

PAUTA AYUDANTÍA 8 GEOMETRÍA DIFERENCIAL

11 DE NOVIEMBRE DE 2022

Problema 1 (Teorema de Whitney)

El objetivo de este problema es demostrar el teorema de Whitney en el caso de variedades compactas. Enunciamos en primer lugar el teorema general.

Teorema 1 (Whitney (1944)). *Toda variedad diferenciable M de dimensión $\dim(M) = n$ admite un incrustamiento en $\mathbb{R}^{2n}$.*

Históricamente, la primera demostración de Whitney demostraba la existencia de un incrustamiento en $\mathbb{R}^{2n+1}$, pero luego redujo la dimensión. En esta oportunidad probaremos el resultado para variedades compactas y en dimensión $2n + 1$. Para ello comenzamos probando el siguiente lema técnico.

Lema 2. *Si M variedad diferenciable de dimensión $\dim(M) = n$ admite una inmersión inyectiva en $\mathbb{R}^N$ para $N > 2n + 1$ entonces admite una inmersión inyectiva en $\mathbb{R}^{N-1}$.*

Indicación: En vista del resultado anterior basta probar que podemos incrustar M en un espacio euclidiano de dimensión suficientemente grande. Para ello consideramos M variedad diferenciable compacta de dimensión $\dim(M) = n$, $\{\varphi : U_i \xrightarrow{\sim} V_i \subseteq \mathbb{R}^n\}_{1 \leq i \leq k}$ cubrimiento de M por cartas locales y $\{\rho_1, \dots, \rho_k\}$ partición de la unidad respecto al cubrimiento $\{U_i\}_{1 \leq i \leq k}$. Definimos entonces

$$f : M \rightarrow \mathbb{R}^{k(n+1)}, \quad x \mapsto (\rho_1(x)\varphi_1(x), \dots, \rho_k(x)\varphi_k(x), \rho_1(x), \dots, \rho_k(x))$$

Con lo anterior

1. Pruebe que una inmersión inyectiva de una variedad compacta es un incrustamiento.
2. Demuestre que f es inyectiva.
3. Demuestre que f es una inmersión.

Problema 2 (Grupos y Álgebras de Lie)

El objetivo de este problema es probar un teorema de isomorfismo de álgebras de Lie y calcular un álgebra de Lie explícita. Sea entonces G grupo de Lie y $\Theta(G)$ sus campos vectoriales.

1. Considere

$$\Theta(G)^G := \{\xi \in \Theta(G) : g_*(\xi) = \xi \quad \forall g \in G\}$$

el conjunto de campos vectoriales invariantes y $T_e G$ su álgebra de Lie. Demuestre que

$$\varphi : \Theta(G)^G \xrightarrow{\sim} T_e G, \quad \xi \mapsto \xi(e)$$

es un isomorfismo de $\mathbb{R}$ -espacios vectoriales.

2. Considere $G = O(n) \subseteq GL(n, \mathbb{R})$ el grupo de matrices ortogonales reales de orden n . Demuestre que G es un subgrupo de Lie compacto de $GL(n, \mathbb{R})$ y encuentre el álgebra de Lie de G .

Problema 3 (Derivadas de Lie de campos vectoriales)

En este problema demostraremos algunas propiedades básicas de la derivada de Lie de campos vectoriales. Para ello demostraremos en primera instancia propiedades de derivaciones y posteriormente las extenderemos al corchete de Lie de campos vectoriales.

Considere A, B $\mathbb{R}$ -álgebras y sus álgebras de Lie asociadas $(\text{End}(A), [\cdot, \cdot]), (\text{End}(B), [\cdot, \cdot])$.

1. Si $f \in A$ y $D_1, D_2 \in \text{Der}(A)$ entonces $[D_1, fD_2] = D_1(f)D_2 + f[D_1, D_2]$.
2. Sea $\psi : A \xrightarrow{\sim} B$ isomorfismo de $\mathbb{R}$ -álgebras. Demuestre que

$$\psi_* : \text{Der}(A) \rightarrow \text{Der}(B), \quad D \mapsto \psi \circ D \circ \psi^{-1}$$

está bien definida y $\psi_*[D_1, D_2] = [\psi_*D_1, \psi_*D_2]$.

