Certamen de Geometría Diferencial (MAT290)

Pedro Montero

Departamento de Matemática, Universidad Técnica Federico Santa María

En cada problema, debe **escoger solamente un ejercicio** para resolver, excepto en el Bonus (ver última página). Durante el Certamen, todas las variedades diferenciables y funciones entre ellas serán de clase $\mathscr{C}^\infty$. Además, las supondremos espacios topológicos de Hausdorff y σ-compactos.

1. **Recuerdos de cálculo diferencial (10 pts).**

   (a) Considere la función determinante

   $$\det : \mathrm{GL}_n(\mathbf{R}) \longrightarrow \mathbf{R},\ A \longmapsto \det(A).$$

   Pruebe que $(d_{\mathrm{I}_n} \det)(A) = \mathrm{tr}(A)$ para toda $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$.
   Indicación: Relacione la expresión $\det(\mathrm{I}_n + tA)$ *con el polinomio característico de* A.

   (b) Sea $\mathbf{R}[X]_n$ el espacio vectorial de polinomios en la variable X con coeficientes reales de grado $\leq n$. Demostrar que el conjunto $U \subseteq \mathbf{R}[X]_n$ formado por los polinomios admitiendo n raíces reales simples es un abierto. Más aún, si para $p \in U$ escribimos

   $$\lambda_1(p) < \lambda_2(p) < \cdots < \lambda_n(p)$$

   las raíces de p, probar que las funciones $\lambda_i : U \to \mathbf{R}$ son de clase $\mathscr{C}^\infty$.
   Indicación: Considerar la función $f : \mathbf{R}_n[X] \times \mathbf{R} \to \mathbf{R},\ (P,\lambda) \mapsto P(\lambda)$, *y aplicar el Teorema de la función implícita en* $(p_0, \lambda_k(p_0))$ *para* $p_0 \in U$.

   (c) Considere la función

   $$f : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}^2,\ (x,y) \longmapsto (x^2 - y^2, 2xy).$$

   Probar que f es un difeomorfismo local en $\mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, y determinar un abierto maximal $U \subseteq \mathbf{R}^2$ tal que $f|_U : U \to f(U)$ sea un difeomorfismo.

2. **Sub-variedades de $\mathbf{R}^n$ (10 pts).**

   (a) Determinar los valores críticos de la función $f : \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^2$ dada por

   $$f(x,y,z) = (x^3 + y^3 + z^3, x^2 + y^2 + z^2),$$

   y verificar que el conjunto de valores críticos es de medida nula. Deducir que las ecuaciones

   $$\begin{cases} x^3 + y^3 + z^3 = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \end{cases}$$

   definen una curva compacta de $\mathbf{R}^3$.

   (b) Determinar los parámetros $(p,q) \in \mathbf{R}^2$ tales que el conjunto

   $$C = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \text{ tal que } y^2 = x^3 - 3px + q\}$$

   sea un sub-variedad de $\mathbf{R}^2$.

   (c) Considere la función $f : \mathbf{R}^2 \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbf{R}^4 \setminus \{0\}$ dada por

   $$f(x,y) = (x^3, x^2 y, x y^2, y^3).$$

   Probar que f es una inmersión propia y que es abierta sobre su imagen. Deducir que $M = f(\mathbf{R}^2 \setminus \{0\})$ es una subvariedad de $\mathbf{R}^4$ de dimensión 2.

3. **Variedades diferenciables (10 pts).**

   (a) Describir detalladamente[1] una estructura diferenciable para la esfera unitaria

   $$\mathbf{S}^{n-1} = \{x \in \mathbf{R}^n \text{ tal que } \|x\|^2 = 1\},$$

   y probar que la proyección $p : \mathbf{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbf{S}^{n-1},\ x \mapsto \frac{x}{\|x\|}$ es una función de clase $\mathscr{C}^\infty$.

[1] Ver e.g. Example 1.4 en John M. Lee, *Introduction to Smooth Manifolds*.

(b) Sean $p, q \geq 1$. Probar que el conjunto

$$M = \{(x, y) \in \mathbf{R}^q \times \mathbf{R}^p \text{ tales que } x_1^2 + \ldots + x_q^2 - y_1^2 - \ldots - y_p^2 = 1\}$$

es una subvariedad de $\mathbf{R}^q \times \mathbf{R}^p \cong \mathbf{R}^{p+q}$, y que es difeomorfa a $\mathbf{S}^{q-1} \times \mathbf{R}^p$. Describir cualitativamente los casos en que $p + q = 3$.

