Ayudantía 10

Antes de enunciar los problemas de la ayudantía, introduciremos algunas definiciones y resultados que serán útiles durante el desarrollo:

Definición: (Multiplicación interior/Contracción) Sea V un espacio vectorial de dimensión finita, para cada $\xi \in V$ definimos el mapeo lineal $i_\xi : \bigwedge^k(V^*) \to \bigwedge^{k-1}(V^*)$, $\omega \to i(\xi)(\omega)$ llamado contracción por ξ como

$$i_\xi \omega(w_1, ..., w_{k-1}) = \omega(\xi, w_1, ..., w_{k-1})$$

En particular, si tomamos $\alpha_0, ..., \alpha_p \in V^*$, se tiene que

$$i(\xi)(\alpha_0 \wedge ... \wedge \alpha_p) = \sum_{i=0}^{p} (-1)^i \alpha_i(\xi) \alpha_0 \wedge ... \wedge \hat{\alpha_i} \wedge ... \wedge \alpha_p$$

y que $i(\xi)$ es una derivación de grado -1 en $\bigwedge V^*$.

La definición anterior nos entrega dos potentes formas de utilizar la contracción, la primera es que podemos relacionar la evaluación de una $(k-1)-$forma en $(k-1)$ vectores con la evaluación de una $k-$forma sobre los mismos $(k-1)$ vectores, pero agregando además el vector por el cuál estamos realizando la contracción.

La segunda es que nos da un indicio de cómo proyectar esta $k-$forma sobre una suma alternante de $(k-1)-$formas, particularmente útil si queremos restringir formas de volumen a subvariedades.

Definición: Una variedad diferenciable M se dice *orientable* si existe un atlas $\mathscr{A}$ tal que si $\varphi_i, \varphi_j \in \mathscr{A}$, entonces $\det(J(\varphi_j \circ \varphi_i^{-1})) > 0$. Una *orientación* de M es una elección de un atlas maximal $\mathscr{A}$ verificando lo anterior.

Definición: Una *forma de volumen* en una variedad diferenciable M es una $n-$forma diferencial con $n = \dim(M)$, $\omega \in \Omega^n(M)$ tal que $\omega(x) \neq 0$ en $\bigwedge^n T_x^* M$ para todo $x \in M$.

Probar directamente de la definición que una variedad es orientable puede ser tedioso, pero hay una manera de utilizar formas de volumen para verificar que una variedad sea orientable:

Proposición: Una variedad M es orientable si y solo si M posee una forma de volumen.

Teorema: (Alexander) Sea $M^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ una hipersuperficie compacta, enonces $\mathbb{R}^{n+1} \setminus M$ tiene dos componentes conexas: el interior de M y el exterior de M.

El teorema anterior se puede usar para orientar toda hipersuperficie compacta $M^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Más adelante, el siguiente resultado sin demostración será de utilidad:

Hecho: El espacio proyectivo $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ es una hipersuperficie compacta contenida en $\mathbb{R}^{n+1}$.

Problemas

1. **Teorema:** Sea M una variedad diferenciable. Entonces, existe una única derivación de grado 1, llamada *diferencial exterior*, $d : \Omega^p(M) \longrightarrow \Omega^{p+1}(M)$ tal que
   a. Para toda $f \in \mathscr{C}^\infty(M)$, df es el diferencial usual. En particular, $df(X) = X(f)$.
   b. $d^2 = d \circ d = 0$.
2. Sea $v := dx_0 \wedge ... \wedge dx_n$ la forma de volumen de $\mathbb{R}^n$ y sea $\xi := \sum_{i=0}^n x_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ un campo vectorial radial (o *campo de Euler*). Sea $j : \mathbf{S}^n \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ la inclusión, pruebe que

$$\omega := j^*(i_\xi v) = (i_\xi v)\Big|_{\mathbf{S}^n}$$

   Es una forma de volumen en la esfera $\mathbf{S}^n$.

3. $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ es orientable si y solo si n es impar.
   Para demostrar esto último, considere $p : \mathbf{S}^n \to \mathbf{S}^n/\langle\tau\rangle =: \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ con $\tau(x) = -x$ y $\omega = (i_\xi v)\big|_{\mathbf{S}^n}$ la forma de volumen de $\mathbf{S}^n$ dada por el ejercicio anterior, pruebe entonces que

$$\tau^*\omega = (-1)^{n+1}\omega$$

   y que por tanto, τ preserva la orientación de $\mathbf{S}^n$ si es que n es impar.

Como observación final, note que si tomamos el Teorema de Alexander junto al problema 3, se puede probar que no existe un incrustamiento tal que $\mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \hookrightarrow \mathbb{R}^3$.