Ecuaciones Diferenciales Ordinarias y Foliaciones. Teorema de Frobenius.

Alonso Carrasco[1], **Adrián López**[2], **Rodrigo Pizarro**[3]

[1,2,3] Departamento de Matemáticas, Universidad Técnica Federico Santa María, Valparaíso

Abstract

En este proyecto se introducen los aspectos elementales de la teoría requerida para comprender el enunciado del teorema de Frobenius en su forma moderna. Principalmente, describimos la teoría de distribuciones y la de foliaciones sobre variedades diferenciales con el objetivo de tener las herramientas necesarias para enunciar y demostrar dicho teorema. Adicionalmente, se discuten ejemplos y aplicaciones.

Índice

1 Introducción **2**

2 Formas diferenciales **2**

3 Distribuciones **4**

4 Foliaciones **8**

4.1 Hojas de la foliación 9

4.2 Foliaciones definidas por órbitas de acciones 11

5 Teorema de Frobenius **13**

6 Aplicaciones y ejemplos **15**

6.1 Sistemas afines en control 15

1. Introducción

El Teorema de Frobenius (teorema 5.1) es un resultado clásico de la Geometría Diferencial que conecta colecciones de subespacios del fibrado tangente de una variedad diferenciable M con la existencia de una familia de subvariedades conexas de M especiales, en cierto sentido por definir. El foco de este trabajo es contextualizar, enunciar y demostrar el Teorema de Frobenius visto como una generalización del teorema de Existencia y Unicidad de soluciones para Ecuaciones Diferenciales Ordinarias definidas sobre variedades diferenciables, el cual resuelve el problema de saber cuándo es posible encontrar una trayectoria $\varphi :]-\epsilon, \epsilon[\to M$ tal que $\varphi(0) = p \in M$ y $\varphi'(t) = X(\varphi(t))$, en donde $X \in \mathfrak{X}(M)$ es un campo de vectores dado. Para ello, será necesario introducir las nociones de *distribución* y de *foliación*, que vendrían a generalizar por un lado a los campos de vectores de vectores que plantean una ecuación y por el otro a las trayectorias que son sus soluciones, respectivamente.

En palabras sencillas, buscamos generalizar la idea de encontrar una trayectoria $\varphi :]-\epsilon, \epsilon[\to M$ tangente en todo punto a un campo de vectores (en el sentido de que $\varphi(0) = p$ y $\varphi'(t) = X(\varphi(t))$) a que, dada una colección de subespacios, todos de una misma dimensión, de los espacios tangentes de M, encontrar una subvariedad tal que dichos subespacios coincidan con el espacio tangente de la subvariedad en todos sus puntos.

A lo largo del texto, en primer lugar definiremos los conceptos ya conocidos acerca de formas diferenciales en la sección 2. Posteriormente, introduciremos las nociones de distribuciones y foliaciones en las secciones 3 y 4 respectivamente. Las distribuciones vendrían a formalizar la idea de tomar colecciones de subespacios del fibrado tangente de una variedad M y las foliaciones son la construcción que captura la estructura global de las subvariedades cuyos espacios tangentes coinciden con una distribución. En conjunto, estas secciones comprenderán todo lo necesario para enunciar y demostrar el Teorema de Frobenius, que, como mencionamos establece una relación entre ambos tópicos al dar condiciones necesarias y suficientes para determinar cuándo una distribución induce una foliación. Finalmente, en la sección 5 se enuncia y demuestra el teorema de Frobenius y en la sección 6 se dan ejemplos y aplicaciones de este teorema.

2. Formas diferenciales

Para definir formas diferenciales, es necesario estudiar la noción de $p-$potencia exterior

Definición 2.1 (p-ésima potencia exterior)**.** *Sean V y W dos $\mathbb{R}-ev$ y sea*

$$Alt^p(V, W) := \{f : V \overset{p \text{ veces}}{\times \cdots \times} V \to W \text{ } p\text{-lineal alternada}\}.$$

Aquí, f es alternada si para toda permutación $\sigma \in S_p$ se tiene

$$f(x_{\sigma(1)}, \cdots, x_{\sigma(p)}) = \varepsilon(\sigma) f(x_1, \cdots, x_p),$$

donde $\varepsilon(\sigma)$ es la signatura de la permutación.

La $p-$esima potencia exterior de V es un $\mathbb{R}-$e.v $\Lambda^p V$ junto con una aplicación $p-$ lineal alternada

$$\overset{p \text{ veces}}{V \times \cdots \times V} \to \Lambda^p V, (x_1, \cdots, x_p) \mapsto x_1 \wedge \cdots \wedge x_p.$$

Sea M una variedad diferenciable y $\pi : E \to M$ un fibrado vectorial de rango r. Entonces, $\Gamma(M, E) = \{s : M \to E \text{ sección de } \pi\}$ es un $\mathcal{C}^\infty(M)-$módulo. Más explícitamente, si $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ y $s, t \in \Gamma(M, E)$, entonces

$$(s+t)(x) := s(x) + t(x) \qquad \text{y } (fs)(x) := f(x)s(x).$$

Definición 2.2. *El fibrado tangente $T^*M \to M$ es el dual del fibrado tangente. En particular, para todo $x \in M$ se tiene que $(T^*M)_x = \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(T_xM, \mathbb{R}) =: T_x^*M$.*

Más explícitamente, si $(x_1, \cdots, x_n)$ son coordenadas locales de M en un abierto $U \subset M$, entonces los diferenciales $\mathrm{d}x_1, \cdots, \mathrm{d}x_n$ forman una base de secciones de T^*M en U y luego inducen una trivialización local $T^*M\Big|_U \cong U \times \mathbb{R}^n$.

Definición 2.3. *Una $1-$forma diferencial en M es una sección $\omega \in \Gamma(M, T^*M) =: \Omega^1(M)$.*

Ejemplo 2.1. Sea $f : M \to \mathbb{R}$ una función suave. Entonces $\mathrm{d}_x f : T_xM \to \mathbb{R}$ es un elemento de T_x^*M para todo $x \in M$ y luego $\omega := \mathrm{d}f$, con $w(x) = \mathrm{d}_x f$, es una $1-$forma diferencial en M.

