Teorema de Sard

Conjuntos de Medida Cero en Variedades

UNIVERSIDAD TECNICA
FEDERICO SANTA MARIA
Departamento De Matemáticas
Segundo Semestre 2022

Benjamín Acuña

1. Teorema de Sard

A continuación se presentaran algunos resultados necesarios para la demostración completa del teorema de Sard, para posteriormente dar unos ejemplos y poder discutir algunas de las aplicaciones que este teorema tiene.

1.1. Medida cero y el teorema de Sard

Si $a = (a_1, \dots, a_n)$ y $b = (b_1, \dots, b_n)$ son dos n-tuplas con $a_1 < b_1, \dots, a_n < b_n$, denotamos por $S(a, b)$ el sólido rectangular que consta de los puntos $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ que satisfacen $a_i < x_i < b_i$, $i = 1, \dots, n$. El producto

$$\prod_{i=1}^{n}(b_i - a_i)$$

es el volumen de $S = S(a, b)$, denotado $vol(S)$ (si $b_1 - a_1 = \ldots = b_n - a_n$, S es un cubo).

Un subconjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ tiene medida cero si para cada $\varepsilon > 0$, A puede ser cubierto por una colección contable de cubos abiertos, la suma de cuyos volúmenes es menor que ε.

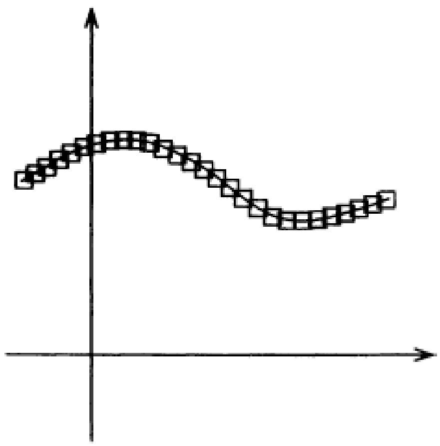


Figura 1: Un conjunto de medida cero.

El siguiente lema muestra que los cubos pueden ser reemplazados por bolas en la definición.

Lema 1.1. *Un subconjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ tiene medida cero si y solo si para cada $\varepsilon > 0$, A puede ser cubierto por una colección contable de bolas abiertas, la suma de cuyos volúmenes es menor que ε.*

Demostración. Esto se basa en el hecho geométrico fácilmente verificable de que un cubo abierto de lado $2r$ contiene una bola abierta de radio r y está contenido en una bola abierta de radio $r\sqrt{n}$ (Figura 2). Dado que los volúmenes de bolas y cubos en $\mathbb{R}^n$ son proporcionales a la $n-$ésima potencia de sus diámetros, se sigue que todo cubo abierto de volumen v está contenido en una bola abierta de volumen $c_n v$, y toda bola abierta de volumen v está contenida en un cubo abierto de volumen $c_n{}'v$, donde c_n y $c_n{}'$ son constantes que dependen únicamente de n. Por lo tanto, si A tiene una medida cero, hay un recubrimiento contable de A por cubos abiertos con un volumen total menor que ε. Encerrando cada cubo en una bola cuyo volumen es c_n veces el del cubo, obtenemos una cubierta abierta de A por bolas abiertas de volumen total menor que $c_n\varepsilon$, que puede hacerse tan pequeño como se desee tomando ε lo suficiente pequeño. La implicancia contraria es similar. ■

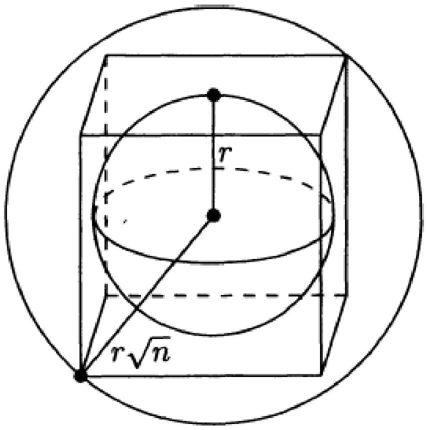


Figura 2: Bolas y cubos.

Es obvio que subconjuntos de conjuntos con medida cero también tienen medida cero. En el curso de análisis 2 mostramos que que las uniones contables de conjuntos de medida cero siguen siendo de medida cero. A partir de este hecho, podemos exhibir muchos conjuntos de medida cero.

¡Lo que es sorprendentemente difícil de demostrar es que existen conjuntos que no son de medida cero! Deducimos este hecho con una ingeniosa demostración de Von Neumann.