Considere ahora M variedad diferenciable, $\Theta(M)$ su $\mathcal{C}^\infty(M)$ -módulo de campos vectoriales y $\xi, \eta, \gamma \in \Theta(M)$. Demuestre que

1. $[\xi, \eta] = -[\eta, \xi]$
2. Si $f \in C^\infty(M)$ entonces $[\xi, f\eta] = \theta_\xi(f)\eta + f[\xi, \eta]$
3. $F_*[\xi, \eta] = [F_*\xi, F_*\eta]$

Finalmente, ocupe lo anterior para obtener las siguientes identidades para la derivada de Lie de campos vectoriales.

1. $\mathcal{L}_\xi \eta = -\mathcal{L}_\eta \xi$.
2. Si $g \in C^\infty(M)$ entonces $\mathcal{L}_\xi(g\eta) = (\mathcal{L}_\xi g)\eta + g\mathcal{L}_\xi \eta$.
3. Si $F : M \rightarrow N$ es un difeomorfismo entonces $F_*(\mathcal{L}_\xi X) = \mathcal{L}_{F_*\xi} F_*\gamma$.

Soluciones

Problema 1.

Demostración.

1. Sea $F : X \rightarrow Y$ la inmersión mencionada. Note entonces que F es cerrada¹. Ahora, la restricción $f : X \rightarrow F(X)$ es biyectiva por definición y es también cerrada pues si $C \subseteq X$ cerrado entonces $f(C) = F(C) = (F^{-1})^{-1}(C)$ cerrado en Y y luego cerrado en $F(X)$ ($F(X)$ es cerrado). Lo anterior implica que f^{-1} es continua y así f es un homeomorfismo. Por observación vista en clases f es un incrustamiento².
2. Suponer $f(x) = f(y)$. Dado que $\{\text{supp}(\rho_i)\}_{1 \leq i \leq k}$ cubre M existe $i \in \{1, \dots, k\}$ tal que $\rho_i(x) = \rho_i(y) \neq 0$. Entonces

$$\rho_i(x)\varphi_i(x) = \rho_i(y)\varphi_i(y) \quad \Rightarrow \quad \varphi_i(x) = \varphi_i(y) \quad \underbrace{\Rightarrow}_{\varphi_i \text{ inyectiva}} \quad x = y$$

3. Derivamos utilizando la regla de Leibniz en cada coordenada:

$$d_x f = (\rho_1(x)d_x \varphi_1 + \varphi_1(x)d_x \rho_1, \dots, \rho_k(x)d_x \varphi_k + \varphi_k(x)d_x \rho_k, d_x \rho_1, \dots, d_x \rho_k)$$

Si $V_x \in T_x M$ es tal que $d_x f(V_x) = 0$ entonces $d_x \rho_i(V_x) = 0$ para todo $i \in \{1, \dots, k\}$ lo cual significa que $\rho_i(x)d_x \varphi_i(V_x) = 0$ para todo $i \in \{1, \dots, k\}$. Tomando i tal que $x \in \text{supp}(\rho_i)$ obtenemos $d_x \varphi_i(V_x) = 0$ y así $V_x = 0$ pues φ_i es difeomorfismo.

□

Problema 2.

Demostración.

1. Es obvio que φ es lineal. Veamos que es inyectivo. Para ello sea $\xi \in \Theta(G)^G$ tal que $\xi(e) = 0$. Como es invariante tenemos

$$\xi(g) = d_e L_g(\xi(e)) = 0 \quad \forall g \in G \quad \Rightarrow \quad \xi = 0$$

Resta entonces ver que es sobreyectivo. Sea $A \in T_e G$. Definimos ξ_A sección de TM tal que

$$\xi_A(e) = A, \quad \xi_A(g) = d_e L_g(A) \quad \forall g \in G$$

Para que sea un campo vectorial debe ser suave. Para ello consideramos $g \in G$ y una carta en g $\varphi : V \subseteq G \xrightarrow{\sim} U \subseteq \mathbb{R}^n$ y coordenadas naturales de TM asociadas

$$\psi : \pi^{-1}(U) \xrightarrow{\sim} U \times \mathbb{R}^n, \quad (g, X_g) \mapsto (\varphi(g), d_g \varphi(X_g))$$

Entonces en coordenadas con $h := \varphi^{-1}(x)$

$$\begin{aligned} \psi \circ \xi \circ \varphi^{-1}(x) &= \psi(\xi(h)) \\ &= \psi(h, d_e L_h(A)) \\ &= (\varphi(h), d_h(\varphi(d_e L_h(A)))) \\ &= (x, d_e(\varphi \circ L_{\varphi^{-1}(x)})(A)) \end{aligned}$$

¹Esto es un hecho general de topología. Si $F : X \rightarrow Y$ es continua con X compacto e Y Hausdorff, entonces F es cerrada. Para ello basta notar que si $C \subseteq X$ es cerrado entonces es compacto. Por continuidad $F(C) \subseteq Y$ es compacto y por condición de Hausdorff cerrado.

