Universidad Técnica Federico Santa María
Departamento de Matemática

Semestre: 2022-2

Ayudantía 5 MAT-290

1.- Sea X un espacio topológico y G un grupo de homeomorfismos de X. Si denotamos por $X\backslash G$ al conjunto cociente $(de orbitas de G)$ y por $\pi : X \to X\backslash G,\ x \to [x] = Gx$ la proyección canónica, probar que:

(a) La topología cociente, definida al declarar que $U \subseteq X\backslash G$ es abierto si $\pi^{-1}(U)$ es abierto de X, es una topología en $X\backslash G$.

(b) La proyección canónica $\pi : X \to X\backslash G$ es una función abierta.

Indicación: Probar que $\pi^{-1}(\pi(V)) = \bigcup_{g\in G} g(V)$ para todo $V \subseteq X$ abierto.

2.- Sea $V = \mathbb{R}^n$ y $\{e_1, \ldots, e_n\}$ una base de V. Sea Λ el grupo de difeomorfismos generados por las traslaciones $t_1, \ldots, t_n$, donde $t_j(x) = x + e_j$. Probar que $\Lambda \cong \mathbb{Z}^n$ y que $\Lambda \curvearrowright \mathbb{R}^n$ es libre y propia.
La variedad cociente $T := V\backslash\Lambda$ es el toro real $n-$dimensional.