La definición de $p-$ésima potencia exterior nos permite definir $p-$formas diferenciales. Sea $E \to M$ un fibrado vectorial de rango r. Entonces $\Lambda^p E \to M$ es un fibrado vectorial de $\binom{r}{p}$ con fibra $\Lambda^p E_x$ sobre cada $x \in M$

Definición 2.4 (p-forma diferencial)**.** *Una $p-$forma diferencial en M es una sección $\omega \in \Omega^p(M) := \Gamma(M, \Lambda^p T^*M)$ del fibrado vectorial $\Lambda^p T^*M \to M$.*

Definición 2.5 (Pullback)**.** *Sea $f : M \to N$ una función suave entre variedades diferenciables. Luego*

$$\mathrm{d}_x f : T_xM \to T_{f(x)}N$$

tiene asociado una aplicación dual (transpuesta)

$$\begin{aligned} {}^t(\mathrm{d}_x f) =: \mathrm{d}_x^* f \quad : \quad & T_{f(x)}^*N \to T_x^*M \\ & \ell \mapsto \ell \cdot \mathrm{d}_x f \end{aligned}$$

y en particular se extiende a $\Lambda^p \mathrm{d}_x^* f \quad : \quad \Lambda^p T_{f(x)}^* N \to \Lambda^p T_x^* M$.

Dada $\omega \in \Omega^p(N)$ una $p-$forma diferencial, se define el pullback de ω por f como $f^*\omega \in \Omega^p(M)$ dado por:

$$(f^*\omega)(x) := (\Lambda^p \mathrm{d}_x^* f)(\omega(f(x))) \qquad \textit{para todo } x \in M.$$

3. Distribuciones

Sea M una variedad diferenciable. Una **distribución** D de M de rango k corresponde a una colección

$$D := \bigsqcup_{p \in M} D_p$$

en donde, para todo $p \in M$, $D_p \subseteq T_pM$ es un subespacio de dimensión k. Se dice que D es una **distribución suave** si para cada punto $p \in M$ existe una vecindad U tal que existen $X_1^p, \ldots, X_k^p \in \mathfrak{X}(M)$ tales que $X_1^p(q), \ldots, X_k^p(q)$ forman una base para D_q para todo $q \in U$. En este caso se dice que la distribución D es localmente generada por los campos vectoriales $X_1^p, \ldots, X_k^p$. Nos referiremos por **secciones locales** de D en un punto $p \in M$ a cualquier campo de vectores $X \in \mathfrak{X}(M)$ para el cual exista una vecindad $p \in U \subseteq M$ tal que $X(q) \in D$ para todo $q \in U$.

Con esta definición en mano, podemos definir lo que será uno de los conceptos más importantes en este trabajo: las **variedades integrales**.

Definición 3.1 (Variedad integral)**.** *Sea M una variedad diferenciable y $D \subset TM$ una distribución suave, se dice que $N \subset M$ es una variedad integral de D si $T_pN = D_p$ para todo $p \in N$.*

De esta manera diremos que una distribución D es **integrable** si cada punto de M está contenido en una variedad integral de D.

Ejemplo 3.1. Sea $X \in \mathfrak{X}(M)$ un campo vectorial sobre M que nunca se anula. Tendremos que X induce una distribución D sobre M dada por

$$D = \bigsqcup_{p \in M} \langle X(p) \rangle$$

Si denotamos por φ_p al flujo de X tal que $\varphi_p(0) = p$, entonces $\varphi_p(I_p)$ es una curva integral de D (En este caso I_p es el intervalo maximal de φ_p).

Para estudiar la existencia de variedades integrales es útil introducir la noción de distribución involutiva.

Definición 3.2 (Distribución involutiva)**.** *Sea M una variedad diferenciable y D una distribución suave en M. Se dice que D es involutiva si, dadas dos secciones locales de D, su corchete de Lee también es una sección local de D, o equivalentemente, que el conjunto $\Gamma(D) \subset \mathfrak{X}(M)$ de las secciones locales de D es una subálgebra de Lie de $\mathfrak{X}(M)$.*

La pregunta de si una distribución es involutiva surge de manera natural a la hora de estidar la existencia de subvariedades integrales debido a la siguiente proposición, que establece a la involutividad de una distribución como condición necesaria para la existencia de subvariedades integrales.

Proposición 3.1. Si una distribución es integrable, entonces es involutiva

Demostración . Sea $D \subset TM$ una distribución integrable de rango k, y sean X, Y secciones locales suaves de D definidas en un abierto $U \subset M$. Sea $p \in U$ y N una variedad integral de D que contiene a p. Dado que X e Y son secciones de D entonces:

$$X(p), Y(p) \in D_p = T_pN$$

Por lo que $X(p), Y(p) \in T_pN$. Ahora solo faltará demostrar que $[X, Y](p) \in T_pN$. Si expresamos X e Y usando coordenadas locales tendremos que, dado que X, Y son secciones de D que es de orden k, estas podrán ser expresadas como:

$$X = \sum_{i=1}^{k} f_i \partial x_i, \quad Y = \sum_{j=1}^{k} g_i \partial x_j$$

Donde las componentes $\partial x_1, \ldots, \partial x_k$ generan D localmente entonces su corchete de Lie será:

$$[X, Y] = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \left(f_j \partial x_j g_i - g_j \partial x_j f_i \right) \partial x_i$$

Dado que estamos buscando que $[X, Y]$ sea una sección de D, buscamos que las componentes $\partial x_{k+1}, \ldots, \partial x_n$ sean nulas, notemos que esto se cumple ya que:

$$\sum_{i=k+1}^{n} \sum_{j=1}^{n} f_j \partial x_j g_i - g_j \partial x_j f_i) \partial x_i$$

Donde en este caso $f_i = g_i \equiv 0$, por lo tanto:

$$\sum_{i=k+1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (f_j \partial x_j 0 - g_j \partial g_j 0) \partial x_i = 0$$

Por lo tanto, $[X, Y]$ es una combinación lineal de $\partial x_1, \ldots, \partial x_k$ por ende $[X, Y]$ es una sección de D. Con esto concluimos que gracias a la arbitrariedad de $X, Y \in \Gamma(D)$ que:

$$\forall X, Y \in \Gamma(D), \ [X, Y] \in \Gamma(D)$$

Por lo tanto D es involutiva. □

En la demostración anterior se utilizó la herramienta de los marcos locales. Esta herramientas nos permite caracterizar la involutividad de manera más sencilla.

