Profesor: Pedro Montero
Estudiantes: Mario Pastrana y Ernesto Treumún

Ayudantía 11
Geometría Diferencial (MAT-290)
Semestre 2022-2

Problema 1 (Teorema del punto fijo de Brouwer).
Nuestro primer problema a presentar consiste en dar una demostración, usando herramientas propias de la topología diferencial, del famoso Teorema del punto de Fijo de Brouwer, el cual nos enuncia lo siguiente

Teorema 1. *Sea $f : \overline{\mathbb{B}}^n \to \overline{\mathbb{B}}^n$ una aplicación suave, donde $\overline{\mathbb{B}}^n := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq 1\}$. Entonces, f posee un punto fijo.*

El ingrediente principal que utilizaremos para la demostración es el siguiente lema.

Lema 1. Sea M una variedad con borde y orientada, con $\partial M \neq \emptyset$. Entonces, **no** existe retracción suave $r : M \to \partial M$, es decir, no existe mapeo $r : M \to \partial M$ de clase $\mathscr{C}^\infty$ tal que $r|_{\partial M} = \mathrm{id}_{\partial M}$.

Estructuraremos la demostración del Teorema del punto fijo de Brouwer como sigue:

1. Demuestre el lema 1. Para ello, suponga que existe r que cumple lo del enunciado. Construya $\omega \in \Omega^{n-1}(\partial M)$ tal que $\int_{\partial M} \omega > 0$, y llegue a contradicción usando el Teorema de Stokes.

2. Ahora proceda con la demostración del Teorema. Para ello, suponga por contradicción que f no posee puntos fijos. Sea $x \in \overline{\mathbb{B}}^n$, dado que $y = f(x) \neq x$ podemos considerar la recta $\langle x, y\rangle$ que corta $\partial\overline{\mathbb{B}}^n$ en

$$\langle x, y\rangle \cap \partial\overline{\mathbb{B}}^n =: \{z, t\}.$$

   Escribiendo los puntos (z, x, y, t) de manera ordenada en la recta, podemos definir $r : \overline{\mathbb{B}}^n \to \partial\overline{\mathbb{B}}^n$ mediante $r(x) := z$. Describa explícitamente la forma de r, demuestre que es de clase $\mathscr{C}^\infty$ y concluya.

Problema 2 (Cohomología usando Mayer-Vietoris).
Recordemos que dada una variedad diferenciable M, y dos abiertos U, V tales que $M = U \cup V$, se tiene la sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow \Omega(M) \longrightarrow \Omega(U) \oplus \Omega(V) \longrightarrow \Omega(U \cap V) \longrightarrow 0,$$

la cual induce la **sucesión de Mayer-Vietoris**

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & H^0_{dR}(M) & \longrightarrow & H^0_{dR}(U) \oplus H^0_{dR}(V) & \longrightarrow & H^0_{dR}(U \cap V) & \longrightarrow & \cdots \\ \cdots & \longrightarrow & H^1_{dR}(M) & \longrightarrow & H^1_{dR}(U) \oplus H^1_{dR}(V) & \longrightarrow & H^1_{dR}(U \cap V) & \longrightarrow & \cdots \end{array}$$

Una de las grandes utilidades de esta sucesión es que permite calcular cohomología de objetos tras calcular la cohomología de piezas más pequeñas que compongan la variedad.

a) Calcular $H^n_{dR}(M)$, donde M es un toro.

b) Calcular $H^n_{dR}(M)$, donde M es la banda de Möbius.

c) Calcular $H^n_{dR}(M)$, donde M es la botella de Klein.

Un objeto dual de la cohomología es la llamada **homología**, existe una manera de calcular los grupos de homología de un producto mediente el siguiente isomorfismo

$$H_n(X \times Y) \cong \bigoplus_{r+s=n} H_r(X) \otimes H_s(Y),$$

la cual se conoce como la **fórmula de Künneth**. Con ella podemos calcular fácilmente los grupos de homología del toro y comparar los resultados obtenidos en la parte **a)**.