(c) Probar que para toda matriz invertible $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$ se tiene que el diferencial de la aplicación determinante $\det : \mathrm{GL}_n(\mathbf{R}) \to \mathbf{R}$ está dado por

$$(d_M \det)(A) = \det(M) \operatorname{tr}(M^{-1}A).$$

Deducir que si $M \in \mathrm{SL}_n(\mathbf{R}) = \{M \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{R}) \text{ tal que } \det(M) = 1\}$ entonces $\operatorname{rg}(d_M \det) = 1$ y concluir que $\mathrm{SL}_n(\mathbf{R})$ es una variedad diferenciable de dimensión $n^2 - 1$.

4. **Variedades cocientes y sub-variedades (10 pts).**

(a) Sea Y una sub-variedad de una variedad X, y sea Z una sub-variedad de Y. Probar que Z es una sub-variedad de X.

(b) La **botella de Klein** se define como el cociente de $\mathbf{R}^2$ por el grupo de difeomorfismos generado por

$$\sigma(x, y) = (x + 1, y) \text{ y } \tau(x, y) = (-x, y + 1).$$

Dotar a la botella de Klein de estructura de variedad diferenciable.

(c) Considere la acción del grupo $(\mathbf{Z}, +)$ sobre $\mathbf{R}^2 \setminus \{0\}$ por los difeomorfismos dados por

$$\sigma_n(x, y) = (2^n x, 2^{-n} y) \text{ para todo } n \in \mathbf{Z}.$$

Probar que el espacio topológico cociente no es Hausdorff.

5. **Espacio tangente (10 pts).**

(a) Sea X una variedad diferenciable, $a \in X$ un punto, y sea $\mathscr{C}_a(X)$ el conjunto de caminos por $a \in X$. Pruebe que dos caminos $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathscr{C}_a(X)$ son equivalentes (en el sentido de la §9 del apunte del curso) si y sólo si **para toda** carta local $\varphi : U \subseteq X \to V \subseteq \mathbf{R}^n$ en torno al punto $a \in U \subseteq X$ se tiene que

$$(\varphi \circ \gamma_1)'(0) = (\varphi \circ \gamma_2)'(0).$$

(b) Sea G un grupo discreto de difeomorfismos de una variedad diferenciable X actuando de manera libre y propia. Pruebe que la proyección canónica $\pi : X \longrightarrow X/G$ es un revestimiento, y determine su grado.

(c) Sea X una variedad compacta y sea $f : X \to X$ un difeomorfismo. Supongamos que para todo punto fijo $a \in X$ de f se tiene que $\lambda = 1$ **no** es un valor propio del diferencial $d_a f$. Probar que

$$g : X \longrightarrow X \times X,\ x \longmapsto (x, f(x))$$

es transversal a la diagonal $\Delta_X \subseteq X \times X$, y deducir que f sólo posee **finitos** puntos fijos.

6. **Fibrados vectoriales y fibrado tangente (10 pts).**

(a) Probar que el fibrado tangente TM de una variedad diferenciable M es también una variedad de Hausdorff y σ-compacta.

(b) Sea $f : E \to F$ un morfismo de fibrados vectoriales sobre una variedad diferenciable M tal que el rango de la restricción $f_x := f|_{E_x} : E_x \to F_x$ es constante. Probar que $\ker(f)$ es un sub-fibrado vectorial de E.

(c) Recordemos que la **banda de Möbius** se define como el cociente de $\mathbf{R}^2$ por la relación de equivalencia

$$(x, t) \sim (x + 1, -t) \text{ para todos } (x, t) \in \mathbf{R}^2,$$

y definimos por $\pi : M \to \mathbf{R}/\mathbf{Z} \cong \mathbf{S}^1 \subseteq \mathbf{C},\ [(x, t)] \mapsto [x] = e^{2\pi i x}$ la proyección en la primera coordenada. Así, $\pi : M \to \mathbf{S}^1$ define un fibrado vectorial de rango 1 sobre $\mathbf{S}^1$. Probar que π **no** es el fibrado trivial. *Indicación: Sea $0_M : \mathbf{S}^1 \to M$ la sección nula. Analizar la topología de $M \setminus 0_M(\mathbf{S}^1)$.*

7. **Campos vectoriales y derivada de Lie (10 pts).**

(a) Considere los campos de vectores ξ y η en $\mathbf{R}^3$ dados por

$$\xi(x,y,z) = (2z-y)\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y} - 2x\frac{\partial}{\partial z}, \quad \eta(x,y,z) = z\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial z}.$$

Calcular el corchete de Lie $[\xi,\eta]$. Verificar que la restricción de los campos ξ, η y $[\xi,\eta]$ a la esfera $\mathbf{S}^2 = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \text{ tal que } x^2+y^2+z^2 = 1\}$ son campos vectoriales en $\mathbf{S}^2$.