Proposición 3.2 (Criterio del marco local para la involutividad)**.** Sean $D \subseteq TM$ una distribución. Si en una vecindad de cada punto de M existe un marco local suave $(V_1, \ldots, V_k)$ en D tales que $[V_i, V_j]$ es una sección de D para todo $i, j = 1, \ldots, k$, entonces D es involutiva.

Demostración . Sea $p \in U \subset M$ abierto y sea $(V_1, \ldots, V_k)$ un marco local suave de U que satisface nuestra hipótesis en una vecindad de p. Si expresamos X e Y en términos de $\{V_i\}$, tendremos que:

$$X = (X^i V_i), \ Y = (Y^i V_i)$$

En dicha vecindad, entonces:

$$[X,Y] = [(x^i V_i, (Y^j V_j] = X^i Y^j [V_i, V_j] + X^i (V_i Y^j V_j - Y^j (V_j X^i) V_i$$

Que gracias a que $V_i, V_j, [V_i, V_j]$ son secciones de D, concluimos que $[X,Y]$ es una sección de D, con lo que concluimos que D es involutiva. □

Con respecto a los marcos locales, también demostraremos el siguiente lema.

Lema 3.1. Sea M una variedad diferenciable de dimensión n, y sean $p \in M$ y $p \in U \subseteq M$ un punto de la variedad y un abierto de dicha variedad respectivamente y D una distribución de rango k sobre M. Si $\{X\}_{i=1}^k \subset \mathfrak{X}(M)$ tales que $\{X_1|_U, \ldots, X_k|_U\}$ son un marco local de $D|_U$, entonces existirán $V \subset U$ abierto y $\{X_j\}_{j=k+1}^n \subset \mathfrak{X}(M)$ tales que $\{X_1|_V, \ldots, X_k|_V, X_{k+1}|_V, \ldots, X_n|_V\}$ que será un marco local sobre $TM|_V$.

Demostración . Dado que $\{X_1|_U, \ldots, X_k|_U\}$ es un marco local de $D|_U$, entonces en particular se tiene que $\{X_1|_p, \ldots, X_k|_p\}$ es un marco local de $D|_p$.

Sean $X_{k+1}, \ldots, X_n$ tales que completen la base $\{X_1|_p, \ldots, X_k|_p\}$. Esto implicará que puntualmente:

$$\{X_1|_p, \ldots, X_k|_p, X_{k+1}, \ldots, X_n\}$$

será una base de $TM|_p$. Pero notemos que por la continuidad de $X_1, \ldots, X_k$ tendremos que:

$$p \to \ \det(\{X_1|_p, \ldots, X_k|_p, X_{k+1}, \ldots, X_n\})$$

Será continua, y en particular $\det(\{X_1|_p, \ldots, X_k|_p, X_{k+1}, \ldots, X_n\} \neq 0$, por lo tanto por continuidad:

$$\forall q \in V \subset U, \ \det(\{X_1|_q, \ldots, X_k|_q, X_{k+1}, \ldots, X_n\}) \neq 0$$

Lo que implicará que $\{X_1|_p, \ldots, X_k|_p, X_{k+1}, \ldots, X_n\}$ será un marco local sobre $TM|_V$. □

Este lema nos permite completar marcos locales, y nos será útil más adelante a la hora de demostrar el teorema de Frobenius.

Otro resultado previo importante es el teorema de la forma canónica para campos vectoriales. En este contexto, se dice que dos campos vectoriales $X_1, X_2 \in \mathfrak{X}(M)$ son conmutativos si $[X_1, X_2] = 0$.

Teorema 3.1 (Teorema de la forma canónica para campos vectoriales)**.** Sea M una variedad diferenciable de dimensión n y sean $(V_1, \ldots, V_k) \subset \mathfrak{X}(M)$ un conjunto linealmente independiente de campos vectoriales sobre M que conmutan entre sí, definidos en un abierto en común $W \subset M$. Para cada $p \in W$, existe una carta local (U, s^i) centrada en p tal que $V_i = \partial/\partial s^i$ para $i = 1 \ldots, k$. Si $S \subseteq W$ es una subvariedad de codimensión k incrustada en W y $p \in S$ tal que $T_p S$ es complementario a $(V_1|_p, \ldots, V_k|_p)$, entonces las coordenadas de la carta local pueden ser elegidas tal que $S \cap U$ es la sección definida por $s^1 = \cdots = s^k = 0$.

Demostración . Sean $M, W, S, \{V_i\}, p$ como en las hipótesis. Sea $(U, (x^i))$ una carta local centrada en p tal que $S \cap U = \{x \in U : \ x^1 = \cdots = x^k = 0\}$. Por hipótesis podemos asegurar que $\{V_1|_p, \ldots, V_k|_p, \partial/\partial x^{k+1}, \ldots, \partial/\partial x^n\}$ generan T_pM. Sean $\{\theta_i\}_{i=1}^n$ los flujos asociados a $\{V_i\}_{i=1}^n$, para $\epsilon > 0$ suficientemente pequeño, tendremos que existe $Y \subset U$ abierto tal que:

$$(\theta_1)|_{t_1} \circ (\theta_2)|_{t_2} \circ \cdots \circ (\theta_n)|_{t_n}$$

Es un difeomorfismo de Y hasta U con $|t_1|, |t_2|, \ldots, |t_n| < \epsilon$. Se definirá

$$\Omega = \{(s^{k+1}, \ldots, s^n \in \mathbb{R}^{n-k} : (0, \ldots, 0, s^{k+1}, \ldots, s^n) \in Y\}$$

y definiremos $\Phi : (-\epsilon, \epsilon)^k \times \Omega \to U$ por:

$$\Phi(s_1, \ldots, s_n) = (\theta_1)|_{s_1} \circ (\theta_2)|_{s_2} \circ \cdots \circ (\theta_n)|_{s_n}(0, \ldots, 0, s^{k+1}, \ldots, s^n)$$