²ver sección 10 del apunte.

y dado que φ y L_h son difeomorfismos tenemos que $\xi \in \Theta(G)$.

Para concluir veamos que es invariante. Sean $g, h \in G$ y notamos que

$$\begin{aligned} g_*\xi(h) &= d_{L_{g^{-1}(h)}}L_g(\xi(g^{-1}h)) \\ &= d_{g^{-1}h}L_g \circ d_e L_{g^{-1}h}(A) \\ &= d_e(L_g \circ L_{g^{-1}h})(A) \\ &= d_e L_h(A) = \xi(h) \end{aligned}$$

Concluimos así que φ es un isomorfismo.

2. Definamos en primer lugar el mapeo suave

$$\varphi : \mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) \rightarrow M(n, \mathbb{R}), \quad A \mapsto A^\top A$$

y notamos que $O(n) = \varphi^{-1}(I_n)$. Notemos además que podemos definir una acción suave $GL(n, \mathbb{R}) \curvearrowright M(n, \mathbb{R})$ mediante

$$X \cdot A = X^\top A X, \quad X \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R}), A \in M(n, \mathbb{R})$$

y podemos observar que

$$\mathrm{ev}_{I_n} : G \rightarrow X, \quad X \mapsto X^\top I_n X = X^\top X$$

es decir, $\varphi = \mathrm{ev}_{I_n}$ y en cátedra se vio que los mapeos de la forma ev_{I_n} asociados a una acción de un grupo de Lie son de rango constante, así que la fibra $\varphi^{-1}(I_n)$ define una subvariedad de $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$. Deducimos así que $O(n)$ es un subgrupo de Lie pues la estructura de grupo se preserva.

Para ver que $O(n)$ es compacto, basta notar que es cerrado y acotado pues $M_n(\mathbb{R}^2) \cong \mathbb{R}^{n^2}$. Es cerrado por ser conjunto de nivel de φ , y es acotado pues por Álgebra Lineal las columnas de una matriz ortogonal son ortonormales.

Ahora, el teorema de construcción de subvariedades nos dice que $T_{I_n}O(n) = \ker(d_{I_n}(\varphi))$ por lo que para encontrar el álgebra de Lie basta calcular el diferencial de φ . Sea entonces $A \in T_{I_n}\mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) = M(n, \mathbb{R})$ ($\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ es una subvariedad abierta) y un camino $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$, $\gamma(t) = I_n + tA$ y luego

$$d_{I_n}(\varphi)(A) = (\varphi \circ \gamma)'(0) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (I_n + tA)^\top (I_n + tA) = A^\top + A$$

y así deducimos que

$$T_{I_n}O(n) = \{A \in M(n, \mathbb{R}) : A^\top + A = 0\}$$

es decir, el álgebra de Lie de $O(n)$ son las matrices antisimétricas.

□

Problema 3.

Demostración. Comenzamos demostrando las propiedades de derivaciones.

1. Sea $a \in A$, entonces

$$\begin{aligned} [D_1, fD_2](a) &= D_1(fD_2(a)) - fD_2(D_1(a)) = \\ &= D_1(f) \cdot D_2(a) + fD_1D_2(a) - fD_2(D_1(a)) \\ &= D_1(f) \cdot D_2(a) + f[D_1, D_2](a) \end{aligned}$$

