularmente interesante de estudiar: la cohomología de de Rham. En la presente sección desarrollaremos una herramienta clásica para poder computar dicha cohomología: Las sucesiones de Mayer-Vietoris.

Recuerdo 5.1 (Formas diferenciales y cohomología de de Rham). *Sea M variedad diferenciable (sin borde) de dimensión $\dim(M) = n$ y $\pi : T^*M \rightarrow M$ su fibrado cotangente. Una p -forma diferencial ω en M es una sección del fibrado vectorial $\bigwedge^p T^*M \rightarrow M$, y denotamos por $\Omega^p(M) := \Gamma(M, \bigwedge^p T^*M)$ al espacio vectorial de p -formas diferenciales. Definimos además el espacio de formas diferenciales sobre M como*

$$\Omega(M) := \bigoplus_{p \geq 0} \Omega^p(M)$$

el cual es naturalmente un álgebra graduada anticonmutativa junto con el producto exterior de formas diferenciales (definido de manera puntual como $(\omega \wedge \eta)(x) = \omega(x) \wedge \eta(x)$ para todo $x \in M$). De geometría diferencial general sabemos que existe una única derivación de grado 1 en $\Omega(M)$, denotada por d , de tal modo que

1. *Para toda $f \in \Omega^0(M) = C^\infty(M)$, df es el diferencial usual.*
2. $d^2 = d \circ d = 0$

Ahora, decimos que una p -forma diferencial $\omega \in \Omega^p(M)$ es:

- *cerrada si $d\omega = 0$.*
- *exacta si existe $\eta \in \Omega^{p-1}(M)$ tal que $\omega = d\eta$.*

Dado que $d^2 = 0$ obtenemos naturalmente un complejo diferencial en M

$$\Omega^0(M) := C^\infty(M) \xrightarrow{d} \Omega^1(M) \xrightarrow{d} \cdots \xrightarrow{d} \Omega^{n-1}(M) \xrightarrow{d} \Omega^n(M)$$

y podemos definir la p -ésima cohomología de de Rham de M como los grupos de cohomología asociados al complejo anterior, i.e.,

$$H_{dR}^p(M) := \frac{\{p\text{-formas cerradas}\}}{\{p\text{-formas exactas}\}}$$

Notemos que las formas diferenciales pueden ser pensadas como un functor contravariante Ω desde la categoría de variedades diferenciables hacia la categoría de espacios vectoriales, el cual a cada variedad M le asocia su espacio de formas diferenciales $\Omega(M)$, y a cada función suave le asocia el pullback de formas diferenciales. Esta perspectiva más formal nos permitirá con gran facilidad traducir diagramas de variedades en diagramas de formas diferenciales.

De aquí en adelante fijamos M variedad diferenciable de dimensión $\dim(M) = n$ y consideremos $M = U \cup V$ cubrimiento abierto. Entonces tenemos la siguiente sucesión de inclusiones

$$M \longleftarrow U \coprod V \xleftarrow[\partial_1]{\partial_0} U \cap V$$

donde $\coprod$ denota la unión disjunta y ∂_0, ∂_1 denotan las inclusiones de $U \cap V$ en U y en V respectivamente. Ahora, dado que $\Omega^\bullet$ define un functor contravariante a la categoría de espacios vectoriales tenemos una sucesión de restricciones

$$\Omega^\bullet(M) \rightarrow \Omega^\bullet(U) \oplus \Omega^\bullet(V) \xrightarrow[\partial_1^*]{\partial_0^*} \Omega^\bullet(U \cap V)$$

Proposición 5.2. *La sucesión de Mayer Vietoris es exacta.*

y aplicando el functor contravariante Ω^p tenemos

$$0 \rightarrow \Omega^p(M) \xrightarrow{k^* \oplus l^*} \Omega^p(U) \oplus \Omega^p(V) \xrightarrow{i^* - j^*} \Omega^p(U \cap V) \rightarrow 0$$

$$(k^* \oplus l^*)\omega = (k^*\omega, l^*\omega), \quad (i^* - j^*)(\omega, \eta) = i^*\omega - j^*\eta$$

Ahora, notemos que

$$(i^* - j^*) \circ (k^* \oplus l^*)(\sigma) = (i^* - j^*)(\sigma|_U, \sigma|_V) = \sigma|_{U \cap V} - \sigma|_{U \cap V} = 0$$

Veamos la sobreyectividad de la última flecha. Para ello sea $\omega \in \Omega^p(U \cap V)$ y sea (ρ_U, ρ_V)

$$(i^* - j^*)(\rho_V \omega, \rho_U \omega) = \rho_V \omega - (-\rho_U \omega) = (\rho_V + \rho_U) \omega = \omega$$

$$\begin{array}{c}
 \xrightarrow{\quad} H^{q+1}(M) \rightarrow H^{q+1}(U) \oplus H^{q+1}(V) \rightarrow H^{q+1}(U \cap V) \xrightarrow{\quad} \\
 \hspace{10em} d^* \\
 \xleftarrow{\quad} H^q(M) \rightarrow H^q(U) \oplus H^q(V) \rightarrow H^q(U \cap V) \xleftarrow{\quad}
 \end{array}$$
$$\begin{array}{ccccccc} & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & \\ 0 \rightarrow \Omega^{q+1}(M) & \rightarrow & \Omega^{q+1}(U) \oplus \Omega^{q+1}(V) & \rightarrow & \Omega^{q+1}(U \cap V) & \rightarrow & 0 \\ & d \uparrow & & d \uparrow & & d \uparrow & \\ 0 \rightarrow \Omega^q(M) & \rightarrow & \Omega^q(U) \oplus \Omega^q(V) & \rightarrow & \Omega^q(U \cap V) & \rightarrow & 0 \end{array}$$
$$d^*[\omega] = \begin{cases} (-d(\rho_V \omega)) & \text{en } U \\ d(\rho_U \omega) & \text{en } V \end{cases}$$
$$H_{dR}^p(\mathbb{S}^n) = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{if } p = 0, n \\ 0 & \text{if } 0 < p < n \end{cases}$$

Demostración. En primer lugar es claro que $H_{dR}^0(\mathbb{S}^n) \cong \mathbb{R}$ pues este es un hecho general para variedades conexas, dado que una 0-forma es simplemente una función suave, y si $df = 0$ entonces esta es constante. Consideremos entonces $p \geq 1$ y procedamos por inducción en n . Para $n = 1$, como $\mathbb{S}^1$ es orientable tiene una forma de volumen (cerrada) cuya integral es no nula, y por lo tanto no es exacta (esto es directo del teorema de Stokes), así que $\dim H_{dR}^1(\mathbb{S}^1) \geq 1$, mientras que por otro lado tenemos $\pi_1(\mathbb{S}^1) = \mathbb{Z}$, lo cual implica necesariamente que $\dim H^1(\mathbb{S}^1) = 1$ ².

Suponemos ahora que $n \geq 2$. En primer lugar, dado que $\mathbb{S}^n$ es simplemente conexa, por la observación anterior $H_{dR}^1(\mathbb{S}^n) = 0$. Para $p > 1$ procedemos como sigue. Consideremos el cubrimiento abierto $\{U, V\}$ con $U = \mathbb{S}^n \setminus \{S\}$, $V = \mathbb{S}^n \setminus \{N\}$ donde N, S denotan los polos norte y sur respectivamente. Notemos que U, V son ambos isomorfos a $\mathbb{R}^n$, y por lo tanto $U \cap V \cong \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. La sucesión exacta de Mayer-Vietoris nos da que

$$H_{dR}^{p-1}(U) \oplus H_{dR}^{p-1}(V) \rightarrow H_{dR}^{p-1}(U \cap V) \rightarrow H_{dR}^p(\mathbb{S}^n) \rightarrow H_{dR}^p(U) \oplus H_{dR}^p(V)$$

y como $U, V \cong \mathbb{R}^n$ los extremos de la sucesión anterior son triviales (gracias al Lema de Poincaré, pues $\mathbb{R}^n$ es contractible), así que $H_{dR}^p(\mathbb{S}^n) \cong H_{dR}^{p-1}(U \cap V)$. Como $U \cap V \cong \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ y este último es homotópicamente equivalente a $\mathbb{S}^{n-1}$ ($\mathbb{S}^{n-1}$ es un retracto de $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$), tenemos que $H_{dR}^p(\mathbb{S}^n) \cong H_{dR}^{p-1}(\mathbb{S}^{n-1})$ para $p > 1$. ■

²Esto se debe a que para una variedad M conexa hay una aplicación lineal inyectiva $\Phi : H_{dR}^1(M) \rightarrow \text{Hom}(\pi_1(M), \mathbb{R})$

6. COHOMOLOGÍA DE ČECH

6.1. **Introducción.** En la sección anterior vimos que a partir de las inclusiones

$$U \cup V \leftarrow U \coprod V \rightrightarrows U \cap V$$

podemos generar una sucesión exacta corta sobre las formas diferenciales

$$0 \rightarrow \Omega^\bullet(U \cup V) \rightarrow \Omega^\bullet(U) \oplus \Omega^\bullet(V) \rightarrow \Omega^\bullet(U \cap V),$$

la cual induce una sucesión exacta en cohomología

$$\cdots \rightarrow H^q(U \cup V) \xrightarrow{\alpha} H^q(U) \oplus H^q(V) \xrightarrow{\delta} H^q(U \cap V) \xrightarrow{d^*} H^{q+1}(U \cup V) \rightarrow \cdots,$$

lo cual nos permitió calcular la cohomología de la unión $U \cup V$. El objetivo de esta sección será introducir el lenguaje suficiente para comprender que lo anterior se puede generalizar, en cierta medida, para un cubrimiento numerable de la variedad.