Lo que buscamos demostrar ahora es que esta función es un difeomorfismo cerca de 0 esto se hará demostrando que $\partial/\partial s^i$ está $\Phi-$relacionado con V_i.
Notemos que para $s_0 \in (-\epsilon, \epsilon)^k \times \Omega$:

$$\begin{aligned} d\Phi_{s_0}\left(\left.\frac{\partial}{\partial s^i}\right|_{s_0}\right) f &= \left.\frac{\partial}{\partial s^i}\right|_{s_0} f\left(\Phi\left(s^1, \ldots, s^n\right)\right) \\ &= \left.\frac{\partial}{\partial s^i}\right|_{s_0} f\left((\theta_1)_{s^1} \circ \cdots \circ (\theta_k)_{s^k}\left(0, \ldots, 0, s^{k+1}, \ldots, s^n\right)\right) \\ &= \left.\frac{\partial}{\partial s^i}\right|_{s_0} f\left((\theta_i)_{s^i} \circ (\theta_1)_{s^1} \circ \cdots \circ (\theta_{i-1})_{s^{i-1}} \circ (\theta_{i+1})_{s^{i+1}}\right. \\ &\quad \left. \circ \cdots \circ (\theta_k)_{s^k}\left(0, \ldots, 0, s^{k+1}, \ldots, s^n\right)\right). \end{aligned}$$

Dado que para todo $q \in M$, $t \to (\theta_i)_t(q)$ es una curva integral de V_i, tendremos que la última expresión será equivalente a $V_i|_{\Phi(s_0)} f$, por lo que concluimos que:

$$d\Phi_{s_0}\left(\left.\frac{\partial}{\partial s^i}\right|_{s_0}\right) = V_i|_{\Phi(s_0)}$$

Lo que implicará que $\partial/\partial s^i$ está $\Phi-$relacionado con V_i.
Ahora se demostrará que $d\Phi_0$ es invertible, notemos que desde la igualdad anterior:

$$d\Phi_0\left(\left.\frac{\partial}{\partial s^i}\right|_0\right) = V_i|_p, \ \forall i = 1, \ldots, k$$

Por el otro lado:

$$d\Phi_0\left(\left.\frac{\partial}{\partial s^i}\right|_0\right) = \frac{\partial}{\partial x^i}|_p, \ \forall i = k+1, \ldots, n$$

Por lo tanto, $d\Phi_0$ envía la base $(\partial/\partial s^1_0, \ldots, \partial/\partial s^n|_0)$ de $T_0\mathbb{R}^n$ a la base

$$\{V_1|_p, \ldots, V_k|_p, \partial/\partial x^{k+1}, \ldots, \partial/\partial x^n\}$$

de T_pM. Luego, por el teorema de la función inversa, Φ será un difeomorfismo en una vecindad de 0 y $\varphi = \Phi^{-1}$ es un mapeo suave que lleva $\partial/\partial s^i$ a V_i para $i = 1, \ldots, k$ y lleva S a la sección $s^1 = \cdots = s^k = 0$. □

4. Foliaciones

Sea M una variedad diferenciable C^∞ de dimensión m. Intuitivamente, una foliación de dimensión n definida sobre M es una colección de subvariedades conexas y de dimensión n de M, denominadas *hojas* de la foliación, cuya unión global conforma a M, pero que localmente se apilan como subconjuntos de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m-n}$ con la segunda coordenada constante, análogo a hojas de papel que se juntan para formar una resma.

Naturalmente, el ejemplo más simple de una foliación de dimensión n en una variedad de dimensión $m > n$ consiste en la descomposición $\mathbb{R}^m = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m-n}$ con hojas dadas por los conjuntos $\mathbb{R}^n \times \{c\}$ con $c \in \mathbb{R}^{m-n}$. Esta es la estructura que, intuitivamente, toda foliación debería de tener localmente. Los difeomorfismos $h : U \subseteq \mathbb{R}^m \to V \subseteq \mathbb{R}^m$ que preservan las hojas de esta foliación son necesariamente de la forma

$$h(x, y) = (h_1(x, y), h_2(y)), \qquad (x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m-n}$$

con $h_1 : U \to \mathbb{R}^n, h_2 : \pi_{\mathbb{R}^{m-n}}(U) \to \mathbb{R}^{m-n}$ funciones diferenciables en sus respectivos espacios. Note que la condición de que h_2 **no** dependa de la componente $x \in \mathbb{R}^n$ es la que permite preservar las hojas, pues conjuntos de la forma $\mathbb{R}^n \times \{c\}$ son trasformados en subconjuntos de $\mathbb{R}^n \times \{h_2(c)\}$, las cuales poseen la estructura de hojas de la foliación. Con esto en mente, presentamos la definición formal de foliación:

Definición 4.1 (Foliación)**.** *Sea M una variedad diferenciable C^∞ de dimensión m. Una foliación de clases C^r ($r \geq 1$) de dimensión n de M es un atlas maximal $\mathcal{F}$ de clase C^r que cumple con las siguientes dos propiedades:*

1. *Si (U, φ) es una carta local en $\mathcal{F}$, entonces $\varphi(U) = U_1 \times U_2 \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m-n}$, en donde U_1 y U_2 son bolas abiertas de $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}^{m-n}$ respectivamente.*

2. *Si $(U, \varphi), (V, \psi) \in \mathcal{F}$ son tales que $U \cap V \neq \emptyset$, entonces el cambio de cartas*

$$\psi \circ \varphi^{-1} : \phi(U \cap V) \to \psi(U \cap V)$$

es de la forma $\psi \circ \varphi^{-1}(x, y) = (h_1(x, y), h_2(y))$, con h_1 y h_2 funciones de clase C^r es sus respectivos espacios.

Diremos que $\mathcal{F}$ es una estructura foliada definida sobre M y que la cartas $(U, \varphi) \in \mathcal{F}$ son cartas foliadas.

Observación: Tomando en $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}^{m-n}$ la norma del máximo, podemos decir que las cartas de una foliación tienen como imágenes a *cubos* de $\mathbb{R}^m$.

La condición 1 permite trasladar abiertos de M en abiertos de $\mathbb{R}^m$ conexos y con la estructura foliada de $\mathbb{R}^n$ que buscamos imitar, es decir, pensados como subconjuntos de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m-n}$; y la condición 2. se traduce en cambios de cartas que respetan esta estructura foliada. El atlas $\mathcal{F}$ es casi independiente del atlas que dota a M de su estructura de variedad diferenciable C^∞, siendo la única relación entre ambos que los cambios de coordenadas mixtos son de clase C^r, es decir, de la misma

regularidad que $\mathcal{F}$.

A partir de la defínción 4.1 no es inmediatamente clara la presencia de las subvariedades de M que vendrían a ser las hojas de la foliación $\mathcal{F}$. La siguiente sección pretende aclarar esta situación.