Proposición 1.1. *Sea S un sólido rectangular y $S_1, S_2, \ldots$ una cubierta de la clausura de $\overline{S}$ por otros sólidos. Entonces $\Sigma\, vol(S_i) \geq vol(S)$.*

Demostración. Llame $(z_1, \ldots, z_n)$ un *punto entero* de $\mathbb{R}^n$ si cada z_i es un número entero. Sea $S = S(a, b)$. El número de enteros en el intervalo $a_i < z_i < b_i$ es menor que $b_i - a_i + 1$ y por lo menos tan grande como $b_i - a_i - 1$. Supongamos, por el momento, que la longitud $b_i - a_i$ de cada lado de S es mayor que 1. Entonces el número de puntos enteros en S es menor que

$$\prod_{i=1}^{n}(b_i - a_i + 1)$$

y al menos

$$\prod_{i=1}^{n}(b_i - a_i - 1).$$

Si $S_1, S_2, \ldots$ es un recubrimiento de S, entonces, por compacidad, algún número finito $S_1, \ldots, S_N$ también es un recubrimiento. Ahora el número de puntos enteros en S es como máximo igual a la suma de los números de puntos enteros en $S_1, \ldots, S_N$. Así, si $S_j = S(a^j, b^j)$, obtenemos

$$\prod_{i=1}^{n}(b_i - a_i - 1) \leq \sum_{j=1}^{N}\prod_{i=1}^{n}(b_i^j - a_i^j + 1).$$

Para cada número positivo λ, defina $\lambda S(a,b) = S(\lambda a, \lambda b)$. Dado que $\overline{\lambda S}$ está cubierto por $\lambda S_1, \ldots, \lambda S_N$ el cálculo anterior da

$$\prod_{i=1}^{n}(\lambda b_i - \lambda a_i - 1) \leq \sum_{j=1}^{N}\prod_{i=1}^{n}(\lambda b_i^j - \lambda a_i^j + 1).$$

Ahora, no importa cuál sea el tamaño de S, si λ es lo suficientemente grande, entonces λS tendrá lados de longitud mayor que 1. Entonces, la última desigualdad es válida para λ grande sin ninguna restricción sobre S.

Ahora solo tienes que dividir ambos lados de la desigualdad entre λ^n y luego hacer $\lambda \to \infty$ para completar la demostración. ■

Para la demostración del teorema de Sard, necesitaremos la forma de medida cero del teorema de Fubini. Suponga que $n = k + l$, y escriba $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^l$. Para cada $c \in \mathbb{R}^k$, sea V_c la "rebanada vertical" $\{c\} \times \mathbb{R}^l$. Diremos que un subconjunto de V_c tiene medida cero en V_c si, cuando identificamos V_c con $\mathbb{R}^l$ de la manera obvia, el subconjunto tiene medida cero en $\mathbb{R}^l$.

★ Teorema de Fubini (para medida cero)

Teorema 1.1. *Sea A un subconjunto cerrado de $\mathbb{R}^n$ tal que $A \cap V_c$ tiene medida cero en V_c para todo $c \in \mathbb{R}^k$. Entonces A tiene medida cero en $\mathbb{R}^n$.*

Demostración. Debido a que A puede escribirse como una unión contable de compactos, podemos, de hecho, suponer A compacto. Además, por inducción sobre k, basta probar el teorema para $k = 1$ y $l = n - 1$. Dividiremos la demostración en varios lemas.

Lema 1.2. *Sea $S_1, \ldots, S_N$ un recubrimiento del intervalo cerrado $[a,b]$ en $\mathbb{R}^l$. Entonces existe otro recubrimiento $S_1^{'}, \ldots, S_M^{'}$ tal que cada $S_j^{'}$ está contenida en alguna S_i y*

$$\sum_{j=1}^{M} \textit{Longitud } (S_j^{'}) < 2(b-a).$$

Demostración. Se deja para el lector.

Dado un conjunto $I \subset \mathbb{R}$, sea $V_i = I \times \mathbb{R}^{n-1}$ en $\mathbb{R}^n$.

Lema 1.3. *Sea A un subconjunto compacto de $\mathbb{R}^n$. Suponga que $A \cap V_c$ está contenido en un conjunto abierto U de V_c. Entonces, para cualquier intervalo I convenientemente pequeño alrededor de c en $\mathbb{R}$, $A \cap V_I$ está contenido en $I \times U$.*

Demostración. Supongamos por contradicción que esto no es así, entonces existiría una secuencia de puntos (x_j, c_j) en A tal que $c_j \to c$ y $x_j \notin U$. Reemplace esta sucesión por una convergente para obtener una contradicción. ■