(b) Sea ξ un campo de vectores en una variedad diferenciable M. Probar que una función suave $f : M \to \mathbf{R}$ es constante a lo largo de las curvas integrales de ξ si y sólo si $\theta_\xi(f) = 0$.

(c) Sea ξ un campo de vectores en una variedad diferenciable M. Probar que si $[\xi,\eta] = 0$ para todo campos de vectores $\eta \in \Theta(M)$, entonces $\xi = 0$.

8. **Ecuaciones Diferenciales Ordinarias y Flujo (10 pts).**

(a) Recordemos que el **toro** $\mathbf{T} = \mathbf{R}^2/\mathbf{Z}^2$ es el cociente de $\mathbf{R}^2$ por la relación de equivalencia $(x,y) \sim (x+n, y+m)$ para todos $n,m \in \mathbf{Z}$. Probar que para todos $a,b \in \mathbf{R}$ el campo de vectores

$$\xi = a\frac{\partial}{\partial x} + b\frac{\partial}{\partial y}$$

induce un campo de vectores $\hat{\xi}$ en $\mathbf{T}$, y que si $\frac{a}{b} \in \mathbf{Q}$ (con $b \neq 0$) entonces las curvas integrales asociadas a $\hat{\xi}$ son curvas cerradas en $\mathbf{T}$.

(b) Sea $a \in \mathbf{R}^\times$. Para $n \in \{0,1,2,3\}$ considere el campo de vectores en $\mathbf{R}$ dado por

$$\xi_n = ax^n\frac{\partial}{\partial x}.$$

Para cada valor de n, calcular las curvas integrales de ξ_n y describir el intervalo de definición de las soluciones maximales.

(c) Sea $f : M \to M$ un difeomorfismo, y $\xi \in \Theta(M)$ un campo de vectores completo con flujo $(\varphi_t)_{t\in\mathbf{R}}$. Probar que el campo de vectores $\eta = f_*(\xi)$ es completo y que flujo asociado está dado por $\psi_t = f \circ \varphi_t \circ f^{-1}$.

9. **Aplicación exponencial, Teorema de Ehressmann y Derivada de Lie de campos (10 pts).**

(a) Sea M una variedad compacta y sea $f : M \to \mathbf{R}$ una función suave. Recordemos que si $a \in \mathbf{R}$ es un valor regular de f entonces la fibra $M_a = f^{-1}(a)$ es una subvariedad de M. Sean $a < b$ dos valores regulares de f y supongamos que f no posee valores críticos en el intervalo $[a,b]$. Probar que en tal caso las fibras M_a y M_b son difeomorfas.

(b) Sean ξ, η dos campos de vectores completos en una variedad diferenciable M. Probar que, usando el Ejercicio 8.(c) y que $\mathscr{L}_\xi(\eta) = [\xi,\eta]$, que las dos condiciones siguientes son equivalentes:

(i) $[\xi,\eta] = 0$.

(ii) El flujo $(\varphi_t)_{t\in\mathbf{R}}$ de ξ y el flujo $(\psi_s)_{s\in\mathbf{R}}$ de η conmutan, i.e., $\psi_s \circ \varphi_t = \varphi_t \circ \psi_s$ para todos $s,t \in \mathbf{R}$.

(c) Sea G un grupo de Lie conexo. Probar, usando el Ejercicio 9.(b), que G es abeliano (i.e., $xy = yx$ para todos $x,y \in G$) si y sólo si el corchete de Lie de $\mathfrak{g}$ es nulo (i.e., $[A,B] = 0$ para todos $A,B \in \mathfrak{g}$).

10. **Grupos de Lie (10 pts).**

(a) Sea M una variedad diferenciable de dimensión n, y sean $\xi_1,\ldots,\xi_n \in \Theta(M)$ campos de vectores tales que $(\xi_1(x),\ldots,\xi_n(x))$ es una base de T_xM para todo $x \in M$. Probar que $TM \cong M \times \mathbf{R}^n$ es el fibrado trivial. Deducir, usando lo anterior, que todo grupo de Lie G tiene fibrado tangente trivial.