4.1. Hojas de la foliación

Ahora pasaremos a ver cómo una estructura foliada sobre M define un conjunto especial de subvariedades conexas de M correspondientes a las hojas de la foliación. Partiremos por definir lo que vendrá a ser

Considere una carta foliada $(U, \varphi) \in \mathcal{F}$. Gracias a la parte 1 de la definición 4.1, podemos escribir , y considerar los conjuntos $\varphi^{-1}(U_1 \times \{c\}) \subset M$ con $c \in U_2$. Estos conjuntos son llamados *placas*. Como la función $f := \varphi^{-1}|_{U_1 \times \{c\}} : U_1 \times \{c\} \to M$ es una submersión, las placas son conjuntos conexos. Adicionalmente, dos placas α, β asociadas a la misma carta foliada son iguales o disjuntas

Definición 4.2 (Placas)**.** *Sea $(U, \varphi) \in \mathcal{F}$ una carta foliada. Haciendo uso de la condición 1, escribamos $\varphi(U) = U_1 \times U_2 \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m-n}$, con $U_1 \subseteq \mathbb{R}^n$ y $U_2 \subseteq \mathbb{R}^{m-n}$ bolas abiertas en sus respectivos espacios. Para todo $c \in U_2$, definimos como una placa de U al conjunto $\alpha = \varphi^{-1}(U_1 \times \{c\}) \subset M$.*

Notemos que la función $\varphi^{-1}|_{U_1 \times \{c\}} : U_1 \times \{c\} \to M$ es una inmersión de clase C^r y un homeomorfismo, por lo que la placa α es una subvariedad conexa (por ser imagen de un conjunto conexo) de dimensión n de M. Es directo de la definición y de 2 que dos placas α, β de U, cumplen con que $\alpha = \beta$ o $\alpha \cap \beta = \emptyset$. Adicionalmente, note que la colección de todas las placas recubre a M. Luego, podemos definir la siguiente relación de equivalencia:

$$\forall\, x, y \in M, \quad x \sim y \iff \exists\, \alpha_1, \ldots, \alpha_k \text{ sucesión de placas tales que } \alpha_i \cap \alpha_{i+1} \neq \emptyset \tag{1}$$

para todo $i = 1, \ldots, k-1$. Definimos las hojas de la foliación $\mathcal{F}$ como las clases de equivalencia de esta relación. Ahora usaremos el teorema del pegado para demostrar el siguiente teorema:

Teorema 4.1. Sea M una variedad diferenciable y $\mathcal{F}$ una estructura foliada de clase C^r y dimensión n definida sobre M. Cada hoja F de $\mathcal{F}$ posee una estructura de una variedad diferenciable de clase C^r tal que los dominios de sus cartas locales son placas de $\mathcal{F}$. Más aun, la función $i : F \to M$ dada por $i(p) = p$ es una inmersión de clase C^r.

Demostración . Sea F una hoja de $\mathcal{F}$. Denotemos al conjunto de sus placas como

$$\mathcal{P} = \{(\alpha, \varphi_\alpha) \,:\, \alpha \subset F \text{ y existe } (U, (\varphi_1, \varphi_2)) \in \mathcal{F} \text{ tal que } \varphi_\alpha = \varphi_1|_\alpha \text{ y } \alpha \text{ es una placa de } U\}$$

Notemos que, por definición,

$$F = \bigcup_{(\alpha, \varphi_\alpha) \in \mathcal{P}} \alpha$$

y que para todo $\alpha \in \mathcal{P}$ las funciones φ_α definen un homeomorfismo entre α y abiertos de $\mathbb{R}^n$. Luego, para aplicar el Teorema del Pegado y concluir el resultado basta demostrar que, dadas $(\alpha, \varphi_\alpha), (\beta, \psi_\beta) \in \mathcal{P}$ con $\alpha \cap \beta \neq \emptyset$, los conjuntos $\varphi_\alpha(\alpha \cap \beta)$ y $\psi_\beta(\alpha \cap \beta)$ son abiertos de $\mathbb{R}^n$ y que los cambios de cartas $\varphi_\alpha \circ \psi_\beta^{-1} : \psi_\beta(\alpha \cap \beta) \to \varphi_\alpha(\alpha \cap \beta)$ son difeomorfismos de clase C^r. Para ello, partiremos por probar que $\alpha \cap \beta$ es abierto en α y en β respecto de la topología inducida por M en F. Sean (U, φ), $(V, \psi) \in \mathcal{F}$ tales que $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)$ con $\varphi_1|_\alpha = \varphi_\beta$ y $\psi = (\psi_1, \psi_2)$ con $\psi_1|_\beta = \psi_\beta$. Notemos que $\alpha \subseteq U$, $\beta \subseteq V$ y que existen constantes $a, b \in \mathbb{R}^{\dim(M)-n}$ tales que

$$\varphi(\alpha) \subseteq \mathbb{R}^n \times \{a\} \quad \text{y} \quad \psi(\beta) \subseteq \mathbb{R}^n \times \{b\}$$

Como $U \cap V \neq \emptyset$, debido a la condición 2 de la definición 4.1 en la sección 4, tendremos que el cambio de cartas $\varphi \circ \psi^{-1} : \psi(U \cap V) \to \varphi(U \cap V)$ es de la forma

$$\varphi \circ \psi^{-1}(x, y) = (h_1(x, y), h_2(y)) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{\dim(M)-n}, \quad \text{con } (x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{\dim(M)-n}$$

