

# TAREA 7 – TOPOLOGÍA

PROFESOR: PEDRO MONTERO, AYUDANTE: SEBASTIÁN FUENTES

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA, UNIVERSIDAD TÉCNICA FEDERICO SANTA MARÍA

**Fecha de entrega:**<sup>1</sup> Hasta el DOMINGO 7 DE JULIO DE 2024 A LAS 23H59.

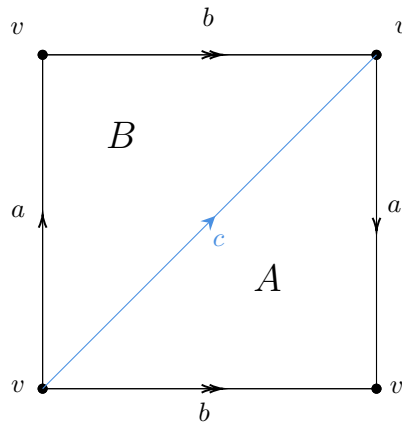
Esta Tarea debe ser realizada **individualmente**.

## Problema 1

Sea  $n \in \mathbf{N}^{\geq 1}$ . Calcule todos los grupos de cohomología  $H^i(\mathbf{P}^n(\mathbf{R}), G)$  para  $G = \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ ,  $G = \mathbf{Z}$  y  $G = \mathbf{R}$ .

## Problema 2

Considere la botella de Klein  $K$ , con estructura de  $\Delta$ -complejo dada por



Describa explícitamente el producto cup  $\cup : H^i(K; \mathbf{Z}) \times H^j(K; \mathbf{Z}) \rightarrow H^{i+j}(K; \mathbf{Z})$  para todos  $i, j \in \mathbf{N}$ .

*Indicación:* Recuerde que  $\text{Hom}_{\mathbf{Z}}(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}, \mathbf{Z}) = 0$ .

**Bonus (10 puntos):** Determine el anillo de cohomología  $H^*(K; \mathbf{F}_2)$ .

## Problema 3

Sea  $X = \mathbf{S}^1 \times \mathbf{S}^1$  el toro real 2-dimensional y sea  $Y = \mathbf{S}^2 \vee \mathbf{S}^1 \vee \mathbf{S}^1$ . Pruebe que  $X$  e  $Y$  tienen los mismos grupos de cohomología con coeficientes en  $\mathbf{Z}$ , pero **distintos** anillos de cohomología con coeficientes en  $\mathbf{Z}$ .

## Problema 4

Calcule todos los grupos de cohomología  $H^i(\mathbf{P}^1(\mathbf{C}) \times \mathbf{P}^1(\mathbf{C}); \mathbf{Z})$  de la variedad 4-dimensional  $\mathbf{P}^1(\mathbf{C}) \times \mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ .

*Indicación:* Puede usar directamente los cálculos de homología de CW-complejos de la Ayudantía 10.

<sup>1</sup>Factor de retraso: 0.7 por 1 día de retraso, 0.55 por 2 días de retraso, 0.01 por 3 días de retraso.