Universidad Técnica Federico Santa María
Departamento de Matemática

Ayudantía 4

Ejercicio 1 Sea $M \subseteq E \simeq \mathbb{R}^n$ una subvariedad de clase $\mathscr{C}^\infty$. Entonces:

1) La inclusión $i : M \hookrightarrow E$ es una función diferenciable.

2) Una función $f : M \to \mathbb{R}$ es diferenciable si y sólo si para todo $x \in M$ existe una vecindad $x \in U \subseteq E \simeq \mathbb{R}^n$ y una función $\Phi : U \to \mathbb{R}$ de clase $\mathscr{C}^\infty$ tal que $\Phi|_{M\cap U} = f|_{M\cap U}$.

Ejercicio 2 Sea $M \subseteq \mathbb{R}^n$ una subvariedad de clase $\mathscr{C}^\infty$ y sea $f : M \to \mathbb{R}$ una función diferenciable. Probar que existe $\Phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de calse $\mathscr{C}^\infty$ tal qeu $\Phi|_M = f$.

Ejercicio 3 Sea $\mathbf{X}$ un conjunto, y supongamos que $\{U_i\}_{i\in\Lambda}$ son subconjuntos de $\mathbf{X}$ tales que

$$\mathbf{X} = \bigcup_{i\in\Lambda} U_i$$

Supongamos que existen funciones biyectivas $\varphi_i : U_i \to Y_i$, donde cada Y_i es una variedad diferenciable de dimensión n. Ademas supongamos que los conjuntos $Y_{ij} = \varphi_i(U_i \cap U_j)$ son abiertos de Y_i, y para todos $i, j \in \Lambda$, la función $\psi_{ij} := \varphi_j \circ \varphi_i^{-1} : Y_{ij} \to Y_{ji}$ son difeomorfismos.

- Definimos los abiertos de cada U_i como los $V \subseteq U_i$ tales que $\varphi_i(V)$ es abierto en Y_i.
- Definimos los abiertos en $\mathbf{X}$ como los $W \subseteq \mathbf{X}$ tales que $W \cap U_i$ es abierto en Y_i para todo $i \in \Lambda$. Por definición, los U_i son abiertos y φ_i son homeomorfismos.

Probar que $\mathbf{X}$ es un espacio topológico de Hausdorff si y sólo si cada Y_i es un espacio topológico de Hausdorff y si el grafo de los difeomorfismos $\psi_{ij} : Y_{ij} \to Y_{ji}$ es cerrado en $Y_i \times Y_j$.

Ejercicio 1

1) Sea $x \in M$ y $\varphi : V \subseteq M \to V' \subseteq F \simeq \mathbb{R}^m$ una carta local definida en $V := M \cap U$, inducida por un difeomorfismo $\psi : U \subseteq E \to U' \subseteq E$. Entonces, la expresión, de i en las cartas φ de M y ψ se E es la inclusión $V' \hookrightarrow U$, que es $\mathscr{C}^\infty$.

2) ($\Rightarrow$) Sea $f : M \to \mathbb{R}$ diferenciable y $x \in M$. Consideremos una vecindad $x \in U \subseteq E$ y un difeomorfismo $\psi : U \to U' \subseteq E$ tal que $\psi(M \cap U) = U' \cap F$ con $F \simeq \mathbb{R}^m$ subespacio vectorial de E, y sea $\varphi = \psi|_{U \cap M}$ la carta local asociada. Luego, $g := f \circ \psi^{-1}$ es de clase $\mathscr{C}^\infty$ en $U' \cap F$.

   Si escribimos $E = F \oplus F_0 \simeq \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n-m} \xrightarrow{\pi} F \simeq \mathbb{R}^m$ entonces, en torno a $x' \in \varphi(x) \in U'$ la función $g \circ \pi : U' \to \mathbb{R}$ es $\mathscr{C}^\infty$ y extiende a g. Por lo tanto, $\Phi := g \circ \pi \circ \psi$ extiende a f en una vecindad de x en $E \simeq \mathbb{R}^n$.

   ($\Leftarrow$) Si existe una vecindad $x \in U \subseteq E \simeq \mathbb{R}^n$ y una función $\Phi : U \to \mathbb{R}$ de clase $\mathscr{C}^\infty$ tal que $\Phi|_{M \cap U} = f|_{M \cap U}$, entonces tenemos que $f|_{M \cap U}$ es la composición de la inclusión $i : M \cap U \hookrightarrow U$, y de Φ. Por 1), ambas son $\mathscr{C}^\infty$, entonces f es diferenciable.

Ejercicio 2

Sea $f : M \to \mathbb{R}$ una función diferenciable. Luego, por 2) del ejercicio 1, tenemos que para todo $x \in M$, existe una vecindad $x \in U \subseteq \mathbb{R}^n$ y una función $\varphi : U \to \mathbb{R}$ de clase $\mathscr{C}^\infty$ tal que extiende a f en U.

Consideremos $\{x_i\}_{i \in I} \subseteq M$ tales que los conjuntos $\{U_i\}_{i \in I}$, dados por lo anterior, formen un cubrimiento de M, y consideremos el conjunto $\{U_i, V_j\}_{i \in I, j \in \Lambda}$, con $V_j \subseteq \mathbb{R}^n$ tales que

$$\mathbb{R}^n = \bigcup_{i \in I} U_i \cup \bigcup_{j \in \Lambda} V_j$$

es decir, la colección $\{U_i, V_j\}_{i \in I, j \in \Lambda}$ forma un cubrimiento de $\mathbb{R}^n$. Luego, por Teorema de la partición de la unidad, existen funciones $\xi_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ y $\mu_j : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tales que

- $supp(\xi_i) \subset U_i$ y $supp(\mu_j) \subset V_j$,
- La colección $\{supp(\xi_i), supp(\mu_j)\}_{i \in I, j \in \Lambda}$ es localmente finita, y

$$\sum_{i \in I} \xi_i(x) + \sum_{j \in \Lambda} \mu_j(x) = 1 \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

Ahora, consideremos $\varphi_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ las funciones dadas por el ejercicio anterior, que extienden a f en cada U_i, y definamos $\Phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, dada por

$$\Phi(x) := \sum_{i \in I} \xi_i(x) \varphi_i(x)$$

tenemos que Φ es de clase $\mathscr{C}^\infty$ por construcción y extiende a f a todo $\mathbb{R}^n$.