Demostración del teorema de Fubini. Dado que A es compacto, podemos elegir un intervalo $I = [a,b)$ tal que $A \subset V_I$. Para cada $c \in I$, elegir un recubrimiento de $A \cap V_c$ por solidos rectangulares $(n-1)$ dimensionales $S_1(c), \ldots, S_{N_c}(c)$ que tiene un volumen total menor que ε. Elija un intervalo $J(c)$ en $\mathbb{R}$ de modo que los sólidos rectangulares $J(c) \times S_l(c)$ cubran $A \cap V_J$ (Lema 1.3). Los $J(c)^{'}$

cubren el intervalo $[a, b]$, por lo que podemos usar el Lema 1.2 para reemplazarlos con una colección finita de subintervalos $J_j^{'}$ con una longitud total menor que $2(b-a)$. Cada $J_j^{'}$ está contenido en algún intervalo $J(c_j)$, por lo que los sólidos $J_j^{'} \times S_i(c_j)$ cubren A; además, tienen un volumen total inferior a $2\varepsilon(b-a)$. ■

Deseamos extender la noción de medida cero en una forma invariante de difeomorfismo a subconjuntos de variedades. Debido a que una variedad no viene con una métrica, los volúmenes de cubos o bolas no tienen sentido, por lo que no podemos simplemente usar la misma definición. Sin embargo, la clave la proporciona el siguiente lema, que implica que la condición de tener una medida cero es invariante frente al difeomorfismo para los subconjuntos de $\mathbb{R}^n$.

Lema 1.4. *Supongamos que $A \subset \mathbb{R}^n$ tiene medida cero y $F : A \to \mathbb{R}^n$ es una función suave. Entonces $F(A)$ tiene medida cero.*

Demostración. Por definición, para cada $p \in A$, F tiene una extensión a una función suave, que aún denotamos por F, en una vecindad de $p \in \mathbb{R}^n$. Reduciendo esta vecindad si es necesario, podemos asumir que F se extiende suavemente hasta una bola cerrada $\overline{B}$ centrada en p. Como $\overline{B}$ es compacto, existe una constante C tal que $|Df(x)| \leq C$ para todo $x \in \overline{B}$. Usando la estimación de Lipschitz para la función suave (proposición 3.1), tenemos,

$$|F(x) - F(x')| \leq C|x - x'| \tag{1.1}$$

para todo $x, x' \in \overline{B}$.

Dado $\varepsilon > 0$, podemos elegir un recubrimiento contable $\{B_j\}$ de $A \cap \overline{B}$ con bolas abiertas que satisfagan

$$\sum_j vol\,(B_j) < \varepsilon.$$

Entonces por Lema 1.1, $F(\overline{B} \cap B_j)$ está contenido en una bola $\tilde{B}_j$ cuyo radio no es mayor que C veces el de B_j (Figura 3). Concluimos que $F(A \cap \overline{B})$ está contenido en el conjunto de bolas $\{\tilde{B}_j\}$, cuyo volumen total no es mayor que

$$\sum_j vol(\tilde{B}_j) < C^n\varepsilon.$$

Dado que esto puede hacerse tan pequeño como se desee, se deduce que $F(A \cap \overline{B})$ tiene medida cero. Como $F(A)$ es la unión de muchos conjuntos numerables, también tiene medida cero. ■

Es importante tener en cuenta que el lema anterior es falso si simplemente se supone que F es continua. Por ejemplo, el subconjunto $A = [0, 1] \times \{0\} \subset \mathbb{R}^2$ tiene medida cero en $\mathbb{R}^2$, pero existe una función continua $F : A \to \mathbb{R}^2$ cuya imagen es todo el cuadrado unitario $[0, 1] \times [0, 1]$ (en [2] pag 168 se muestra un ejemplo de esto, el cual recibe el nombre de "space-filling curve").

Mini-Sard

Lema 1.5. *Supongamos que $F : U \to \mathbb{R}^n$ es una función suave, donde U es un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^m$ y $m < n$. Entonces $F(U)$ tiene medida cero en $\mathbb{R}^n$.*

Demostración. Sea $\pi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ la proyección sobre las primeras coordenadas m, y sea $\tilde{U} = \pi^{-1}(U)$. El resultado se sigue al aplicar el lema anterior a $\tilde{F} = F \circ \pi : \tilde{U} \to \mathbb{R}^n$, porque $F(U) = \tilde{F}(\tilde{U} \cap \mathbb{R}^m)$, que es la imagen de un conjunto de medida cero. ■