En particular, como también $\alpha \cap \beta \neq \emptyset$, tendremos que

$$\varphi \circ \psi^{-1}(x, b) = (h_1(x, b), h_2(b)) = (h_1(x, b), a) \tag{2}$$

Se sigue que si $x \in \beta \cap U$, entonces $x \in \alpha \cap \beta$, pues

$$\varphi(x) = (\varphi \circ \psi^{-1})(\psi(x)) = (\varphi \circ \psi^{-1})(\psi_1(x), \psi_2(x))$$

y como $\psi_2(x) = b$, por (2) esto es

$$\varphi(x) = (\varphi_1(x), \varphi_2(x)) = (h_1(\psi_1(x), b), h_2(b)) = (h_1(\psi_1(x), b), a)$$

y ya que $\varphi_2(x) = a$, se sigue que $x \in \alpha$, de donde $x \in \alpha \cap \beta$ pues por hipótesis $x \in \beta$. De esta forma,

$$\beta \cap U \subseteq \alpha \cap \beta \implies \beta \cap U = \alpha \cap \beta$$

pues como $\alpha \subseteq U$ la otra inclusión es directa. Haciendo el mismo juego con el cambio de cartas $\psi \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap V) \to \psi(U \cap V)$ se obtiene que $\alpha \cap V = \alpha \cap \beta$ y finalmente que

$$\alpha \cap \beta = \alpha \cap V = \beta \cap U \implies \alpha \cap \beta = F \cap (U \cap V)$$

pues $\alpha = F \cap U$ y $\beta = F \cap V$. Se concluye por definición que $\alpha \cap \beta$ es abierto en F. Luego, como φ_α y ψ_β son homeomorfismos, se sigue que $\varphi_\alpha(\alpha \cap \beta)$ y $\psi_\beta(\alpha \cap \beta)$ son abiertos en $\mathbb{R}^n$. Ahora, notando que $\varphi_\alpha \circ \psi_\beta^{-1} : \psi_\beta(\alpha \cap \beta) \to \varphi_\alpha(\alpha \cap \beta)$ cumple que $(\varphi_\alpha \circ \psi_\beta^{-1})(x) = h_1(x, b)$, observamos que es C^r. Análogamente, con el cambio de cartas opuesto, vemos que $\psi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} = (\varphi_\alpha \circ \psi_\beta^{-1})^{-1}$ también es C^r, por lo que son difeomorfismos. Así, por el Teorema del Pegado existe una única estructura diferenciable en F de clase C^r tal que las placas constituyen una base de abiertos. Que el mapeo $i : F \hookrightarrow M$ dado por $i(p) = p$ es una inmersión es fácil de ver. □

El siguiente resultado vincula las foliaciones con lo visto en la sección 3.

Proposición 4.1. Toda foliación k-dimensional de clase C^r $(r \geq 1)$ en M define una distribución de clase C^{r-1}.

Demostración . Denotemos por $\mathcal{F}$ a la foliación. Para todo $p \in M$, definamos la distribución

$$D = \bigsqcup_{p \in M} D_p$$

en donde $D_p = T_p(\mathcal{F})$, siendo $T_p(\mathcal{F}) \subseteq T_pM$ es el espacio tangente en p a la hoja de $\mathcal{F}$ que pasa por p. Veremos que D es de clase C^{r-1}. Sea $p \in M$ arbitrario y sea $(U, \varphi) \in \mathcal{F}$ una carta foliada. Naturalmente, para todo $q \in U$ tendremos que los vectores

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(q) = (D\varphi(q))^{-1}(e_i), \quad i = 1, \ldots, k$$

en donde $(e_1, \ldots, e_m)$ es la base canónica de $\mathbb{R}^{\dim(M)}$, generan a D_p. Como φ es de clase C^r, los campos de vectores $\frac{\partial}{\partial x_i}$ son de clase C^{r-1}, por lo que D es C^{r-1}.

Notemos que la distribución D así definida es integrable. Luego, en vistas de la proposición 3.1, las foliaciones inducen distribuciones involutivas.

4.2. Foliaciones definidas por órbitas de acciones

Una clase interesante de foliaciones son aquellas inducidas por acciones de *grupos de Lie* sobre una variedad. En esta subsección nos dedicaremos a estudiar este caso debido a su conexión con el teorema de Frobenius cuando el grupo de Lie en cuestión es $(\mathbb{R}, +)$.

Definición 4.3 (Grupo de Lie)**.** *Un grupo de Lie es un grupo G dotado de una estructura de variedad diferenciable tal que la función $G \times G \to G$, $(x, y) \mapsto xy$ es C^∞, lo cual equivale a que las funciones $(x, y) \mapsto xy^{-1}$ y $x \mapsto x^{-1}$ sean C^∞ también.*

Nuestro enfoque será estudiar la manera en la que los grupos de Lie pueden interactuar con variedades. Específicamente estudiaremos *acciones* de grupos de Lie:

Definición 4.4 (Acciones de un grupo de Lie)**.** *Una acción C^r de grupo de Lie sobre una variedad M es una función $\varphi : G \times M \to M$ tal que*

1. *$\varphi(e, x) = x$ para todo $x \in M$, en donde $e \in G$ es el elemento neutro del grupo.*
2. *$\varphi(g_1 \cdot g_2, x) = \varphi(g_1, \varphi(g_2, x))$ para todo $x \in M$ y todo par $g_1, g_2 \in G$.*

*Asociados a la acción, definimos la **órbita** de un punto $x \in M$ bajo la acción φ como el conjunto*

$$\mathcal{O}_x(\varphi) = \{\varphi(g, x) \, : \, g \in G\} \subseteq M$$

*y el **grupo isotrópico** de $x \in M$ como el conjunto*

$$G_x(\varphi) = \{g \in G, : \, \varphi(g, x) = x\} \subseteq G$$

*Finalmente, diremos que una acción es una **acción foliada** si el espacio tangente de $\mathcal{O}_x(\varphi)$ tiene dimensión fija $k \geq 1$ para todo $x \in M$.*

A continuación, demostraremos un teorema que conecta acciones foliadas y foliaciones:

Teorema 4.2. Las órbitas de una acción foliada definen las hojas de una foliación.

Demostración . Denotemos por $\varphi : G \times M \to M$ a la acción cuyas órbitas tienen dimensión fija $k \geq 1$ dentro de una variedad diferenciable M de dimensión m. Fijemos $x_0 \in M$. Debido a que por 1 se tiene que $e \in G_{x_0}(\varphi)$, podemos considerar un subespacio $E \subset T_e(G)$ complementario a $T_e(G_{x_0}(\varphi))$. Intuitivamente, E contiene las direcciones en g tales que la acción φ no es estática en x_0, es decir, las que fluyen a lo largo de la órbita $\mathcal{O}_{x_0}(\varphi)$. De esta forma, $\dim(E) = k$ y podemos considerar una inmersión

$$i_1 : B^k \to G, \quad i_1(0) = e$$

en donde $B^k \subseteq \mathbb{R}^k$ es una bola y se cumple que $i_1(B^k)$ es tangente a E en $i_1(0) = e$. Adicionalmente, consideremos una inmersión