Definición 6.1 (Complejo doble). Un complejo doblemente graduado $K^{\bullet, \bullet}$ es una suma directa de A-módulos $K^{\bullet, \bullet} = \bigoplus_{p, q \in \mathbb{Z}} K^{p, q}$ tal que:

1. Para cada p fijo, $\bigoplus_{q \in \mathbb{Z}} K^{p, q}$ es un complejo diferencial δ , ie, existe $\delta : K^{p, \bullet} \rightarrow K^{p, \bullet}$ tal que $\delta^2 = 0$.
2. Para cada q fijo, $\bigoplus_{p \in \mathbb{Z}} K^{p, q}$ es un complejo diferencial d , ie, existe $d : K^{\bullet, q} \rightarrow K^{\bullet, q}$ tal que $d^2 = 0$.
3. Los operadores diferenciales d y δ conmutan.

Un doble complejo puede ser pensado como una malla, en la cual podemos ir a “la derecha” y “arriba” mediante los operadores diferenciales δ y d respectivamente.

Dado un complejo doble, existe una manera natural de construir un complejo graduado simple sumando en la antidiagonal:

Definición 6.2. Sea $K^{\bullet, \bullet}$ un complejo doblemente graduado. Definimos $K^\bullet$ como el complejo graduado simple

$$K^n := \bigoplus_{p+q=n} K^{p, q},$$

con el operador diferencial dado por $D = \delta + D''$, donde $D'' = (-1)^p d$ sobre $K^{p, q}$.

Observación 6.3. La suma $\delta + D''$ la entendemos en el sentido de suma directa.

Observación 6.4. Notar que

$$D^2 = (\delta + (-1)^{p+1}d) \underbrace{(\delta + (-1)^p d)}_{\text{sube el grado de } p \text{ en } 1} = \delta^2 + (-1)^p \delta d - (-1)^p d \delta - d^2 = 0.$$

Si hubiésemos definido $\tilde{D} := D + \delta$, se puede comprobar que $\tilde{D}^2 = 2\delta d \neq 0$.

Las sucesiones de Mayer-Vietoris pueden ser pensadas como un caso particular de un complejo doble y su complejo simple asociado.

Ejemplo 6.5. Sea $\mathfrak{U} = \{U \cup V\}$ un cubrimiento por abiertos de una variedad M y definamos

$$C^0(\mathfrak{U}, \Omega^q) := \Omega^q(U) \oplus \Omega^q(V)$$

$$C^1(\mathfrak{U}, \Omega^q) := \Omega^q(U \cap V)$$

$$C^p(\mathfrak{U}, \Omega^q) := 0, \quad \text{si } p \geq 2.$$

Sea el **doblo complejo** subordinado al cubrimiento $\mathfrak{U}$ dado por $C^\bullet(\mathfrak{U}, \Omega^\bullet) := \bigoplus_{p,q \in \mathbb{Z}} C^p(\mathfrak{U}, \Omega^q)$, donde el diferencial que sube el grado a p es el diferencial δ dado por la sucesión de Mayer-Vietoris, y el que lo hace a q es la derivada exterior. Escribiremos $K^{p,q} := C^p(\mathfrak{U}, \Omega^q)$ y utilizaremos ambas notaciones de manera indistinta.

Teorema 6.6. *El doble complejo $C^\bullet(\mathfrak{U}, \Omega^\bullet)$ dado por el ejemplo anterior calcula la cohomología de de Rham:*

$$H_D\{C^\bullet(\mathfrak{U}, \Omega^\bullet)\} \cong H_{dR}^\bullet(M),$$

donde $H_D\{C^\bullet(\mathfrak{U}, \Omega^\bullet)\}$ denota la cohomología del complejo simple dado por la antidiagonal.

El teorema anterior es un caso particular del Principio de Mayer-Vietoris generalizado, el cual probaremos más adelante en esta sección.

6.2. Principio de Mayer-Vietoris generalizado. Sea $\mathfrak{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in J}$ un cubrimiento numerable de una variedad M . Denotaremos las doble intersecciones $U_\alpha \cap U_\beta$ como $U_{\alpha\beta}$, las triples intersecciones $U_{\alpha\beta\gamma}$ como $U_{\alpha\beta\gamma}$, etc. Tenemos, entonces, una sucesión de inclusiones

$$M \longleftarrow \prod_{\alpha_0} U_{\alpha_0} \xleftarrow[\partial_1]{\partial_0} \prod_{\alpha_0 < \alpha_1} U_{\alpha_0 \alpha_1} \xleftarrow[\partial_2]{\partial_1} \prod_{\alpha_0 < \alpha_1 < \alpha_2} U_{\alpha_0 \alpha_1 \alpha_2} \xleftarrow{\quad} \cdots$$

donde

$$\partial_0 : U_{\alpha_0 \alpha_1 \alpha_2} \hookrightarrow U_{\alpha_1 \alpha_2}$$

“ignora” la “coordenada” 0, y similarmente con los demás α_i . Esta sucesión de inclusiones nos generan, invirtiendo las flechas, una sucesión de restricciones sobre las formas diferenciales:

$$\Omega^\bullet(M) \xrightarrow{r} \prod_{\alpha_0} \Omega^\bullet(U_{\alpha_0}) \xrightarrow[\delta_1]{\delta_0} \prod_{\alpha_0 < \alpha_1} \Omega^\bullet(U_{\alpha_0 \alpha_1}) \xrightarrow[\delta_2]{\delta_1} \prod_{\alpha_0 < \alpha_1 < \alpha_2} \Omega^\bullet(U_{\alpha_0 \alpha_1 \alpha_2}) \xrightarrow{\quad} \cdots$$

donde los δ_i son las restricciones. Por ejemplo, δ_0 es la restricción

$$\delta_0 : \Omega^\bullet(U_{\beta\gamma}) \rightarrow \prod_{\alpha} \Omega^\bullet(U_{\alpha\beta\gamma}).$$

Definición 6.7 (Operador diferencia). Sea $\omega \in \prod \Omega^q(U_{\alpha_0 \dots \alpha_p})$. Escribamos la componente $\alpha_0 \dots \alpha_p$ de ω como $\omega_{\alpha_0 \dots \alpha_p} \in \Omega^q(U_{\alpha_0 \dots \alpha_p})$. Entonces, se define el **operador diferencia** como

$$\delta : \prod \Omega^\bullet(U_{\alpha_0 \dots \alpha_p}) \rightarrow \prod \Omega^\bullet(U_{\alpha_0 \dots \alpha_p \alpha_{p+1}})$$

dado por

$$(\delta\omega)_{\alpha_0 \dots \alpha_{p+1}} := \sum_{i=0}^{p+1} (-1)^i \omega_{\alpha_0 \dots \hat{\alpha}_i \dots \alpha_{p+1}},$$

donde el sombrero en el índice indica que dicha componente es omitida.

Ejemplo 6.8. En el caso $\delta : \prod \Omega^\bullet(U_{\alpha_0 \alpha_1}) \rightarrow \prod \Omega^\bullet(U_{\alpha_0 \alpha_1 \alpha_2})$ estará dado por la suma alternada

$$(\delta\omega)_{\alpha_0 \alpha_1 \alpha_2} = \omega_{\alpha_1 \alpha_2} - \omega_{\alpha_0 \alpha_2} + \omega_{\alpha_0 \alpha_1}.$$

Proposición 6.9. *El operador diferencia δ cumple $\delta^2 = 0$.*

Demostración. La idea de la demostración es que cuando $j > i$, se extrae el elemento j -ésimo de $\omega_{\alpha_0 \dots \hat{\alpha}_i \dots \alpha_{p+2}}$ es en realidad el elemento $\omega_{\alpha_0 \dots \hat{\alpha}_i \dots \alpha_{j+1} \dots \alpha_{p+2}}$. Esto permite que se cancelen los términos en $(\delta^2 \omega)$. Explícitamente,

$$\begin{aligned} (\delta^2 \omega)_{\alpha_0 \dots \alpha_{p+2}} &= \sum (-1)^i (\delta \omega)_{\alpha_0 \dots \hat{\alpha}_i \dots \alpha_{p+2}} \\ &= \sum_{j < i} (-1)^i (-1)^j \omega_{\alpha_0 \dots \hat{\alpha}_j \dots \hat{\alpha}_i \dots \alpha_{p+2}} + \sum_{j > i} (-1)^i (-1)^{j+1} \omega_{\alpha_0 \dots \hat{\alpha}_i \dots \hat{\alpha}_j \dots \alpha_{p+2}} \\ &= 0 \end{aligned}$$

■

Notación 6.10. Hasta el momento en una forma ω sus componentes $\omega_{\alpha_0 \dots \alpha_p}$ tienen índices crecientes, ie, $\alpha_0 < \dots < \alpha_p$. Durante lo que sigue, definiremos las “componentes” de ω para índices no necesariamente crecientes con la siguiente convención: Si $\alpha \leq \beta$ definiremos

$$\omega_{\dots \beta \dots \alpha \dots} := -(\omega_{\dots \alpha \dots \beta \dots}).$$

En particular, si $\alpha = \beta$ la definición anterior nos dice que

$$\omega_{\dots \alpha \dots \alpha \dots} = 0.$$

Observación 6.11. Según la convención anterior, si $\alpha < \beta$ entonces

$$(\delta \omega)_{\dots \beta \dots \alpha \dots} = -((\delta \omega)_{\dots \alpha \dots \beta \dots}).$$

Esto es equivalente a haber definido el operador diferencia para índices no necesariamente crecientes con la misma fórmula que en 6.7.