Ejercicio 3

($\Rightarrow$) Veamos que si $\mathbf{X}$ es Haudorff, entonces Y_i es Hausdorff.

Sean $a, b \in Y_i$ con $a \neq b$ para un $i \in \Lambda$ cualquiera. Como φ_i es biyectiva, tenemos que existen $x, y \in U_i$ tales que $\varphi_i(x) = a$ y $\varphi_i(y) = b$ con $x \neq y$. Luego, existen vecindades abiertas $x \in W \subseteq \mathbf{X}$ y $y \in V \subseteq \mathbf{X}$ tales que $W \cap V = \emptyset$ pues $\mathbf{X}$ es un espacio de Hausdorff. Ademas, $x \in W \cap U_i$ y $y \in V \cap U_i$, entonces

$$a \in \varphi_i(W \cap U_i) \qquad \text{y} \qquad b \in \varphi_i(V \cap U_i)$$

Como $W \cap V = \emptyset$, y φ_i es biyectiva, tenemos que

$$\varphi_i(W \cap U_i) \cap \varphi_i(V \cap U_i) = \emptyset$$

Entonces, como $\varphi_i(W \cap U_i)$ y $\varphi_i(V \cap U_i)$ son abiertos de Y_i tales que $a \in \varphi_i(W \cap U_i)$ y $b \in \varphi_i(V \cap U_i)$, Y_i es Hausdorff.

Veamos que si $\mathbf{X}$ es Hausdorff, entonces el grafo de ψ_{ij} es cerrado en $Y_i \times Y_j$.

Para probar esto, demostraremos que el conjunto

$$\Gamma_{ij}^c = \{(x, y) \in Y_{ij} \times Y_{ji} : \ \psi_{ij}(x) \neq y\}$$

es abierto en $Y_i \times Y_j$. Sea $(x, y) \in \Gamma_{ij}^c$, luego, por la biyectividad de φ_i para todo $i \in \Lambda$, tenemos

$$\begin{aligned} (x, y) \in \Gamma_{ij}^c &\iff \psi_{ij}(x) \neq y \\ &\iff (\varphi_j \circ \varphi_i^{-1})(x) \neq y \\ &\iff \varphi_i^{-1}(x) \neq \varphi_j^{-1}(y) \end{aligned}$$

Por otro lado, por definición de ψ_{ij}, tenemos que $\varphi_i^{-1}(x) \in U_i \cap U_j$ y $\varphi_j^{-1}(y) \in U_i \cap U_j$. Luego, como $\mathbf{X}$ es Hausdorff, existen vecindades abiertas $\varphi_i^{-1}(x) \in W \subseteq \mathbf{X}$ y $\varphi_j^{-1}(y) \in V \subseteq \mathbf{X}$ tales que $W \cap V = \emptyset$.

Por definición de abierto en $\mathbf{X}$, $\varphi_i(W \cap U_i \cap U_j)$ y $\varphi_j(V \cap U_i \cap U_j)$ son abiertos de Y_i y Y_j respectivamente, lo que implica que $\varphi_i(W \cap U_i \cap U_j) \times \varphi_j(V \cap U_i \cap U_j)$ es un abierto de $Y_i \times Y_j$ por definición de topologia producto.

Ahora, si tomamos $x \in \varphi_i(W \cap U_i \cap U_j)$, tenemos que

$$\psi_{ij}(x) = \varphi_j \circ \varphi_i^{-1}(x) \in \varphi_j(W \cap U_i \cap U_j)$$

Como $W \cap V = \emptyset$, tenemos $\psi_{ij}(x) \notin \varphi_j(V \cap U_i \cap U_j)$, es decir,

$$\varphi_i(W \cap U_i \cap U_j) \times \varphi_j(V \cap U_i \cap U_j) \subset \Gamma_{ij}^c$$

lo que implica que Γ_{ij} es cerrado.

($\Leftarrow$) Notemos que la colección $\{U_i \times U_j\}_{i \in \Lambda, j \in \Lambda}$ cubre a $\mathbf{X} \times \mathbf{X}$, entonces, el conjunto

$$\Delta_{\mathbf{X}} = \{(x, x) \in \mathbf{X} \times \mathbf{X}\}$$

es cerrado si y sólo si $\Delta_{\mathbf{X}} \cap (U_i \times U_j)$ es cerrado en $U_i \times U_j$ para todo $i, j \in \Lambda$.

Sea, $x \in Y_{ij}$, tenemos

$$\begin{aligned} U_i \times U_j \ni (x, \psi_{ij}(x)) &\iff (x, \varphi_j(\varphi_i^{-1}(x)) \\ &\iff (\varphi_i(y), \varphi_j(y)) \end{aligned}$$

donde hacemos el cambio de variable $y := \varphi_i^{-1}(x) \in U_i \times U_j$. Entonces, la imagen de $(U_i \times U_j) \cap \Delta_{\mathbf{X}}$ bajo la función $\varphi_i \times \varphi_j$ es el grafo Γ_{ij}. Por lo tanto, X es Hausdorff.