$$i_2 : B^{m-k} \to M, \quad i_2(0) = x_0$$

tal que $B^{m-k} \subseteq \mathbb{R}^{m-k}$ es una bola y la imagen $i_2(B^{m-k})$ es transversal a $\mathcal{O}_{x_0}(\varphi)$. Definamos la función

$$\Phi : B^k \times B^{m-k} \to M, \quad \Phi(x, y) = \varphi(i_1(x), i_2(y))$$

Notemos que $\Phi(0, 0) = x_0$ y que $D\Phi(0, 0) : \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{m-k} \to T_{x_0}(M)$ es un isomorfismo ya que por construcción de i_1 al derivar la primera coordenada obtenemos las direcciones tangentes a $\mathcal{O}_{x_0}(\varphi)$ y al derivar la segunda obtenemos las direcciones restantes gracias a la transversalidad entre $i_2(B^{m-k})$ y $\mathcal{O}_{x_0}(\varphi)$. De esta forma, existirá una vecindad $U \subset M$ de x_0 tal que la función

$$\Phi^{-1} : x_0 \in U \subset M \to B^k \times B^{m-k}$$

es un difeomorfismo tal que la imagen de la órbita de un elemento $i_2(x)$ con $x \in U$ es un subconjunto abierto de $B^k \times \{x\}$. De esta forma y como la segunda coordenada de Φ solo depende de la componente en B^{m-k}, las funciones así definidas definen una foliación en M tal que sus hojas son las órbitas de la acción φ. □

Acciones del grupo aditivo de los números reales $(\mathbb{R}, +)$ son conocidas como *flujos*. Dado un flujo de clase C^r, le podemos asociar un campo de vectores X de clase C^{r-1} mediante la fórmula

$$X(x) = \frac{d}{dt}\left(\varphi(t, x)\right)\Big|_{t=0}$$

Con esta fórmula, observamos que las órbitas de φ son siempre tangentes al campo X. Conversamente, bajo ciertas condiciones, el Teorema de Existencia y Unicidad de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias nos dice que campo de vectores X de clase C^r induce un flujo $\varphi : \mathbb{R} \times M \to M$ tal que sus órbitas son tangentes a X en todo punto. En vistas del Teorema 4.2, esto establece una equivalencia entre los campos de vectores X que satisfacen ciertas condiciones de integrabilidad y foliaciones de

dimensión 1 en M cuyas hojas son tangentes al campo X. El Teorema de Frobenius es una generalización de este hecho a foliaciones de mayor dimensión y considerando distribuciones en lugar de campos, que en cierto sentido son una colección de varios campos de vectores linealmente independientes. De hecho, mezclando ideas de la demostración anterior con el teorema 3.1, obtenemos el siguiente resultado, preliminar al teorema de Frobenius:

Corolario A. Sea $V_1, \ldots, V_k \in \mathfrak{X}(M)$ una colección de campos de vectores que conmutan tales que $D_q = \langle V_1, \ldots, V_k \rangle$ es una distribución de dimensión k. Entonces, la colección (única) de sus variedades integrales se corresponden con las hojas una (única) foliación.

5. Teorema de Frobenius

Introduciremos una intuición del teorema de Frobenius mediante un ejemplo. Sea $M = \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, de manera directa tenemos que M es una variedad diferenciable. Sea D la distribución generada por el campo vectorial radial unitario $x^i \partial/\partial x^i$ y sea $D^\perp$ su complemento ortogonal, es rápido de notar que este paquete de espacios vectoriales de una distribución involutiva cuyas curvas integrales son las superficies de las bolas de radios mayores que 0 y centradas en 0.
En este ejemplo tenemos que las variedades integrales de $D^\perp$ se apilan de forma natural, y localmente las variedades integrales lucen como un paquete de subespacios afines paralelos de $\mathbb{R}^n$.
Dada una distribución $D \subseteq TM$ de rango k, se dice que una carta local (U, φ) en M es plana para D si $\varphi(U)$ es un cubo en $\mathbb{R}^n$, y que en U, D es generado por los primeros k vectores de coordenadas $\partial/\partial x^1, \ldots, \partial/\partial x^k$. En este tipos de cartas, se tiene que toda sección de la forma $x^{k+1} = c^{k+1}, \ldots, x^n = c^n$ para $c^{k+1}, \ldots, c^n$ constantes, es una variedad integral de D.
Se dice que una distribución $D \subseteq M$ es completamente integrable si existe una carta plana para D en una vecindad de cada punto de M. En el ejemplo anterior tenemos que tomando un abierto lo suficientemente pequeño, tendremos que las superficies de las esferas (nuestras variedades integrales) se apilarán con respecto al radio y bajo difeomorfismo, esta lucirá como un cubo, y además esto se tendrá para todo $p \in M$, por lo tanto se tendrá que $D^\perp$ es completamente integrable.
Notemos que, de manera directa, si D es completamente integrable, entonces será integrable y por consecuencia será involutiva. Con esto en mente, podemos enunciar el teorema principal de esta investigación:

Teorema 5.1 (Teorema de Frobenius)**.** Toda distribución involutiva suave es completamente integrable. En particular, los conceptos de completamente integrable, integrable e involutivo son el mismo.

Demostración . Sea M variedad diferenciable de dimensión n, $D \subseteq TM$ una distribución involutiva suave de rango k y $p \in M$ arbitrario. Dado que D es una distribución suave, tendremos que en un abierto $p \in U \subseteq M$ existirán $X_1, \ldots, X_k \in \mathfrak{X}(M)$ que son un marco local de $D|_U$.
Se analizarán 2 casos. En primer lugar, cuando los campos son conmutativos y luego cuando no necesariamente lo son:

1. Si los campos $X_1, \ldots, X_k$ son conmutativos, es decir $[X_i, X_j] = 0$ para todo $i, j = 1, \ldots, k$, se tiene que gracias al teorema 3.1 de la forma canónica para campos vectoriales, tendremos que localmente existirá una carta local plana para D, por lo tanto tendremos que la distribución es completamente integrable.