Definición 6.12. Un p -cociclo es un cociclo asociado al operador diferencia δ . Explícitamente, un p -cociclo es una forma diferencial $\omega \in \prod \Omega^\bullet(U_{\alpha_0 \dots \alpha_p})$ tal que $\delta \omega = 0$.

Teorema 6.13 (Sucesiones de Mayer-Vietoris generalizadas). *La sucesión*

$$0 \rightarrow \Omega^\bullet(M) \xrightarrow{r} \prod \Omega^\bullet(U_{\alpha_0}) \xrightarrow{\delta} \prod \Omega^\bullet(U_{\alpha_0 \alpha_1}) \xrightarrow{\delta} \prod \Omega^\bullet(U_{\alpha_0 \alpha_1 \alpha_2}) \xrightarrow{\delta} \dots$$

es exacta.

Demostración. Sea $\mathfrak{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in J}$ un cubrimiento numerable de la variedad. Para ver que

$$\Omega^\bullet(M) \xrightarrow{r} \prod \Omega^\bullet(U_{\alpha_0}) \xrightarrow{\delta} \prod \Omega^\bullet(U_{\alpha_0 \alpha_1})$$

es exacta, basta notar que δ es la restricción usual, y luego si $\delta \omega \equiv 0$, entonces ω coincide en todas las intersecciones y dado que las formas diferenciales son un haz³, se pueden pegar y obtener una forma diferencial de manera global en M , ie, $\text{Im}(r) = \ker(\delta)$. Para ver que el resto de la sucesión es exacta, sea $\{\rho_\alpha\}$ una partición de la unidad subordinada al cubrimiento $\mathfrak{U}$ y sea $\omega \in \prod \Omega^\bullet(U_{\alpha_0 \dots \alpha_p})$ un p -cociclo. Construiremos una $(p-1)$ -cocadena $\tau \in \prod \Omega^\bullet(U_{\alpha_0 \dots \alpha_{p-1}})$ tal que $\delta \tau = \omega$. Explícitamente, sea

$$\tau_{\alpha_0 \dots \alpha_{p-1}} = \sum_{\alpha} \rho_\alpha \omega_{\alpha \alpha_0 \dots \alpha_{p-1}}.$$

³Las formas diferenciales son un caso particular de funciones suaves entre variedades, ya que $\bigwedge T^*M$ es una variedad.

Notar que

$$\begin{aligned} (\delta\tau)_{\alpha_0 \dots \alpha_p} &= \sum_i (-1)^i \tau_{\alpha_0 \dots \hat{\alpha}_i \dots \alpha_p} \\ &= \sum_i \sum_{\alpha} (-1)^i \omega_{\alpha \alpha_0 \dots \hat{\alpha}_i \dots \alpha_p} \\ &= \sum_{i, \alpha} (-1)^i \omega_{\alpha \alpha_0 \dots \hat{\alpha}_i \dots \alpha_p}, \end{aligned}$$

donde, por la mera definición de τ , el $\hat{\alpha}_i$ solo se mueve en $\alpha_0, \dots, \alpha_p$, ie, “ α ” está “fijo”. Ahora bien, dado que $\omega \in \ker(\delta)$ es un cociclo,

$$0 = (\delta\omega)_{\alpha \alpha_0 \dots \alpha_p} = \sum_{i=0}^{p+1} (-1)^i \omega_{\alpha \alpha_0 \dots \hat{\alpha}_i \dots \alpha_p} = \omega_{\alpha_0 \dots \alpha_p} + \sum_{i=1}^{p+1} (-1)^i \omega_{\alpha \alpha_0 \dots \hat{\alpha}_i \dots \alpha_p},$$

donde ahora el $\hat{\alpha}_i$ sí se mueve tomando en cuenta α . Para subsanar este hecho, podemos notar que

$$\sum_{i=1}^{p+1} (-1)^i \omega_{\alpha \alpha_0 \dots \hat{\alpha}_i \dots \alpha_p} = \sum_{i=0}^p (-1)^{i+1} \omega_{\alpha \alpha_0 \dots \hat{\alpha}_i \dots \alpha_p},$$

donde ahora sí entendemos que el $\hat{\alpha}_i$ no toma en cuenta el α . Se sigue entonces que

$$\begin{aligned} \sum_{i, \alpha} (-1)^i \omega_{\alpha \alpha_0 \dots \hat{\alpha}_i \dots \alpha_p} &= \sum_{\alpha} \rho_{\alpha} \sum_i \omega_{\alpha \alpha_0 \dots \hat{\alpha}_i \dots \alpha_p} \\ &= \sum_{\alpha} \rho_{\alpha} \omega_{\alpha_0 \dots \alpha_p} \\ &= \omega_{\alpha_0 \dots \alpha_p}. \end{aligned}$$

Concluyendo que $\ker(\delta_n) \subset \text{Im}(\delta_{n-1})$. Dado que $\delta^2 = 0$ se obtiene la otra inclusión. ■

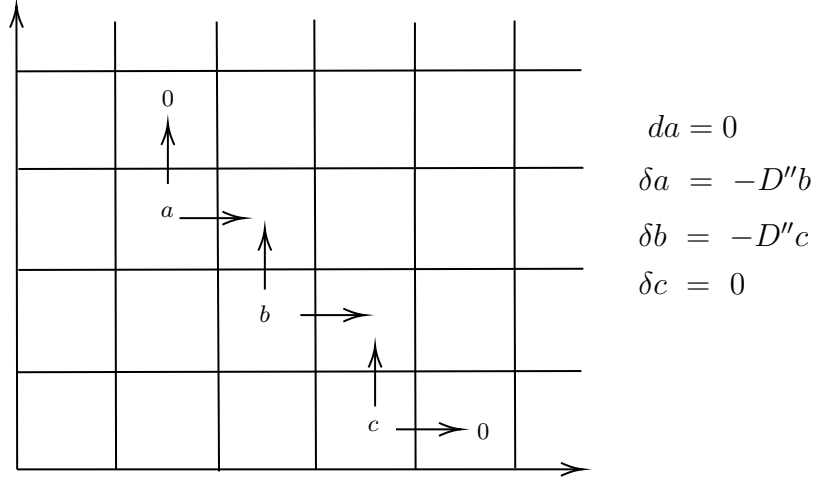
El teorema anterior motiva la siguiente definición:

Definición 6.14 (complejo de Čech). Sea $\mathfrak{U} = \{U_{\alpha}\}_{\alpha \in J}$ un cubrimiento numerable de una variedad y sea $K^{p,q} := C^p(\mathfrak{U}, \Omega^q) := \prod \Omega^q(U_{\alpha_0 \dots \alpha_p})$ el doble complejo equipado con la derivada exterior d como aquella que sube el grado en q y como δ según la definición 6.7 como aquella que sube el grado en p . El doble complejo

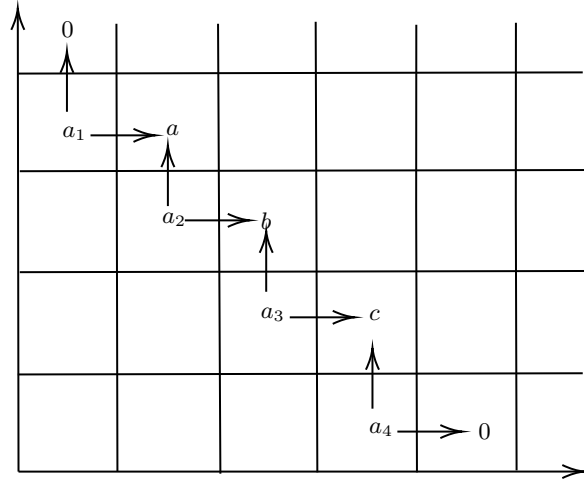
$$C^{\bullet}(\mathfrak{U}, \Omega^{\bullet}) := \bigoplus_{p,q \geq 0} C^p(\mathfrak{U}, \Omega^q)$$

es denominado como el **complejo de Čech-de Rham**. Los elementos del complejo de Čech-de Rham son llamados Čech-de Rham-cocadenas.