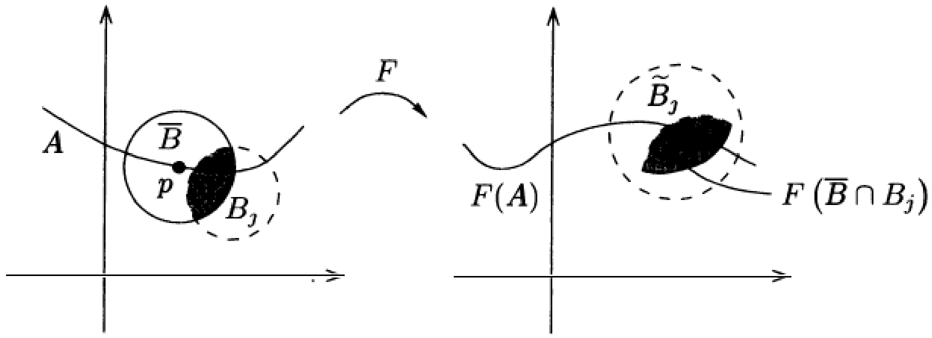


Figura 3: La imagen de un conjunto de medida cero.

Ahora podemos definir un subconjunto A de una variedad k-dimensional X como de medida cero siempre que, para cada parametrización local $f : U \to X$, la preimagen $f^{-1}(A)$ tenga medida cero en $U \subset \mathbb{R}^k$. Por el último lema, basta comprobar que alrededor de cualquier punto de X existe una parametrización local $f : U \to X$ para la cual $f^{-1}(A)$ tiene medida cero.

Decimos que un subconjunto A de una n-variedad suave M tiene medida cero si para cada gráfico suave (U, φ) para M, el conjunto $\varphi(A \cap U)$ tiene medida cero en $\mathbb{R}^n$. Del Lema 3.2.c se sigue inmediatamente que cualquier conjunto de medida cero tiene complemento denso, porque si $M \setminus A$ no es denso, entonces A contiene un conjunto abierto no vacío, lo que implicaría que $\psi(A \cap V)$ contiene un conjunto abierto no vacío para un gráfico suave (V, ψ).

El siguiente lema muestra que solo necesitamos verificar esta condición para una sola colección de gráficos suaves cuyos dominios cubren A.

Lema 1.6. *Supongamos que A es un subconjunto de una n-variedad suave M, y para alguna colección $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ de gráficos suaves cuyos dominios cubren A, $\varphi_\alpha(A \cap U_\alpha)$ tiene medida cero en $\mathbb{R}^n$ para cada α. Entonces A tiene medida cero en M.*

Demostración. Sea (V, ψ) una gráfica suave arbitraria. Necesitamos mostrar que $\varphi(A \cap V)$ tiene medida cero. Alguna colección contable U_α de los recubrimientos de $A \cap V$. Para cada U_α, tenemos

$$\psi(A \cap V \cap U_\alpha) = (\psi \circ \varphi_\alpha^{-1}) \circ \varphi_\alpha(A \cap V \cap U_\alpha).$$

(Ver figura 4). Ahora $\varphi_\alpha(A \cap V \cap U_\alpha)$ es un subconjunto de $\varphi_\alpha(A \cap U_\alpha)$, que tiene medida cero por hipótesis. Por el Lema 1.4 aplicado a $\psi \circ \varphi_\alpha^{-1}$, tenemos que, $\psi(A \cap V \cap U_\alpha)$ tiene medida cero. Como $\psi(A \cap V)$ es la unión de muchos conjuntos numerables, también tiene medida cero. ∎

El siguiente teorema es uno de los más importantes de esta sección.

★

Teorema 1.2. *Suponga que M y N son variedades suaves con $\dim M < \dim N$, y $F : M \to N$ es una función suave. Entonces $F(M)$ tiene medida cero en N. En particular, $N \setminus F(M)$ es denso en N.*

Demostración. Escriba $m = \dim M$ y $n = \dim N$, y sea $\{(U_i, \varphi_i)\}$ un recubrimiento contable de M mediante gráficos suaves. Dado cualquier gráfico suave (V, ψ) para N, necesitamos mostrar que

$\psi(F(M) \cap V)$ tiene una medida cero en $\mathbb{R}^n$. Observe que este conjunto es la unión contable de conjuntos de la forma $\psi \circ F \circ \varphi_i^{-1}(\varphi_i(F^{-1}(V) \cap U_i))$, cada uno de que tiene medida cero por el Lema 1.5 (Mini-Sard). ■

Corolario 1.1. *Si M es una variedad suave y $N \subset M$ es una subvariedad inmersa de codimensión positiva, entonces N tiene medida cero en M.*

Esta demostración no se verá, pero gracias a este resultado ahora estamos listos para probar el Teorema de Sard.