(b) Sea G un grupo de Lie con álgebra de Lie $\mathfrak{g} = T_eG$, y denotemos por

$$\exp : \mathfrak{g} \longrightarrow G, \; A \longmapsto \exp(A) := c_A(1,e)$$

la aplicación exponencial correspondiente. Probar las siguientes propiedades:

(i) $\exp((s+t)A) = \exp(sA)\exp(tA)$, $\exp(A)^{-1} = \exp(-A)$ y $\exp(0) = e$.

(ii) $d_0(\exp) = \mathrm{Id}_{\mathfrak{g}}$.

(c) Sea $S_n(\mathbf{R}) \subseteq \mathrm{M}_n(\mathbf{R})$ el sub-espacio vectorial de matrices reales $n \times n$ simétricas. Considere la aplicación

$$\varphi : \mathrm{M}_n(\mathbf{R}) \longrightarrow S_n(\mathbf{R}), \; M \longmapsto {}^{\mathrm{t}}MM.$$

Pruebe que $(d_M\varphi)(A) = {}^{\mathrm{t}}AM + {}^{\mathrm{t}}MA$ y deduzca que el álgebra de Lie del grupo de matrices ortogonales $\mathrm{O}_n(\mathbf{R}) = \{M \in \mathrm{M}_n(\mathbf{R}) \text{ tal que } {}^{\mathrm{t}}MM = \mathrm{I}_n\}$ está dado por $\mathfrak{so}_n(\mathbf{R}) := \{A \in \mathrm{M}_n(\mathbf{R}) \text{ tal que } A + {}^{\mathrm{t}}A = 0\}$. ¿Cuál es el álgebra de Lie del grupo especial ortogonal $\mathrm{SO}_n(\mathbf{R}) := \mathrm{O}_n(\mathbf{R}) \cap \mathrm{SL}_n(\mathbf{R})$?

Bonus (30 puntos): Recordemos que la esfera estándar n-dimensional está dada por

$$\mathbf{S}^n = \{(x_0, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^{n+1} \text{ tal que } x_0^2 + \ldots + x_n^2 = 1\}.$$

Por otra parte, decimos que una variedad diferenciable M es **paralelizable** si tiene fibrado trivial (i.e., $TM \cong M \times \mathbf{R}^{\dim(M)}$). Por ejemplo, se tiene que todo grupo de Lie G es paralelizable (ver Ejercicio 10.(a), que puede usar directamente sin demostración).

El objetivo de este ejercicio es probar que las esferas $\mathbf{S}^1$, $\mathbf{S}^3$ y $\mathbf{S}^7$ son variedades paralelizables.

(a) Probar que $\mathbf{S}^1 \subseteq \mathbf{R}^2 \cong \mathbf{C}$ es un grupo de Lie conmutativo, y deducir que $T\mathbf{S}^1 \cong \mathbf{S}^1 \times \mathbf{R}$.

En lo que sigue, consideremos $V \cong (\mathbf{C}^2, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espacio hermitiano 2-dimensional, i.e., un espacio vectorial complejo dotado de un producto escalar complejo[2]. Dado un endomorfismo $u : V \to V$, denotamos por $u^* : V \to V$ el endomorfismo adjunto de u (i.e., el único endomorfismo tal que $\langle u(x), y\rangle = \langle x, u^*(y)\rangle$ para todos $x, y \in V$).

Consideremos el conjunto de endomorfismos

$$\mathbf{H} := \{u \in \mathrm{End}(V) \text{ tal que } uu^* = \det(u)\,\mathrm{Id}_V\}.$$

(b) Sea $u \in \mathbf{H}$. Probar que la matriz de u en una base ortonormal es de la forma

$$A = \begin{pmatrix} a & -\overline{b} \\ b & \overline{a} \end{pmatrix}$$

para ciertos $a, b \in \mathbf{C}$. Deducir que $\mathbf{H} \subseteq \mathrm{End}(V)$ es una sub-álgebra (no-conmutativa) que es invariante por la involución $u \mapsto u^*$.

(c) Probar que todo elemento no-nulo $u \in \mathbf{H} \setminus \{0\}$ es invertible (i.e., existe $v \in \mathbf{H} \setminus \{0\}$ tal que $uv = vu = \mathrm{Id}_V$.

El punto anterior implica que $\mathbf{H} \cong \mathbf{R}^4$ es un *cuerpo torcido*[3] (i.e., cumple todos los axiomas de cuerpo, salvo la conmutatividad). Decimos que $\mathbf{H}$ es el **álgebra de cuaterniones**, y escribimos $1 := \mathrm{Id}_V$. En lo que sigue, dotamos a $\mathbf{H} \cong \mathbf{R}^4$ del producto euclideano (real)

$$\langle u, v\rangle_{\mathbf{H}} := \frac{1}{2}\,\mathrm{Re}(\mathrm{tr}(uv^*)),$$

con norma asociada $\|u\|_{\mathbf{H}}^2 = \frac{1}{2}\,\mathrm{tr}(uu^*) = \det(u)$.