Notar que, por el teorema 6.13, en este caso las flechas horizontales del complejo de Čech son exactas. Por otro lado, al calcular su complejo simple con operador diferencial $D = \delta + D'' = \delta + (-1)^p d$, un D -cociclo es una suma formal de elementos en la antidiagonal. Por ejemplo, si φ es un D -cociclo con tres elementos en la diagonal, ie, $\varphi = a + b + c$, entonces se puede graficar como un zig-zag



Similarmente, un elemento D -cofrontera se puede representar como



Teorema 6.15 (Principio de Mayer-Vietoris generalizado). *El doble complejo $C^\bullet(\mathfrak{U}, \Omega^\bullet)$ calcula la cohomología de de Rham de M . Más precisamente, la restricción $r : \Omega^\bullet(M) \rightarrow H_D\{C^\bullet(\mathfrak{U}, \Omega^\bullet)\}$ (donde ahora entendemos a $H_D\{C^\bullet(\mathfrak{U}, \Omega^\bullet)\}$ como la cohomología del complejo simple asociado) induce un isomorfismo*

$$r^* : H_{dR}^\bullet(M) \rightarrow H_D\{C^\bullet(\mathfrak{U}, \Omega^\bullet)\}$$

en cohomología.

Demostración. Notar que $Dr = (\delta + d)r = dr = rd$ y luego r es un morfismo de complejos diferenciales (en este caso $p = 0$), ie, induce un mapeo r^* en cohomología. Para ver la sobreyectividad, sea φ un D -cociclo (ie, $D\varphi = 0$). La exactitud 6.13 nos dice que la componente de más abajo de φ es el δ de alguien. Restando entonces $D(\text{alguien})$ a φ , permanecemos en la misma clase de cohomología y eliminamos dicha componente. Inductivamente, la clase de cohomología de φ puede ser representada por un elemento φ' con solo la componente superior. Dicho elemento cumple que $d\varphi' = 0$ (pues es el elemento superior) y que $\delta\varphi' = 0$ (pues por construcción los elementos de abajo son ceros, y luego suben a 0 bajo d), por lo que representa a una forma cerrada global sobre M , es decir, $r(\varphi') = \varphi$ en cohomología.

Para la inyectividad, si $r(\omega) = D\varphi$, haciendo el mismo proceso anterior podemos extraer co-fronteras a φ hasta quedar solo con la componente superior φ' , donde en particular $\delta\varphi' = 0$. Esto último nos dice que φ' representa a una forma global sobre M . Lo anterior, junto con la igualdad $r(\omega) = D\varphi = d\varphi$ nos dice que ω es una forma exacta. ■

Basados en las construcciones anteriores, construiremos la cohomología de Čech como sigue: Sea $C^p(\mathfrak{U}, \mathbb{R}) := \ker(d : \prod \Omega^0(U_{\alpha_0 \dots \alpha_p}) \rightarrow \prod \Omega^1(U_{\alpha_0 \dots \alpha_p}))$, ie, cada elemento en $C^p(\mathfrak{U}, \mathbb{R})$ es una colección (numerable) de 0-formas tal que cada una de ellas es localmente constante en cada $U_{\alpha_0 \dots \alpha_p}$. En dicho caso, tenemos un complejo

$$C^0(\mathfrak{U}, \mathbb{R}) \xrightarrow{\delta} C^1(\mathfrak{U}, \mathbb{R}) \xrightarrow{\delta} C^2(\mathfrak{U}, \mathbb{R}) \xrightarrow{\delta} \dots$$

cuya cohomología es la **cohomología de Čech** del cubrimiento $\mathfrak{U}$, la cual la denotaremos como $H^\bullet(\mathfrak{U}, \mathbb{R})$. Este objeto es puramente combinatorio, sin embargo también nos permite calcular cohomologías. Antes de mostrar aquello, necesitaremos una pequeña definición.

Definición 6.16 (buen cubrimiento). Un cubrimiento por abiertos $\mathfrak{U}$ se dice que es un *buen cubrimiento* si para cualquier intersección finita de elementos del cubrimiento, el abierto resultante es difeomorfo a $\mathbb{R}^{\dim(M)}$.

Teorema 6.17. *Sea $\mathfrak{U}$ un buen cubrimiento de una variedad M . Entonces, la cohomología de de Rham de M es isomorfa a la cohomología de Čech del cubrimiento, ie,*

$$H_{dR}^\bullet(M) \cong H^\bullet(\mathfrak{U}, \mathbb{R}).$$

Si bien la cohomología de Čech podría eventualmente depender del cubrimiento, como consecuencia de lo anterior tenemos lo siguiente:

Corolario 6.18. *La cohomología de Čech es la misma para cualquier buen cubrimiento $\mathfrak{U}$. ■*

Si una variedad admite un cubrimiento por buen cubrimiento finito, el hecho de que $H^\bullet(\mathfrak{U}, \mathbb{R})$ es un objeto de naturaleza combinatoria nos permite afirmar que en este caso será de dimensión finita.

Corolario 6.19. *Sea M una variedad que admite un buen cubrimiento finito. Entonces, su cohomología es de dimensión finita. En particular, toda variedad compacta tiene cohomología de dimensión finita. ■*

Observación 6.20. La construcción que hicimos en esta sección es en realidad una construcción general que se puede hacer sobre prehaces $\mathcal{F}$ sobre un espacio topológico X . Explícitamente, en cada cálculo/definición se puede cambiar $\Omega(U)$ por $\mathcal{F}(U)$ al momento de definir las flechas horizontales δ , obteniendo así un complejo simple $C^\bullet(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$ con diferencial δ . A la cohomología de este complejo la llamaremos *cohomología de Čech del cubrimiento $\mathfrak{U}$ con valores en $\mathcal{F}$* y la denotaremos $H^\bullet(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$. Para más información el lector puede visitar [4].

En las secciones 6 y 7 la noción general de cohomología de Čech para prehaces cobrará vital importancia.

7. SUCESIONES ESPECTRALES

La principal importancia de las sucesiones espectrales radica en que permite calcular cohomologías de objetos, a priori, complicados. Notablemente, la fórmula de Künneth es uno de los ejemplos más deslumbrantes.

La idea revolucionara es que al momento de calcular la cohomología del *pushforward* de un complejo, el resultado es en sí mismo otro complejo, por lo cual podemos nuevamente calcular su cohomología. Si bien el nuevo complejo obtenido puede no tener relación con la cohomología del complejo original, el principal teorema de esta sección nos dice que el iterar el proceso anterior al infinito, increíblemente, nos entrega dicha cohomología.

Comenzaremos con la definición general, y posteriormente iremos desmembrandola en casos particulares para poder comprenderla de una mejor manera.

Definición 7.1 (Sucesión espectral). Sea A anillo conmutativo con unidad, $r_0 \in \mathbb{Z}$. Una sucesión espectral en la categoría de A -módulos⁴ es una colección $\{E_r, d_r\}_{r \geq r_0}$ de complejos dobles de A -módulos

$$E_r = \bigoplus_{(p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}} E_r^{p,q}$$

junto con morfismos (que llamaremos diferenciales) $d_r^{p,q} : E_r^{(p,q)} \rightarrow E_r^{p+r, q-r+1}$ tales que

1. $d_r^{p+r, q-r+1} \circ d_r^{p,q} = 0$
2. $E_{r+1} \cong H^\bullet(E_r, d_r)$

De manera intuitiva, las sucesiones espectrales se pueden pensar como un “libro” en donde cada E_r es una “página”, y en las páginas sucesivas se van colocando los grupos de cohomología de la página anterior. Visualmente, las primeras 3 páginas de la sucesión lucen de la siguiente manera:

$$\begin{array}{ccccc}
 E_0^{0,2} & E_0^{1,2} & E_0^{2,2} & E_1^{0,2} \longrightarrow E_1^{1,2} \longrightarrow E_1^{2,2} & E_2^{0,2} & E_2^{1,2} & E_2^{2,2} \\
 \uparrow & \uparrow & \uparrow & & \searrow & \searrow & \searrow \\
 E_0^{0,1} & E_0^{1,1} & E_0^{2,1} & E_1^{0,1} \longrightarrow E_1^{1,1} \longrightarrow E_1^{2,1} & E_2^{0,1} & E_2^{1,1} & E_2^{2,1} \\
 \uparrow & \uparrow & \uparrow & & \searrow & \searrow & \searrow \\
 E_0^{0,0} & E_0^{1,0} & E_0^{2,0} & E_1^{0,0} \longrightarrow E_1^{1,0} \longrightarrow E_1^{2,0} & E_2^{0,0} & E_2^{1,0} & E_2^{2,0}
 \end{array}$$

Pasamos ahora a desarrollar varias construcciones que serán fuente de ejemplos de sucesiones espectrales. La más sencilla de ellas se conoce como *parejas exactas*.

7.1. Pares exactos.

Definición 7.2. Un par exacto es una sucesión exacta de A -módulos de la siguiente forma:

$$\begin{array}{ccc}
 & i & \\
 A & \longrightarrow & A \\
 & \nwarrow k \quad \nearrow j & \\
 & B &
 \end{array}$$

⁴Esta definición en realidad tiene sentido en cualquier categoría abeliana.