★ Teorema de Sard

Teorema 1.3. *Sea $f : X \to Y$ una función uniforme de variedades, y sea C el conjunto de puntos críticos en X. Entonces $f(C)$ tiene medida cero en Y.*

Nuestra prueba está tomada textualmente de [1] pp. 16-19. Por el Segundo Axioma de Numerabilidad, podemos encontrar una colección contable de conjuntos abiertos (U_i, V_i), U_i abiertos en X y V_i abiertos en Y, tales que los U_i cubren X, $f(U_i) \subset V_i$, y las U_i y V_i son difeomorfas a los conjuntos abiertos en $\mathbb{R}^n$. Por lo tanto, basta probar

Teorema 1.4. *Supongamos que U está abierto en $\mathbb{R}^n$ y $f : U \to \mathbb{R}^P$ es una aplicación suave. Sea C el conjunto de puntos críticos de f. Entonces $f(C)$ es de medida cero en $\mathbb{R}^p$.*

El teorema es cierto para $n = 0$, por lo que supondremos que es cierto para $n-1$ y lo probaremos para n. Comenzamos dividiendo C en una secuencia de subconjuntos anidados $C \supset C_1 \supset C_2 \supset, \ldots,$ donde C_1 es el conjunto de todos los $x \in U$ tales que $(df)_x = 0$, y C_i para $i \geq 1$ es el conjunto de todas las x tales que las derivadas parciales de f de orden $\leq i$ se anulan en x (observemos que las C_i, son subconjuntos cerrados de C). Primero probaremos

Lema 1.7. *La imagen $f(C - C_1)$ tiene medida cero.*

Demostración. Alrededor de cada $x \in C - C_1$, encontraremos un conjunto abierto V tal que $f(V \cap C)$ tiene medida cero. Dado que $C - C_1$ está cubierto por muchos de estas vecindades numerables (según el segundo axioma de numerabilidad), esto probará que $f(C - C_1)$ tiene una medida cero.

Dado que $x \notin C_1$ existe alguna derivada parcial, digamos $\partial f/\partial x_1$ que no es cero en x. Considere la función $h : U \to \mathbb{R}^n$ definida por

$$h(x) = (f_1(x), x_2, \ldots, x_n).$$

dh_x no es singular, por lo que h mapea una vecindad V de x difeomórficamente en un conjunto abierto V'. La composición $g = f \circ h^{-1}$ luego asignará V' a $\mathbb{R}^p$ con los mismos valores críticos que f restringido a V.

Hemos construido g para que tenga la siguiente propiedad: mapea puntos de la forma $(t, x_2, \ldots, x_n)$ en V' en puntos de la forma $(t, y_2, \ldots, y_p)$ en $\mathbb{R}^p$ (es decir, las primeras coordenadas son las mismas). Por lo tanto, para cada t, g induce una función g^t de $(t \times \mathbb{R}^{n-1}) \cap V'$ en $t \times \mathbb{R}^{p-1}$. Como la derivada de g tiene la forma

$$\left(\frac{\partial g_i}{\partial x_j}\right) = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline * & \left(\frac{\partial g_i^t}{\partial x_j}\right) \end{array}\right),$$

un punto de $t \times \mathbb{R}^{n-1}$ es crítico para g^t si y solo si es crítico para g [porque el determinante de la matriz de la derecha es solo $\det(\partial g_i^t/\partial x_j)$]. Por inducción, el teorema de Sard es cierto para $n-1$, por lo que el conjunto de valores críticos de g^t tiene medida cero. En consecuencia, por el teorema de Fubini, el conjunto de valores críticos de g es de medida cero. ■

A continuación probaremos

Lema 1.8. *$f(C_k - C_{k+1})$ es de medida cero para $k \geq 1$.*

Demostración. Este es un argumento similar, pero más fácil. Para cada $x \in C_k - C_{k+1}$ existe alguna $(k+1)$-ésima derivada de f que no es cero. Así podemos encontrar una k-ésima derivada de f, digamos ρ, que (por definición) se anula en C_k pero tiene una primera derivada, digamos $\partial\rho/\partial x_1$ la cual no se anula. Entonces la función $h : U \to \mathbb{R}^n$, definido por $h(x) = (\rho(x), x_2, \ldots, x_n)$, mapea una vecindad V de x difeomórficamente en un conjunto abierto V'. Por construcción, h lleva $C_k \cap V$ al hiperplano $0 \times \mathbb{R}^{n-1}$. Por lo tanto la función $g = f \circ h^{-1}$ tiene todos sus puntos críticos de tipo C^k en el hiperplano $0 \times \mathbb{R}^{n-1}$. Sea $\overline{g} : (0 \times \mathbb{R}^{n-1}) \cap V' \to \mathbb{R}^p$ la restricción de g. Por inducción, el conjunto de valores críticos de $\overline{g}$ es de medida cero. Además, los puntos críticos de g de tipo C_k son obviamente puntos críticos de $\overline{g}$. Esto prueba que la imagen de estos puntos críticos es de medida cero y, por tanto, $f(C_k \cap V)$ es de medida cero. Ya que $C_k - C_{k-1}$ está cubierto por muchos conjuntos contables V, hemos terminado. ■

Finalmente, demostraremos

Lema 1.9. *Para $k > n/p - 1, f(C_k)$ es de medida cero.*

Para la demostración de este lema, haremos uso de los dos lemas anteriores.