(d) Probar que $\mathbf{S}^3 \cong \{u \in \mathbf{H} \text{ tal que } \|u\|_{\mathbf{H}} = 1\}$ es un grupo de Lie (no-conmutativo)[4], y deducir que el fibrado tangente $T\mathbf{S}^3 \cong \mathbf{S}^3 \times \mathbf{R}^3$ es trivial.

En lo que sigue, consideramos el espacio vectorial $\mathbf{O} := \mathbf{H} \oplus \mathbf{H} \cong \mathbf{R}^8$ dotado de la norma euclideana

$$\|z\|_{\mathbf{O}}^2 := \|x\|_{\mathbf{H}}^2 + \|y\|_{\mathbf{H}}^2 \text{ donde } z = (x, y) \in \mathbf{O}.$$

El espacio vectorial $\mathbf{O}$ es llamado el conjunto de **octoniones de Cayley**[5], y definimos la conjugación de un elemento $w = (u, v) \in \mathbf{O}$ por $\overline{w} := (u^*, -v) \in \mathbf{O}$.

(e) Para cada $w = (u, v) \in \mathbf{O}$, consideremos la aplicación $\mathbf{R}$-lineal dada por

$$g_w : \mathbf{O} \longrightarrow \mathbf{O},\ z \longmapsto g_w(z) = (xu - v^*y, vx + yu^*),$$

donde $z = (x, y) \in \mathbf{O}$. Probar que para todos $w, z \in \mathbf{O}$ se tiene que

$$g_{\overline{w}} \circ g_w = \|w\|_{\mathbf{O}}^2\,\mathrm{Id}_{\mathbf{O}} \text{ y que } \|g_w(z)\|_{\mathbf{O}}^2 = \|w\|_{\mathbf{O}}^2 \|z\|_{\mathbf{O}}^2.$$

Deducir que si $\|w\|_{\mathbf{O}}^2 = 1$ entonces $g_w \in \mathrm{SO}(\mathbf{O})$, donde

$$\mathrm{SO}(\mathbf{O}) = \{g \in \mathrm{End}(\mathbf{O}) \text{ tal que } \|g(z)\|_{\mathbf{O}} = \|z\|_{\mathbf{O}} \text{ para todo } z \in \mathbf{O} \text{ y tal que } \det(g) = 1\}.$$

Cabe destacar que en el espacio euclideano $\mathbf{O} \cong \mathbf{R}^8$ se tiene que $\{z \in \mathbf{O} \text{ tal que } \|z\|_{\mathbf{O}} = 1\} \cong \mathbf{S}^7$. Sin embargo, este último **no es** un grupo de Lie, y por ende necesitamos un argumento adicional (análogo al Ejercicio 10.(a)):

(f) Sea $\mathbf{S}^7 := \{z \in \mathbf{O} \text{ tal que } \|z\|_{\mathbf{O}} = 1\}$, y definamos $e := (1, 0)$. Verificar que si $w \in \mathbf{S}^7$ y $t \in T_e\mathbf{S}^7$ entonces $g_w(t) \in T_w\mathbf{S}^7$, y probar que

$$\varphi : \mathbf{S}^7 \times T_e\mathbf{S}^7 \longrightarrow T\mathbf{S}^7,\ (w, t) \longmapsto (w, g_w(t))$$

es un isomorfismo de fibrados vectoriales. En particular, $T\mathbf{S}^7 \cong \mathbf{S}^7 \times \mathbf{R}^7$.

Cultura general: En 1958, fue probado independientemente por Hirzebruch, Kervaire, y por Bott y Milnor, que las **únicas** esferas paralelizables son $\mathbf{S}^1$, $\mathbf{S}^3$ y $\mathbf{S}^7$. Es un resultado profundo de topología algebraica.

[2] Para más detalles, ver aquí.
[3] En inglés, skew-field.
[4] De hecho, junto con el punto (b), esto prueba que $\mathbf{S}^3 \cong \mathrm{SU}_2(\mathbf{C})$ es el grupo especial unitario.
[5] Puede probarse que $\mathbf{O}$ tiene estructura de álgebra no-conmutativa y no-asociativa (!), aunque no lo utilizaremos.