Veremos a continuación que dado un par exacto siempre podemos construirnos uno nuevo. Para ello consideremos un par exacto arbitraria, y definamos $d : B \rightarrow B$ como $d = jk$. Por exactitud es claro que $d^2 = j(kj)k = 0$ así que podemos considerar la cohomología $H(B) = \ker(d)/\text{Im}(d)$. Definimos entonces $A' := i(A)$, $B' := H(B)$ y construyamos morfismos de tal manera que

$$\begin{array}{ccc} A' & \xrightarrow{i'} & A' \\ & \swarrow k' & \searrow j' \\ & B' & \end{array}$$

sea un par exacto. En primer lugar, i' será tomado simplemente como la restricción de i a A' . Veamos cómo definir j' . Dada $a' = i(a) \in A'$ se define

$$j'(a') = [j(a)] \quad \forall a \in A, a' = i(a)$$

donde $[\cdot]$ denota la clase en $H(B)$. Probamos que j' está bien definida:

1. Notar que $d(j(a)) = j(kj(a)) = 0$ para todo $a \in A$ por exactitud, así que $j(a) \in \ker(d)$, es decir, tiene sentido tomar su clase en $H(B)$.
2. Sea $\bar{a} \in A$ tal que $a' = i(\bar{a})$. Luego $i(a - \bar{a}) = 0$ y por exactitud existe $b \in B$ tal que $a - \bar{a} = k(b)$, de donde vemos que

$$j(a) - j(\bar{a}) = j(k(b)) = db \quad \Rightarrow \quad [j(a)] = [j(\bar{a})]$$

Los puntos anteriores muestran entonces que j' está bien definida. Resta entonces construir k' . Sea $[b] \in H(B)$. Entonces dado que $d(b) = j(k(b)) = 0$ por exactitud existe $a \in A$ tal que $k(b) = i(a)$ y definimos

$$k'([b]) := k(b) \in i(A)$$

Se puede verificar que el diagrama construido define un par exacto y este se conoce como *par derivado*.

7.2. Sucesión espectral de un complejo filtrado. Sea (K, d) un módulo diferencial y $\{K_p\}_{p \in \mathbb{Z}}$ una filtración. Definimos

$$A := \bigoplus_{p \in \mathbb{Z}} K_p$$

Note que las inclusiones $K_{p+1} \hookrightarrow K_p$ inducen sucesiones exactas

$$0 \rightarrow K_{p+1} \xrightarrow{i} K_p \xrightarrow{\pi} K_p/K_{p+1} \rightarrow 0$$

para cada $p \in \mathbb{N}$, donde π denota la proyección al cociente. Sumando estas sucesiones podemos obtener una sucesión exacta

$$0 \rightarrow A \xrightarrow{i} A \xrightarrow{\pi} \underbrace{\bigoplus_{p \geq 0} K_p/K_{p+1}}_{=: B} \rightarrow 0$$

de módulos diferenciales y gracias a la Proposición 3.4 tenemos un par exacto en cohomología

$$\begin{array}{ccc} H(A) & \xrightarrow{i} & H(A) \\ & \swarrow k & \searrow j \\ & H(B) & \end{array}$$

Supondremos a continuación que la filtración tiene largo finito

$$\dots = K_{-1} = K_0 \supset K_1 \supset K_2 \supset K_3 \supset \dots \supset K_l \supset 0$$

Entonces siguiendo la construcción anterior tenemos que A_1 es la suma directa de los elementos del diagrama (el cual no es exacto)

$$\dots \xleftarrow{\sim} H(K) \xleftarrow{\sim} H(K) \xleftarrow{i} H(K_1) \xleftarrow{i} H(K_2) \xleftarrow{i} \dots \xleftarrow{i} H(K_l) \xleftarrow{\sim} 0$$

Para construir su par derivado aplicamos la inclusión al diagrama anterior

$$H(K) \supset i(H(K_1)) \xleftarrow{i} i(H(K_2)) \xleftarrow{i} \dots \xleftarrow{i} i(H(K_l)) \xleftarrow{\sim} 0$$

donde vemos que la última flecha se transforma en una inclusión de los grupos de cohomología y la última flecha permanece inalterada. Podemos entonces iterar este proceso l veces hasta obtener verdaderas inclusiones

$$H(K) \supset i(H(K_1)) \supset i^2(H(K_2)) \supset \dots \supset i^l(H(K_l)) \supset 0$$

Hemos obtenido de esta manera una *filtración inducida* en $H(K)$.

Dado que hemos obtenido únicamente inclusiones el proceso anterior se vuelve estacionario, es decir, al tomar nuevamente el par exacto se obtendrá el mismo resultado. Definamos $F_p := i^p(H(K_p))$ y sea A_∞ el límite de la sucesión anterior, ie,

$$A_\infty \cong \bigoplus_{p \in \mathbb{Z}} F_p = \bigoplus_{p \in \mathbb{Z}} i^p(H(K_p))$$

Veamos entonces cómo construir una sucesión espectral con lo anterior. En el par exacto en cohomología por construcción tenemos que

$$H(B) \cong \bigoplus_{p \in \mathbb{Z}} H(K_p/K_{p+1}, d)$$

Cambiamos la notación de la siguiente manera:

$$\begin{array}{ccc} H(A) & \xrightarrow{i} & H(A) \\ & \nwarrow k & \searrow j \\ & & H(B) \end{array} \implies \begin{array}{ccc} A_1 & \xrightarrow{i_1} & A_1 \\ & \nwarrow k_1 & \searrow j_1 \\ & & E_1 \end{array}$$

Según la construcción del par derivado entonces si $d_1 := j_1 \circ k_1$ tenemos que $E_2 = H(E_1, d_1)$ y los morfismos derivados son

1. $i_2 : A_2 \rightarrow A_2$ es tal que $i_2(i_1(x)) = i_1^2(x)$ para todo $x \in A_1$.
2. $j_2 : A_2 \rightarrow E_2$ es tal que $j_2(i_1(x)) = [j_1(x)]$ para todo $x \in A_1$.
3. $k_2 : E_2 \rightarrow A_2$ es tal que $k_2([x]) = k_1(x)$ para todo $[x] \in E_1$.

Decimos entonces que la sucesión de módulos diferenciales (E_r, d_r) es la sucesión espectral del módulo diferencial (K, d) .

Consideramos ahora el caso de un complejo $(K^\bullet, d)$, es decir, tenemos la presencia de una graduación. Dada entonces una filtración $\{K_p\}_{p \in \mathbb{Z}}$, para cada $p \in \mathbb{Z}$ tenemos una sucesión exacta corta de complejos

$$0 \longrightarrow K_{p+1} \longrightarrow K_p \longrightarrow K_p/K_{p+1} \longrightarrow 0$$

y entonces gracias a la Proposición (3.6) lo anterior se traduce en una sucesión exacta larga en cohomología

$$\cdots \longrightarrow H^q(K_{p+1}) \longrightarrow H^q(K_p) \longrightarrow H^q(K_p/K_{p+1}) \longrightarrow H^{q+1}(K_{p+1}) \longrightarrow \cdots$$

Notando entonces que la sucesión anterior se puede resumir en un diagrama triangular, y sumando todos los diagramas, obtenemos el siguiente par exacto

$$\begin{array}{ccc} \bigoplus_{p, q \in \mathbb{Z}} H^q(F_p K^\bullet) & \xrightarrow{i} & \bigoplus_{p, q \in \mathbb{Z}} H^q(F_p K^\bullet) \\ & \nwarrow k \quad \nearrow j & \\ & \bigoplus_{p, q \in \mathbb{Z}} H^q(F_p K^\bullet / F_{p+1} K^\bullet) & \end{array}$$

Teorema 7.3. Sea $K^\bullet = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} K^n$ un complejo con diferencial d y $\{F_p K^\bullet\}$ una filtración K tal que $\{F_p K^n\}$ tiene largo finito para todo $n \in \mathbb{Z}$. Entonces la sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow \bigoplus_{p \in \mathbb{Z}} F_{p+1} K^\bullet \longrightarrow \bigoplus_{p \in \mathbb{Z}} F_p K^\bullet \longrightarrow \bigoplus_{p \in \mathbb{Z}} F_p K^\bullet / F_{p+1} K^\bullet \longrightarrow 0$$

induce una sucesión espectral que converge a la cohomología de $H^\bullet(K, d)$ con respecto a la filtración inducida.