Demostración. Sea $S \subset U$ un cubo cuyos lados miden ε. Si k es suficientemente grande ($k > n/p - 1$, para ser precisos), probaremos que $f(C_k \cap S)$ tiene medida cero. Dado que C_k puede cubrirse con muchos cubos contables, esto probará que $f(C_k)$ tiene una medida cero.

Del teorema de Taylor, la compacidad de S y la definición de k, vemos que

$$f(x+h) = f(x) + R(x,h),$$

donde

$$|R(x,h)| \leq a|h|^{k+1} \tag{1.2}$$

para $x \in C_k \cap S$, $x + h \in S$. Aquí a es una constante que depende solo de f y S. Ahora subdivida S en r^n cubos cuyos lados tengan una longitud de ε/r. Sea S_1 un cubo de la subdivisión que contiene un punto x de C_k. Entonces cualquier punto de S_1 se puede escribir como $x + h$ con

$$|h| < \sqrt{n}\left(\frac{\varepsilon}{r}\right). \tag{1.3}$$

De (1.2), se sigue que $f(S_1)$ se encuentra en un cubo con lados de longitud b/r^{k+1} centrado alrededor de $\varepsilon(x)$, donde $b = 2a(\sqrt{n}\varepsilon)^{k+1}$ es constante. Por lo tanto $f(C_k \cap S)$ está contenido en la unión de como máximo r^n cubos de volumen total

$$v \leq r^n \left(\frac{b}{r^{k+1}}\right)^p = b^p r^{n-(k+1)p}.$$

Si $k + 1 > n/p$, entonces evidentemente v tiende a 0 cuando $r \to \infty$, entonces $f(C_k \cap S)$ debe tener medida cero. Esto completa la demostración del teorema de Sard. ■

1.2. Ejemplos

Ejemplo 1.1. *Si X es una variedad, entonces la función identidad $f : X \to X$ no tiene puntos críticos, y por lo tanto el conjunto de valores no regulares tiene medida cero.*

Ejemplo 1.2. *Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = x^2 + y^2$. Tenemos la derivada cero solo en el origen, y $f(0, 0)$ es solo un punto, que tiene medida cero en $\mathbb{R}$.*

Lema 1.10. *Si un conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ tiene medida cero, entonces su complemento es denso.*

Demostración. Si U es cualquier conjunto abierto no vacío en $\mathbb{R}^n$, entonces intersecta el complemento de A, de lo contrario, estará completamente en A. Por lo tanto, U también tiene medida cero como cualquier cubo C en U, pero si C tiene lado ε, su medida ε^n es positivo. Por tanto, el complemento de A es denso. ■

Corolario 1.2. *Sea $f : X \to Y$ una función suave de variedades. Entonces los valores regulares de f forman un subconjunto denso de Y.*

Demostración. El conjunto de valores críticos de f es cerrado y tiene medida cero, y por lo tanto el conjunto de valores regulares de f, que es el complemento del conjunto de valores críticos de f en Y, y por lo tanto es denso en Y. ■

2. Aplicación del teorema de Sard

El teorema de Sard es importante, ya que al combinar el teorema de la preimagen con el teorema de Sard, sabemos que dado que casi todos los valores de una aplicación son regulares, la preimagen de una aplicación es casi siempre una variedad. Hay muchos otros resultados útiles que se basan en el teorema de Sard, como el teorema de incrustación de Whitney, el teorema de inmersión de Whitney, la existencia de funciones de Morse y el teorema del punto fijo de Brouwer.

A continuación solo abordaremos las funciones de Morse y el teorema del punto fijo de Brouwer. Si se desea abordar las demás aplicaciones antes mencionadas se recomienda revisar “Introduction to Smooth Manifolds” por Lee, John M ([3]) y “Differential topology” por Guillemin, V., & Pollack, A. ([4]).

2.1. Funciones de Morse

A continuación veremos que la aplicación del Teorema de Sard nos da la existencia de funciones de Morse.