2. Primero debemos ver que $\psi_*(D)$ es una derivación. Sean entonces $f, g \in A$ y usando que ψ es isomorfismo de álgebras y la regla de Leibniz calculamos

$$\begin{aligned}
 \psi_*(D)(fg) &= (\psi \circ D \circ \psi^{-1})(fg) \\
 &= \psi(D(\psi^{-1}(f)\psi^{-1}(g))) \\
 &= \psi(D(\psi^{-1}(f))\psi^{-1}(g) + \psi^{-1}(f)D(\psi^{-1}(g))) \\
 &= \psi(D(\psi^{-1}(f))g + f\psi^{-1}(D(\psi^{-1}(g)))) \\
 &= \psi_*(f)g + f\psi_*(g)
 \end{aligned}$$

Ahora probamos la propiedad requerida

$$\begin{aligned}
 \psi_*([D_1, D_2])(f) &= \psi \circ [D_1, D_2] \circ \psi^{-1}(f) \\
 &= \psi(D_1 D_2(\psi^{-1}(f))) - D_2 D_1(\psi^{-1}(f)) \\
 &= (\psi D_1 \psi^{-1} \psi D_2 \psi^{-1}(f)) - (\psi D_2 \psi^{-1} \psi D_1 \psi^{-1}(f)) \\
 &= (\psi_*(D_1)\psi_*(D_2))(f) - (\psi_*(D_2)\psi_*(D_1))(f) \\
 &= [\psi_* D_1, \psi_* D_2](f)
 \end{aligned}$$

Ahora, probaremos las propiedades del corchete de Lie de campos. Para ello recordamos que $[\xi, \eta]$ se define como el único campo tal que $\theta_{[\xi, \eta]} = [\theta_\xi, \theta_\eta]$. Será fundamental también el hecho de que $\xi \mapsto \theta_\xi$ es un isomorfismo de $C^\infty(M)$ -módulos.

1. Por la definición del corchete, basta probar que $\theta_{-[\eta, \xi]} = [\theta_\xi, \theta_\eta]$. Tenemos entonces

$$\theta_{-[\eta, \xi]} = -\theta_{[\eta, \xi]} = -[\theta_\eta, \theta_\xi] = [\theta_\xi, \theta_\eta]$$

en donde en el último paso hemos empleado que $\theta_\xi \in \text{Der}(C^\infty(M))$.

2. La propiedad se obtiene empleando la primera identidad de derivaciones:

$$\begin{aligned}
 \theta_{\theta_\xi(f)\eta + f[\xi, \eta]} &= \theta_\xi(g)\theta_\eta + g\theta_{[\xi, \eta]} \\
 &= \theta_\xi(g)\theta_\eta + g[\theta_\xi, \theta_\eta] \\
 &= [\theta_\xi, g\theta_\eta] \\
 &= [\theta_\xi, \theta_{g\eta}]
 \end{aligned}$$

y se concluye por definición del corchete.

3. En clases se probó que $F_*(\theta_\xi) = \theta_{F_*\xi}$, y usando la propiedad 2. de derivaciones tenemos que

$$[\theta_{F_*\xi}, \theta_{F_*\eta}] = [F_*\theta_\xi, F_*\theta_\eta] = F_*[\theta_\xi, \theta_\eta] = F_*\theta_{[\xi, \eta]} = \theta_{F_*[\xi, \eta]}$$

de donde concluimos pues $[F_*\xi, F_*\eta]$ es único tal que $\theta_{[F_*\xi, F_*\eta]} = [\theta_{F_*\xi}, \theta_{F_*\eta}]$.

Usando todo lo anterior podemos entonces probar las propiedades del corchete de Lie, recordando que $\mathcal{L}_\xi \eta = [\xi, \eta]^3$.

1. Usamos la propiedad 1. de θ :

$$\mathcal{L}_\xi(\eta) = [\xi, \eta] = -[\eta, \xi] = -\mathcal{L}_\eta(\xi)$$

2. Usamos la propiedad 2. de θ y recordamos que $\mathcal{L}_\xi(g) = \theta_\xi(g)$ para funciones:

$$\mathcal{L}_\xi(g\eta) = [\xi, g\eta] = \theta_\xi(g)\eta + g[\xi, \eta] = \mathcal{L}_\xi(g)\eta + g\mathcal{L}_\xi(\eta)$$

3. Basta usar la propiedad 3. de θ y la propiedad 2. de derivaciones:

$$F_*\mathcal{L}_\xi \eta = F_*[\xi, \eta] = [F_*\xi, F_*\eta] = \mathcal{L}_{F_*\xi}(F_*\eta)$$

□

³ver Sección 18 del apunte.