Demostración. En la notación anterior tenemos que⁵

$$A_r = \bigoplus_{p \in \mathbb{Z}} F_r^p = \bigoplus_{p, q \in \mathbb{Z}} i^{r-1} H^q(F_p K^\bullet)$$

Ahora, es fundamental notar que por construcción los morfismos i, j son de grado 0 (es decir, respetan la graduación de los complejos), sin embargo k es de grado 1, esto es,

$$k(H^q(F_p K^\bullet / F_{p+1} K^\bullet)) \subset H^{q+1}(F_{p+1} K^\bullet)$$

Para $n \in \mathbb{N}$ fijo, sea $\ell(n)$ el largo de la filtración de K^n . Entonces para $r \geq \ell(n+1) + 1$ tenemos que para todo $p \in \mathbb{Z}$

$$i^r H^{n+1}(F_{p+1} K^\bullet) = F_{p+1}^{n+1}$$

y entonces

$$i : i^r H^{n+1}(F_{p+1} K^\bullet) \rightarrow i^r H^{n+1}(F_p K^\bullet)$$

es una inclusión. Pasando entonces a la suma se tiene que

$$i_r : \bigoplus_{p \in \mathbb{Z}} i^r H^{n+1}(F_p K^\bullet) \rightarrow \bigoplus_{p \in \mathbb{Z}} i^r H^{n+1}(F_p K^\bullet)$$

⁵Note que en esta parte no tomamos en cuenta aún la graduación de cada $F_p K^\bullet$, esto pues $H(\bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} F_p K^n) \cong \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} H^n(F_p K^\bullet)$

es una inclusión y por exactitud se tiene que $k_r : B_n^r \rightarrow A_r^{n+1}$ es el morfismo cero. Así, cuando $r \rightarrow \infty$ el grupo B_n^r es estacionario y podemos ver que el valor estacionario B_∞ es precisamente $\bigoplus_{p,q \in \mathbb{Z}} i^p(H^q(F_p K^\bullet)) / i^p(H^q(F_{p+1} K^\bullet))$ que corresponde a los cocientes de $H(K^\bullet)$ por su filtración inducida. ■

7.3. Sucesiones espectrales de un complejo doble. Sea $K^{\bullet,\bullet} = \bigoplus_{p,q \in \mathbb{Z}} K^{p,q}$ un doble complejo con operador horizontal δ y vertical d . Inspirados por la sección 5, podemos formar un complejo simple sumando en la (anti)diagonal:

Definición 7.4 (complejo simple a partir de un doble complejo). Sea $C^k := \bigoplus_{p+q=k} K^{p,q}$ y sea $D : C^k \rightarrow C^{k+1}$ el operador diferencial $D := \delta + (-1)^p d$. Entonces, $K^\bullet = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} C^k$ es ahora un complejo simple con el operador diferencial D .

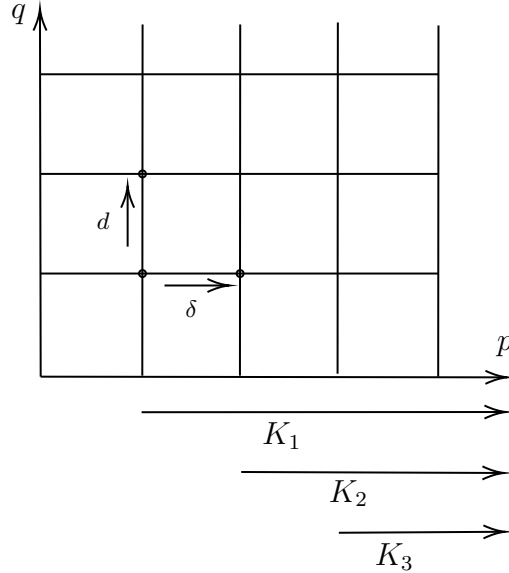
Observación 7.5. Cuando querramos referirnos a K como un doble complejo, escribiremos $K^{\bullet,\bullet}$, y cuando lo querramos entender como un complejo simple con el operador inducido escribiremos $K^\bullet$.

A partir de lo anterior, podemos construir una filtración natural sobre $K^\bullet$, moviéndonos de manera horizontal sobre las columnas del doble complejo:

Definición 7.6 (Filtración natural de un doble complejo). La filtración natural de un doble complejo $K^\bullet$ es la dada por

$$K^\bullet = F_0 K^\bullet \supset F_1 K^\bullet \supset F_2 K^\bullet \supset \cdots,$$

donde $F_p K^\bullet := \bigoplus_{i \geq p} \bigoplus_{q \geq 0} K^{i,q}$. Notar que cada $F_p K^\bullet$ es un subgrupo y que $DF_p K^\bullet \subset F_p K^\bullet$ como se ilustrará en la siguiente imagen. Adicionalmente, cada $F_p K^\bullet$ puede ser entendido como un complejo simple con el diferencial D o como un complejo doble con los diferenciales δ y d .



Ahora bien, notar que la suma $A := \bigoplus_{p \in \mathbb{Z}} F_p K^\bullet$ es un doble complejo⁶ con los operadores δ y d , y por tanto podemos verlo como un complejo simple sumando en la diagonal, ie, $A^\bullet = \bigoplus A^k$ donde A^k tiene todos los elementos de grado total k . Además, tenemos la inclusión

$$i : A^k \cap F_{p+1} K^\bullet \rightarrow A^k \cap F_p K^\bullet.$$

En lo que sigue, calcularemos $E_1, E_2, E_3, \dots$ para la filtración natural del doble complejo:

⁶Pues cada $F_p K^\bullet$ es un doble complejo

- **Cálculo de E_1 :** Notar que $B^\bullet := \bigoplus F_p K^\bullet / F_{p+1} K^\bullet$ es un complejo con el operador inducido D y que además $F_p K^\bullet / F_{p+1} K^\bullet$ puede ser pensada como la p -ésima columna, ya que todas las demás van a parar a 0 en el cociente. Luego, el complejo $B^\bullet$ es la suma de dichas columnas, y por ende el operador D en cada columna es solo el operador d (módulo cambio de signo), ie, su cohomología es justamente la suma de las cohomologías de d de cada columna. Formalmente, el operador D sobre $B^\bullet$ es $(-1)^p d$, y por lo tanto

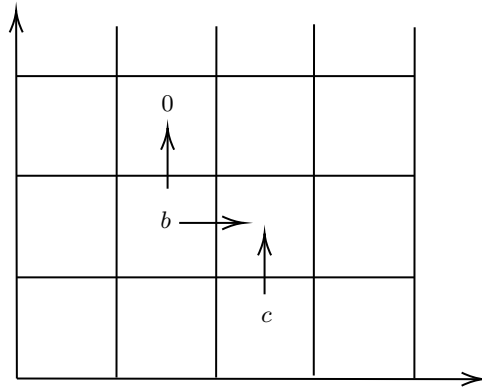
$$\begin{aligned} E_1 := H_D(B^\bullet) &:= \bigoplus_{p \in \mathbb{Z}} H_D(F_p K^\bullet / F_{p+1} K^\bullet) = \bigoplus_{p \in \mathbb{Z}} \bigoplus_{q \in \mathbb{Z}} H_d(K^{p,q+1} / K^{p,q}) \\ &= \bigoplus_{p \in \mathbb{Z}} H_d(K^{\bullet,p}) \\ &:= H_d(K^{\bullet,\bullet}). \end{aligned}$$

- **Cálculo de E_2 :** Computaremos explícitamente $d_1 = j_1 k_1$. En primer lugar, $j_1 : H(A^\bullet) \rightarrow H(B^\bullet)$ lleva la clase $[a]$ en sí misma pero en $H(B^\bullet)$, por lo cual solo tenemos que encontrar $k_1 : H(B^\bullet) \rightarrow H(A^\bullet)$, el cual, por definición, k_1 es el operador de cofrontera dado por la proposición 3.6. Así, si $[b] \in B^k \cap (K_p / K_{p+1})$, por exactitud podemos suponer que $b \in A^k \cap K_p$. Para calcular $k_1([b])$ tenemos que calcular Db y llevarlo hacia atrás por la inclusión i . Notar que b representa un elemento en $E_1 = H_D(B^\bullet) = H_d(K^{\bullet,\bullet})$, por lo que $db = 0$ y por tanto $Db = \delta b + (-1)^p db = \delta(b)$, ie, $k_1([b]) = [\delta b]$. De lo anterior se desprende inmediatamente que $d_1 = j_1 k_1 = \delta$ (entendiendo a δ ahora como un mapeo en las cohomologías) y que

$$E_2 = H_\delta H_d(K^{\bullet,\bullet}).$$

- **Cálculo de E_3 :** Para calcular E_3 , utilizaremos el hecho siguiente hecho, el cual no probaremos, para no extender más de lo necesario el presente documento. Sin embargo, la demostración se puede encontrar en [1, Proposition 12.1]

Hecho 7.7. Todo elemento en $H_\delta H_d(K^{\bullet,\bullet})$ puede ser representado como un $b \in K^{\bullet,\bullet}$ tal que $db = 0$ y $\delta b = -(-1)^p dc$ para algún $c \in K^{\bullet,\bullet}$.