Dada una función $f : M \to \mathbb{R}$, un punto crítico $x \in M$ se llama no degenerado si la matriz hessiana H de f en x, $H(f)_x = (\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j})$ no es singular, y las funciones son importantes porque f es localmente cuadrática en estos puntos críticos. Si todos los puntos críticos de f son no degenerados, f se denomina función de Morse. Las funciones de Morse dicen mucho sobre la topología de M.

Definición 2.1. *Si $H(f)_x$ no es singular en el punto crítico $x \in M$, decimos que x es un punto crítico no degenerado de f.*

Tenga en cuenta que los puntos críticos no degenerados están aislados, porque los puntos críticos son los ceros de la función $g = (\frac{\partial f}{x_1} + \ldots + \frac{\partial f}{x_n})$. Por lo tanto, $H(f)_x = dg_x$, por lo que si $H(f)_x$ no es singular, el teorema de la función inversa nos dice que g tiene una inversa local, por lo que g no tiene otros ceros en algún entorno de x.

Definición 2.2. *Una función $f : M \to \mathbb{R}$ tal que todos sus puntos críticos no son degenerados se llama función de Morse.*

Ejemplo 2.1. *Las funciones de Morse son útiles en topología. Por ejemplo, un toro T^2 en $\mathbb{R}^3$ en su borde en el plano xy, se define la función de altura $h : T^2 \to \mathbb{R}$ por $h(x, y, z) = z$ para $(x, y, z) \in T^2$. Entonces h es una función de Morse. Tiene cuatro puntos críticos: un mínimo, dos puntos sillas y un máximo.*

★

Teorema 2.1. *Hay muchas funciones de Morse: dadas $M \subset \mathbb{R}^n$ y $f : M \to \mathbb{R}$, entonces $f_a = f + a_1x_1 + \ldots + a_nx_n$ es una función de Morse para casi todo $a \in \mathbb{R}^n$.*

Demostración. Defina $g = df = (\frac{\partial f}{\partial x_1} + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n})$ en M. Tenga en cuenta que $df_a = g + a$, y $H(f_a) = H(f) = dg$. Elija cualquier a para que $-a$ sea un valor regular para g. Entonces si x es un punto crítico de f_a, tenemos $g(x) = -a$, y para $(d(f_a))_x : TM_x \to \mathbb{R}$, y si no es sobreyectiva, entonces es cero. Por lo tanto $(df_a)_x = g + a = 0$, entonces $H(f_a)_x = dg_x$ no es singular. Por lo tanto, f_a es una función de Morse. ■

2.2. Teorema del punto fijo de Brouwer

La próxima aplicación del teorema de Sard será el teorema del punto fijo de Brouwer.

Un punto fijo de una función $f : X \to X$ es un punto x_0 tal que $f(x_0) = x_0$.

Ejemplo 2.2. *El teorema del valor intermedio implica que toda función continua $f : [-1, 1] \to [-1, 1]$ tiene un punto fijo.*

Demostración. Tenemos $f : [-1, 1] \to [-1, 1]$. Defina $g(x) = x - f(x)$. Entonces $g(1) \geq 0$ y $g(-1) \leq 0$ por lo que por el teorema del valor intermedio debe haber un punto x_0 para que $g(x_0) = 0$. Entonces tenemos $f(x_0) = x_0$. ■

Los teoremas que establecen la existencia de puntos fijos son muy útiles en el análisis. Uno de los más famosos se debe a Brouwer. Sea $D^n = \{x \in \mathbb{R} : |x| \leq 1\}$.

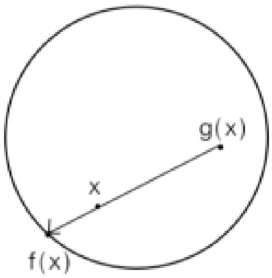
Recordemos el teorema de aproximación de Weierstrass.

★ Teorema de aproximación de Weierstrass

Teorema 2.2. *Sea $f \in C[a, b]$. Dado cualquier $\varepsilon > 0$ existe un polinomio p_n de grado n suficientemente alto para el cual $|f(x) - p_n(x)| \leq \varepsilon$ para todo $x \in [a, b]$.*

Lema 2.1. *Cualquier aplicación suave $g : D^n \to D^n$ tiene un punto fijo, en otras palabras existe $x \in D^n$ tal que $g(x) = x$.*