2. En el caso de que no sean conmutativos, se demostrará que podemos escoger un marco local conmutativo. Sean $(\partial/\partial x^{k+1}|_p, \ldots, \partial/\partial x^n|_p)$ una completación de la base generada por $(X_1|_p, \ldots, X_k|_p)$.
Sea $\pi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ la proyección a las primeras k coordenadas, esto inducirá un homomorfismo lineal suave $d\pi : T\mathbb{R}^n \to T\mathbb{R}^k$ tal que:

$$d\pi \left(\sum_{i=1}^{n} v^i \frac{\partial}{\partial x^i|_q} \right) = \sum_{i=1}^{k} v^i \frac{\partial}{\partial x^i|_q}$$

Dado que es $d\pi$ es un homeomorfismo lineal suave, tendremos que las entradas de la matriz $d\pi|_{D_q}$ con respecto a los marcos locales $(X_i|_q)$ y $(\partial/\partial x^i|_{\pi(q)})$ es suave respecto de q. Por nuestra elección de base, tendremos que $d\pi|_{D_p}$ es biyectiva, y por continuidad, $d\pi|_{D_q}$ será biyectiva para q suficientemente cerca de p y $(d\pi|_{D_q})^{-1} : T_{\pi(q)}\mathbb{R}^k \to D|_q$ será tal que sus entradas son suaves en q.
Se definirá un nuevo marco local $V_1, \ldots, V_k$ para D en una vecindad de p donde:

$$V_i|_q = (d\pi|_{D_q})^{-1} \frac{\partial}{\partial x^i}|_{\pi(q)}$$

Si logramos demostrar que nuestro nuevo marco local es conmutativo, podremos reducirnos al caso anterior y finalizar nuestra demostración.
Primero que nada, tenemos que $V_i|_q \in D|_q$ para todo q en una vecindad de p por definición de $(d\pi|_{D_q})^{-1} : T_{\pi(q)}\mathbb{R}^k \to D|_q$, luego por definición, V_i y $\partial/\partial x^i$ son $\pi-$relacionados ya que:

$$\frac{\partial}{\partial x^i}|_{\pi(q)} = (d\pi|_{D_q})V_i|_q = (d\pi|_q)V_i|_q$$

Por lo tanto, por la propiedad de los corchetes de Lie:

$$d\pi_q([V_i, V_j]|_q) = \left[\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j} \right] |_{\pi(q)} = 0$$

Por la inyectividad de $d\pi_q$, concluimos que $[V_i, V_j]|_q = 0$ para todo q en una vecindad de p. Con esto demostramos que pudimos crear un marco local conmutativo, lo cual nos permite referirnos al caso 1 y demostrar lo deseado. □

Observación: Debido a que nos podemos reducirnos al caso conmutativo en vecindades, aplicando repetidamente el corolario A notamos que las distribuciones involutivas inducen foliaciones sobre M.

6. Aplicaciones y ejemplos

6.1. Sistemas afines en control

Sea X una variedad diferenciable $n-$dimensional y sea $U = \mathbb{R}^m$ para cierto $m \neq n$. Usando coordenadas, a un sistema no lineal de la forma

$$\dot{x} = f(x) + \sum_{i=1}^{m} g_i(x)u_i$$

para campos vectoriales f, g_i en X lo denotaremos como *sistema afín en control*. Este tipo de sistemas son exhaustivamente estudiados en la teoria no lineal de control. En este ejemplo, nos enfocaremos en el caso particular de estos sistemas donde $f = 0$, los cuales son llamados *driftless*, es decir, cuando el sistema se puede escribir como

$$\dot{x} = \sum_{i=1}^{m} g_i(x)u_i.$$

Como observación, note que si $u_i = 0 \; \forall i \in \{1, \cdots, m\}$, entonces $\dot{x} = 0$ se alcanza (velocidad 0, de ahí el nombre *driftless*).

En la notación vista anteriormente, consideraremos que el campo de vectores respecto a las funciones g_i induce una distribución (ver 3) y por ende podemos utilizar toda la teoría vista con anterioridad para trabajar con estos sistemas.

En particular, a esta distribución la llamaremos *distribución del sistema*, y veremos mas adelante que un sistema está completamente caracterizado por su distribución, así, cuando los conceptos de geometría diferencial sean utilizados, en general nos referiremos al sistema cuando en el fondo nos estemos refiriendo a su distribución.

Definición 6.1 (Holonomía de sistemas afines en control)**.** *Diremos que un sistema afín en control es holonómico, si es completamente integrable*[1]*. En cualquier otro caso, el sistema se denotará no holonómico.*

Es importante destacar que esta es la definición en base a distribuciones, pero originalmente, la holonomía hace referencia a poder expresar las posibles ecuaciones y restricciones del sistema solo respecto de la posición, es decir, que sean representables mediante

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n, t) = 0$$

y no respecto a sus derivadas de orden 1 y superior. Por suerte, ambas definiciones son equivalentes. En consecuencia de lo anterior, es de relevancia poder clasificar los sistemas afines en control puesto que el análisis dependiendo de la categoría en la que se encuentran es diferente.

[1] Haciendo abuso de notación, nos referimos a su distribución.

El teorema de Frobenius nos da la equivalencia (ahora en lenguajes de sistemas de control)

Un sistema es completamente integrable (holonómico) si y solo si es involutivo.

En general, sabemos que esta caracterización se reduce a calcular corchetes de Lie, sin embargo, bajo el contexto en el que nos encontramos, basta utilizar los test de dependencia lineal conocidos en álgebra.

Ejemplo 6.1 (Sistema de manejo de dos ruedas independientes)**.** En robótica (la aplicación principal de la teoría de control en física), el primer modelo reducido y estudiado es el de un sistema de manejo de dos ruedas independientes (en ingles, differential drive system). Las simplificaciones nos llevan a la escritura del siguiente sistema matricial.

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \\ 0 \end{pmatrix} u_1 + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} u_2$$

o equivalentemente

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 \\ \sin\theta & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

Para determinar la involutividad del sistema, usualmente se requeriría trabajar con los corchetes de Lie y encontrar las condiciones necesarias, no obstante, podemos extender la matriz asociada agregando como columna $[f_1, f_2]$, donde $f_1 = (\cos(\theta), \sin(\theta), 0)^\top$, $f_2 = (0, 0, 1)^\top$.

Ocupando la fórmula clásica para calcular corchetes, no es difícil notar que

$$[f_1, g_1] = (\sin(\theta), -\cos(\theta), 0))^\top.$$

Luego, la matriz extendida queda de la forma

$$H(x, y, \theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ \sin\theta & 0 & -\cos\theta \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

que tiene rango 3 para todo triplete (x, y, θ) (de hecho al ser cuadrada, el determinante es 1). Concluimos entonces por la dependencia, que el sistema es no-holonómico.