Para simplificar notación, denotaremos la clase de b en E_r como $[b]_r$. Así, por la definición de pareja derivada,

$$d_2([b]_2) = j_2 k_2([b]_2) = j_2 k_1([b]_1).$$

Notar que si encontramos a tal que $k_1([b]_1) = i([a]_1)$, por definición tendremos que $j_2 k_2([b]_2) = [j_1 a]_2$. Para ello note que el hecho de que $k_1 b \in A^{k+1} \cap K_{p+1}$ nos dice que a debe pertenecer a $A^{k+1} \cap K_{p+2}$. Para encontrar a , utilizaremos $b + c$ en vez de b , lo cual

es posible ya que bajo la proyección $K_p \rightarrow K_p/K_{p+1}$ ambos elementos son iguales (en la imagen anterior se puede apreciar que $c \in K_{p+1}$) y luego

$$\begin{aligned} k_1(b+c) &= D(b+c) = (\delta + (-1)^p d)(b+c) = \delta b + \delta c + (-1)^p db + (-1)^p dc \\ &= -(-1)^p dc + \delta c + (-1)^p dc \\ &= \delta c, \end{aligned}$$

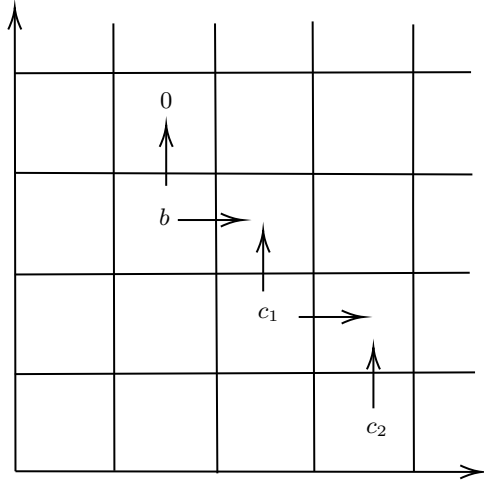
y por tanto

$$d_2[b]_2 = [\delta c]_2.$$

Notar que, efectivamente, δc representa un elemento en $H_\delta H_d(K^{\bullet,\bullet})$ ya que $\delta(\delta c) = 0$ y

$$d\delta c = \delta(dc) = \delta((-1)^p \delta b) = 0.$$

- **Inducción:** De manera general, diremos que un elemento b **vive** en E_r si representa un elemento en la cohomología de E_r , o equivalentemente, si b es un cociclo en $E_1, E_2, \dots, E_{r-1}$, es decir, si está en el kernel de cada una de los diferenciales en cada E_i . Argumentando de manera inductiva, si b vive en E_3 , ie, $d_2[b]_2 = 0$, entonces induce un zig-zag



$$db = 0$$

$$\delta b = -(-1)^p c_1$$

$$\delta c_1 = -(-1)^p c_2$$

Para calcular $d_3[b]_3$ usaremos $b+c_1+c_2 \in A^k \cap K_p$ para representar la clase $[b]_3$. En dicho caso, $D(b+c_1+c_2) = \delta c_2$ y por tanto $d_3[b]_3 = [\delta c_2]_3$. Se sigue entonces que en el caso general, para E_r tenemos un zig-zag de longitud r y donde el diferencial d_r sobre E_r será el δ del último término del zig-zag, ie,

$$d_r[b]_r = [\delta c_{r-1}]_r.$$

Notar que la bigraduación (p, q) del doble complejo $K^{\bullet,\bullet} = \bigoplus_{p,q} K^{p,q}$ se mantiene, por tanto, en la sucesión espectral

$$E_r = \bigoplus_{p,q} E_r^{p,q},$$

donde además el diferencial d_r mueve hacia la derecha r posiciones y las baja $r-1$, ie,

$$(7.1) \quad d_r : E_r^{p,q} \rightarrow E_r^{p+r, q-r+1}.$$

Siguiendo la construcción de la subsección anterior, sabemos que la filtración $F_p K^\bullet$ induce una filtración en $H_D(K^\bullet) = \bigoplus H_D^n(K^b)$

$$H_D(K^\bullet) = F_0 \supset F_1 \supset F_2 \supset \dots$$

la cual a su vez induce una filtración en cada componente $H_D^n(K^\bullet)$, siendo los cocientes sucesivos los límites de la sucesión espectral, ie,

$$H_D^n(K^\bullet) = (F_0 \cap H^n) \supset (F_1 \cap H^n) \supset \cdots \supset (F_n \cap H^n) \supset 0,$$

donde $E_\infty^{0,n} = (F_0 \cap H^n)/(F_1 \cap H^n)$, $E_\infty^{1,n-1} = (F_1 \cap H^n)/(F_2 \cap H^n)$, ..., $E_\infty^{n,0} = (F_n \cap H^n)/0 = (F_n \cap H^n)$. Notar que dicha sucesión en cohomología “acaba” siempre y cuando $p, q \geq 0$. En conclusión, mejoramos el teorema 7.3.

Teorema 7.8. *Sea $K^{\bullet,\bullet} = \bigoplus_{p,q \geq 0} K^{p,q}$ un doble complejo. Entonces, existe una sucesión espectral (E_r, d_r) convergiendo a la cohomología total $H_D(K^\bullet)$ tal que*

$$\begin{aligned} E_1^{p,q} &= H_d^{p,q}(K^\bullet), \\ E_2^{p,q} &= H_\delta^{p,q} H_d(K^\bullet) \end{aligned}$$

y

$$GH_D^n(K^\bullet) = \bigoplus_{p+q=n} E_\infty^{p,q}(K).$$

7.4. Sucesión espectral de un fibrado y teorema de Leray. Para esta sección trabajaremos con el siguiente objeto.

Definición 7.9 (fibrado). Sea G un grupo topológico actuando de manera fiel por la izquierda sobre un espacio topológico F . Un *fibrado* de fibra F y grupo estructural G sobre un espacio topológico B es un espacio topológico E junto con una aplicación continua y sobreyectiva $\pi : E \rightarrow B$ tal que existe un cubrimiento abierto $\{U_\alpha\}$ y una colección de homeomorfismos que llamaremos *trivializaciones*

$$\varphi_\alpha : E|_\alpha := \pi^{-1}(U_\alpha) \xrightarrow{\sim} U_\alpha \times F$$

preservando las fibras, donde esto último significa que

$$\begin{array}{ccc} \pi^{-1}(U_\alpha) & \xrightarrow{\varphi_\alpha} & U_\alpha \times F \\ \pi \downarrow & \swarrow \pi_1 & \\ U_\alpha & & \end{array}$$

es conmutativo, donde π_1 denota la proyección en la primera coordenada. Además, se pide que los cambios de trivialización vengan dados por

$$\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1} : (U_i \cap U_j) \times F \rightarrow (U_i \cap U_j) \times F, \quad (x, \xi) \mapsto (x, g_{\alpha\beta}(x) \cdot \xi)$$

donde $g_{\alpha\beta} : U_i \cap U_j \rightarrow G$ son las *funciones de transición*. Decimos que E es el *espacio total* del fibrado.

Dado que estamos trabajando en el contexto de la cohomología de de Rham, las fibraciones que consideraremos serán tales que E, B, F son variedades diferenciables y los morfismos anteriores son suaves.

Consideremos a continuación un fibrado $\pi : E \rightarrow M$ de fibra F sobre una variedad diferenciable M . Sabemos que las formas diferenciales definen un prehaz en M , y podemos entonces definir un prehaz $\mathcal{H}^q$ en E mediante

$$\mathcal{H}^q(U) := H^q(\pi^{-1}(U)), \quad r_{U,V} : H^q(\pi^{-1}(U)) \rightarrow H^q(\pi^{-1}(V)) \quad \forall V \subset U$$

es decir, para todo abierto consideramos la cohomología de de Rham en E junto con restricciones naturales para cada inclusión de abiertos.

A continuación introducimos terminología y luego presentamos un importante teorema.

Terminología. Recordemos la definición 2.5 del pre haz constante. En este caso tenemos que sobre un buen cubrimiento $\mathfrak{U}$ las funciones localmente constantes son en verdad constantes. Por lo tanto, sobre el cubrimiento todos los grupos del pre haz son idénticos y las restricciones corresponden a la identidad. Decimos entonces que un pre haz es localmente constante sobre un buen cubrimiento $\mathfrak{U}$ si todos los grupos son isomorfos y las restricciones son isomorfismos.

A continuación enunciamos la fórmula de Künneth, cuya demostración puede ser hallada en [1].

Teorema 7.10 (Fórmula de Künneth). *Sean M, F dos variedades diferenciables y $\mathfrak{U}$ un buen cubrimiento de M . Si los grupos de cohomología de F son de dimensión finita, entonces*

$$H^\bullet(M \times F) = H^\bullet(M) \otimes H^\bullet(F),$$

donde la fórmula anterior se lee como

$$H^n(M \times F) = \bigoplus_{p+q=n} H^p(M) \otimes H^q(F).$$

En la siguiente sección demostraremos la fórmula de Künneth mediante el uso del teorema de Leray, el cual demostraremos de inmediato. Cabe destacar que la demostración original de la fórmula de Künneth es independiente del teorema de Leray, por lo que en realidad obtenemos una equivalencia entre el teorema de Leray y dicha fórmula. Antes enunciamos un hecho que será utilizado en la demostración.