Demostración. Supongamos que no existe un punto fijo. Defina $f : D^n \to S^{n-1}$ tal que $f(x)$ es el punto en el que el rayo que comienza en $g(x)$ y pasa por x intersecta a S^{n-1}. Observe que para $x \in S^{n-1}$ tenemos $f(x) = x$ y por lo tanto hemos encontrado un difeomorfismo con $f(x) = x$ para $x \in S^{n-1}$. Sin embargo, por el teorema de Sard, sabemos que no existe una aplicación suave $h : X \to \partial X$ tal que para todo $x \in \partial X, h(x) = x$ y en nuestro caso tenemos D^n una variedad compacta y su frontera ∂D^n que coincide con S^{n-1}. Pero para todo $x \in S^{n-1}$, $f(x) = x$ lo cual es una contradicción y por lo tanto nuestra suposición es falsa y por lo tanto existe un punto fijo tal que $g(x) = x$ para todo $g : D^n \to D^n$. ■



★ Teorema del Punto Fijo de Brouwer

Teorema 2.3. *Toda función continua $f : D^n \to D^n$ tiene un punto fijo, es decir existe $x \in D^n$ tal que $f(x) = x$.*

Demostración. Aproximar f por una función suave. Dado $\varepsilon > 0$, según el teorema de aproximación de Weierstrass, existe una función polinomial $p_1 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ con $|p_1(x) - f(x)| < \varepsilon$ para $x \in D^n$. Sin embargo, p_1 puede enviar puntos de D^n a puntos fuera de D^n. Entonces hacemos que $p(x) = \frac{p_1(x)}{1+\varepsilon}$, entonces p mapea D^n en sí mismo y $|p(x) - f(x)| < 2\varepsilon$ para $x \in D^n$. Supongamos que $f(x) \neq x$ para todo $x \in D^n$. Entonces la función continua $|f(x) - x|$ debe asumir un mínimo $\mu > 0$ en D^n. Sea $p : D^n \to D^n$ con $|p(x) - f(x)| < \mu$ para todo x, claramente tenemos $p(x) \neq x$. Por lo tanto, p es una función suave de D^n a sí mismo sin un punto fijo. Esto contradice el Lema 2.1, y por lo tanto tiene un punto fijo. ■

3. Apéndice

A continuación se presentaran algunos resultados que fueron necesarios para las demostraciones de la sección 1. Estos resultados no se abordan con mayor profundidad, pues se aleja del propósito.

Proposición 3.1 (Estimación de Lipschitz para funciones C^1)**.** *Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto, y sea $F : U \to \mathbb{R}^m$ de clase C^1 . Entonces F es Lipschitz continuo en cualquier subconjunto convexo compacto $B \subset U$. La constante de Lipschitz puede tomarse como* $\sup_{x\in B} |DF(x)|$.

Demostración. Dado que $|DF(x)|$ es una función continua de x, está acotada en el conjunto compacto B (la norma aquí es la norma euclidiana sobre matrices). Sea $M = \sup_{x\in B} |DF(x)|$. Para $a, b \in B$ arbitrarios, $a+t(b-a) \in B$ para todo $t \in [0, 1]$ porque B es convexo. Por el teorema fundamental del cálculo aplicado a cada componente de F, junto con la regla de la cadena,

$$\begin{aligned} F(b) - F(a) &= \int_0^1 \frac{d}{dt} F(a + t(b - a))dt \\ &= \int_0^1 DF(a + t(b - a))(b - a)dt. \end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned} |F(b) - F(a)| &\leq \int_0^1 |DF(a + t(b - a))||b - a|dt \\ &\leq \int_0^1 M|b - a|dt \\ &= M|b - a|. \end{aligned}$$

■

Proposición 3.2 (Propiedades de los Conjuntos de Medida Cero)**.** .

(a) *Una unión contable de conjuntos de medida cero en $\mathbb{R}^n$ tiene medida cero.*

(b) *Cualquier subconjunto de un conjunto de medida cero en $\mathbb{R}^n$ tiene medida cero.*

(c) *Un conjunto de medida cero en $\mathbb{R}^n$ no puede contener ningún conjunto abierto no vacío.*

(d) *Cualquier subespacio afín propio de $\mathbb{R}^n$ tiene medida cero en $\mathbb{R}^n$.*

Referencias

[1] Milnor, J., & Weaver, D. W. (1997). Topology from the differentiable viewpoint (Vol. 21). Princeton university press.

[2] Rudin, W. (1976). Principles of mathematical analysis (Vol. 3). New York: McGraw-hill.

[3] Lee, J. M. (2013). Smooth manifolds. In Introduction to smooth manifolds (pp. 1-31). Springer, New York, NY.

[4] Guillemin, V., & Pollack, A. (2010). Differential topology (Vol. 370). American Mathematical Soc..

[5] Kosinski, A. A. (2013). Differential manifolds. Courier Corporation.

[6] Tu, L. W. (2011). Manifolds. In An Introduction to Manifolds (pp. 47-83). Springer, New York, NY.

[7] Du, L. (2016). Sard's Theorem and Applications.