Proposición 7.11. *Todo fibrado sobre una variedad contractible es trivial.* ■

Teorema 7.12 (Teorema de Leray para la cohomología de de Rham). *Sea M variedad diferenciable y $\mathfrak{U}$ un buen cubrimiento. Dado un fibrado $\pi : E \rightarrow M$ con fibra F existe una sucesión espectral $\{E_r\}$ convergente a la cohomología del espacio total $H^\bullet(E)$ con*

$$E_2^{p,q} = H^p(\mathfrak{U}, \mathcal{H}^q)$$

donde $\mathcal{H}^q$ denota el pre haz localmente constante $\mathcal{H}^q(U) = H^q(\pi^{-1}(U))$ en $\mathfrak{U}$. Si M es simplemente conexa y $H^q(F)$ es de dimensión finita entonces

$$E_2^{p,q} = H^p(M) \otimes H^q(F)$$

Demostración. Dado un buen cubrimiento $\mathfrak{U}$ de M , $\pi^{-1}\mathfrak{U}$ es un cubrimiento en E y podemos formar el complejo doble

$$K^{p,q} = C^p(\pi^{-1}\mathfrak{U}, \Omega^q) = \prod_{\alpha_0 < \dots < \alpha_p} \Omega^q(\pi^{-1}(U_{\alpha_0, \dots, \alpha_p}))$$

mediante el complejo de Čech del pre haz de formas diferenciales. Siguiendo la construcción de la sucesión espectral de un complejo doble tenemos entonces que

$$E_1^{p,q} = C^p(\mathfrak{U}, \mathcal{H}^q) = \prod_{\alpha_0 < \dots < \alpha_p} H^q(\pi^{-1}(U_{\alpha_0, \dots, \alpha_p}))$$

es decir, la primera página de la sucesión corresponde a la cohomología de Čech del pre haz definido anteriormente. Dado que $\mathfrak{U}$ es un buen cubrimiento, se tiene que $\mathcal{H}^q$ es localmente

constante con grupo $H^q(F)$. En efecto, si $V \subset U$ es una inclusión de abiertos, el morfismo de restricción $r_{U,V} : H^q(\pi^{-1}(U)) \rightarrow H^q(\pi^{-1}(V))$ es la restricción natural, y si U es contractible por la Proposición 7.11 tenemos que $\pi^{-1}(U) \cong U \times F$ y la fórmula de Künneth implica que

$$\mathcal{H}^q(U) \cong H^q(U \times F) \cong \bigoplus_{a+b=q} H^a(U) \otimes H^b(F) = H^q(F)$$

donde hemos usado el lema de Poincaré 4.5. Esto en particular significa también que las restricciones son isomorfismos.

Además, como $d_1 = \delta$ en E_1 tenemos que

$$E_2^{p,q} = H_\delta^p(\mathfrak{U}, \mathcal{H}^q)$$

y por el teorema 7.8 la sucesión espectral de K converge a $H_D^\bullet(K)$ y por el principio de Mayer-Vietoris generalizado esto es igual a $H^\bullet(E)$ puesto que $\pi^{-1}(\mathfrak{U})$ es cubrimiento de E . Ahora, si M es simplemente conexa y $H^q(F)$ es finito dimensional se puede probar que $\mathcal{H}^q$ es el haz constante $\mathbb{R} \oplus \dots \oplus \mathbb{R}$ en $\mathfrak{U}$, consistiendo de $\dim H^q(F)$ copias de $\mathbb{R}$ (ver [1, Theorem 13.2, 13.4]). Así tenemos que

$$E_2^{p,q} = H^p(\mathfrak{U}, \mathbb{R} \oplus \dots \oplus \mathbb{R}) = H^p(\mathfrak{U}, \mathbb{R}) \otimes H^q(F) = H^p(M) \otimes H^q(F)$$

■

8. APLICACIONES

En esta última sección del texto mostraremos algunas de las aplicaciones más importantes de las sucesiones espectrales: La fórmula de Künneth y la cohomología del espacio proyectivo.

8.1. Fórmula de Künneth. A continuación se presenta una demostración de la fórmula de Künneth a partir del teorema de Leray.

Teorema 8.1 (Fórmula de Künneth). *Sean M, F dos variedades diferenciables y $\mathfrak{U}$ un buen cubrimiento de M . Si los grupos de cohomología de F son de dimensión finita, entonces*

$$H^\bullet(M \times F) = H^\bullet(M) \otimes H^\bullet(F),$$

donde la fórmula anterior se lee como

$$H^n(M \times F) = \bigoplus_{p+q=n} H^p(M) \otimes H^q(F).$$

Demostración. Sea $M \times F \rightarrow M$ fibrado trivial y escribamos $\mathcal{H}^q(F) := \mathcal{H}^q$. Por la teorema de Leray, la sucesión espectral del fibrado anterior tiene como segunda página a

$$E_2^{p,q} = H^p(\mathfrak{U}, \mathcal{H}^q(F)).$$

Dado que $M \times F$ es trivial, entonces el prehaz $\mathcal{H}^q(F)$ es constante y por tanto

$$E_2^{p,q} = H^q(\mathfrak{U}, \mathbb{R}) \otimes H^q(F) = H^p(M) \otimes H^q(F).$$

Por otro lado, dado que todo elemento en $E_2^{p,q}$ puede ser representado como una forma global (ya que $\omega_1 \otimes \omega_2 \in E_2^{p,q}$ se puede pegar en (ω_1, ω_2)), la fórmula (7.1) junto con la definición de δ para la cohomología de Čech nos dice que $d_2 = 0$, y luego $d_3 = d_4 = \dots = 0$, por lo cual $E_2 = E_\infty$. Nuevamente, por el teorema de Leray obtenemos que

$$H^\bullet(M \times F) = E_\infty = E_2 = H^\bullet(M) \otimes H^\bullet(F),$$

donde la igualdad anterior es en el sentido del enunciado debido a la construcción de la cohomología de doble complejos para el caso del doble complejo de Čech. $\blacksquare$

Observación 8.2. Note que la demostración anterior nos dice que la fórmula de Künneth y el teorema de Leray son resultados equivalentes, puesto que la demostración del teorema de Leray presentada utiliza la fórmula de Künneth.

Ejemplo 8.3. De manera directa, vía inducción podemos calcular las cohomologías de los toros $(\mathbb{S}^n)^m$. Explícitamente

$$H^\bullet((\mathbb{S}^n)^m) = \bigotimes_{k=1}^m H^\bullet(\mathbb{S}^n).$$

8.2. Cohomología del espacio proyectivo complejo. Consideremos la esfera unitaria en $\mathbb{C}^{n+1}$, definida por

$$\mathbb{S}^{2n+1} = \{(z_0, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^{n+1} \mid |z_0|^2 + \dots + |z_n|^2 = 1\}$$

Podemos entonces definir una acción $\mathbb{S}^1 \curvearrowright \mathbb{S}^{2n+1}$ mediante

$$(z_0, \dots, z_n) \mapsto (\lambda z_0, \dots, \lambda z_n), \quad \lambda \in \mathbb{S}^1$$

El cociente de la acción anterior es entonces lo que conocemos como espacio proyectivo $\mathbb{CP}^n$. La construcción anterior también permite dotar a $\mathbb{S}^{2n+1}$ de manera natural de una estructura

de fibrado sobre $\mathbb{CP}^n$ con fibra $\mathbb{S}^1$, y nos referimos a este como *fibrado circular*. Dado que $\mathbb{CP}^n$ es simplemente conexo, del teorema de Leray se tiene que

$$E_2^{p,q} = H^p(\mathbb{CP}^n) \otimes H^q(\mathbb{S}^1).$$

Por lo tanto la página E_2 de la sucesión espectral tiene solo dos filas no nulas (recordar la cohomología de $\mathbb{S}^1$) y más aún estas filas son idénticas puesto que $H^q(\mathbb{S}^1) = \mathbb{R}$ para $q = 0, 1$. Por ejemplo, para $n = 2$ tenemos el siguiente diagrama

$$E_2 \quad \begin{array}{cccccc} | & | & | & | & | & | \\ \mathbb{R} & A & B & C & D & 0 \\ | & \searrow & & \searrow & & \\ \mathbb{R} & A & B & C & D & 0 \\ | & | & | & | & | & | \end{array}$$

donde las columnas son la cohomología de $\mathbb{CP}^2$ y la primera columna representa la cohomología de la fibra. Además vemos que a contar de la columna 5 la cohomología es trivial puesto que $\dim \mathbb{CP}^2 = 4$. Ahora, por construcción de la sucesión espectral el morfismo $d_3 = 0$ puesto que se moverá dos columnas hacia abajo y similarmente todos los morfismos serán 0 en las páginas sucesivas y por lo tanto esta sucesión converge a $E_3 = H^\bullet(\mathbb{S}^5)$. Lo anterior implica finalmente que en E_2 todas las flechas son isomorfismos, así que $A = C = 0$ y $B = D = \mathbb{R}$.

Podemos emplear el mismo argumento en dimensión arbitraria para concluir que

$$H^\bullet \mathbb{CP}^n = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{si } n = 0, 2, 4, \dots \\ 0 & \text{si } n = 1, 3, 5, \dots \end{cases}$$

REFERENCIAS

- [1] Raoul Bott and Loring Tu. *Differential Forms in Algebraic Topology*, volume 82. 01 1982.
- [2] John Lee. *Introduction to smooth manifolds. 2nd revised ed*, volume 218. 01 2012.
- [3] John McCleary. A history of spectral sequences, chapter 23. 12 1999.
- [4] Pedro Montero. *Geometría Algebraica*, volume 1. 2021.
- [5] Ravi Vakil. *The Rising Sea: Foundations of Algebraic Geometry*, volume 1. 2017.

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA, UNIVERSIDAD TÉCNICA FEDERICO SANTA MARÍA, VALPARAÍSO, CHILE.

Email address: `sebastian.fuentes@usm.cl`, `ernesto.treumun@usm.cl`