Tarea 4 – Topología

Profesor: Pedro Montero, Ayudante: Sebastián Fuentes

Departamento de Matemática, Universidad Técnica Federico Santa María

Fecha de entrega:[1] Hasta el Viernes 17 de Mayo de 2024 a las 23h59.

Esta Tarea debe ser realizada **individualmente**.

Problema 1 (30 puntos)

Sea X un espacio de Hausdorff y sea G un grupo actuando en X por homeomorfismos[2] de manera **libre** (i.e., si $g \in G$ cumple $g \cdot x = x$ para algún $x \in X$, entonces $g = e$) y **propiamente discontinua** (i.e., para todo $x \in X$ existe un abierto $x \in U \subseteq X$ tal que el conjunto $\{g \in G,\ g(U) \cap U \neq \emptyset\}$ es finito).

1. Pruebe que el mapeo cociente $p : X \twoheadrightarrow X/G,\ x \mapsto [x] = \{g \cdot x,\ g \in G\}$ es un revestimiento.
2. Deducir que si X es símplemente conexo y localmente conexo por caminos, entonces $\pi_1(X/G, [x]) \cong G$.
3. Considere $\mathbf{S}^3 \cong \{(z_1, z_2) \in \mathbf{C}^2,\ |z_1|^2 + |z_2|^2 = 1\}$ la 3-esfera. Sean $n, m \in \mathbf{N}^{\geq 1}$ primos entre si, y sea[3] $X(n,m) := \mathbf{S}^3/\sim$ donde $(z_1, z_2) \sim (e^{2\pi i/n} \cdot z_1, e^{2\pi i m/n} \cdot z_2)$. Determine el grupo fundamental de $X(n,m)$.

Problema 2 (40 puntos)

El objetivo de este problema es calcular el grupo fundamental de $\mathrm{SL}_3(\mathbf{R}) = \{A \in \mathrm{GL}_3(\mathbf{R}),\ \det(A) = 1\}$. Para ello, considere los siguientes pasos:

1. Pruebe que el proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt, que permite escribir una matriz $A \in \mathrm{GL}_3(\mathbf{R})$ de manera única como producto $A = QR$ con $Q \in \mathrm{O}_3(\mathbf{R})$ y con R una matriz triangular superior con coeficientes positivos en la diagonal, define un retracto de deformación $r : \mathrm{SL}_3(\mathbf{R}) \to \mathrm{SO}_3(\mathbf{R})$.
2. Sea $V \subseteq M_2(\mathbf{C})$ el $\mathbf{R}$-subespacio vectorial de matrices anti-hermitianas (i.e., tales que $A^* = -A$) de traza nula, y consideramos el isomorfismo de $\mathbf{R}$-espacios vectoriales
$$\mathbf{R}^3 \xrightarrow{\sim} V,\ (x,y,z) \mapsto \begin{pmatrix} ix & y+iz \\ -y+iz & -ix \end{pmatrix}.$$
Si dotamos a V del producto escalar inducido por el producto escalar usual de $\mathbf{R}^3$, vía el isomorfismo anterior, pruebe que $\mathrm{SU}_2(\mathbf{C}) \times V \to V,\ (g,h) \mapsto ghg^{-1}$ define una acción de $\mathrm{SU}_2(\mathbf{C})$ que preserva el producto escalar. Deducir que existe un morfismo de grupos continuo $p : \mathrm{SU}_2(\mathbf{C}) \to \mathrm{SO}_3(\mathbf{R})$.
3. Probar que $\ker(p) = \{\pm \mathrm{Id}_2\}$, y deducir que p es un revestimiento de grado 2.
4. Pruebe que el grupo[4] $\mathrm{SU}_2(\mathbf{C}) = \{A \in \mathrm{GL}_2(\mathbf{C}),\ A^*A = \mathrm{Id}_2 \text{ y } \det(A) = 1\}$ es homeomorfo a la esfera unitaria $\mathbf{S}^3 \subseteq \mathbf{R}^4$, y utilizar los resultados anteriores para probar que $\pi_1(\mathrm{SL}_3(\mathbf{R}), \mathrm{Id}_3) \cong \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$.

Problema 3 (30 puntos)

Sea X el espacio topológico obtenido como la unión de la esfera unitaria $\mathbf{S}^2 \subseteq \mathbf{R}^3$ con el segmento de recta que une dos puntos antipodales (por el interior del cascarón de la esfera). Calcule, usando el Teorema de Seifert-van Kampen, el grupo fundamental de X.

[1] Factor de retraso: 0.7 por 1 día de retraso, 0.55 por 2 días de retraso, 0.01 por 3 días de retraso.
[2] i.e., cada $\Phi_g : X \xrightarrow{\sim} X,\ x \mapsto g \cdot x$ es un homeomorfismo.
[3] El espacio $X(n,m)$ es conocido como espacio lenticular (o *lens space*).
[4] Aquí, si $A = (a_{ij})$ entonces $A^* = (\overline{a_{ji}})$ es la matriz transpuesta conjugada de A.

Bonus (15 puntos)

Sean (X, x_0) e (Y, y_0) espacios topológicos basados conexos por caminos, localmente conexos por caminos y semi-localmente símplemente conexos, y sea $p : (\widetilde{X}, \tilde{x}_0) \to (X, x_0)$ un revestimiento universal basado. Pruebe que para todo mapeo basado $f : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ existe un revestimiento universal basado $q : (\widetilde{Y}, \tilde{y}_0) \to (Y, y_0)$ y un mapeo basado $\tilde{f} : (\widetilde{X}, \tilde{x}_0) \to (\widetilde{Y}, \tilde{y}_0)$ tal que el diagrama siguiente es conmutativo

$$\begin{tikzcd}
(\widetilde{X}, \tilde{x}_0) \arrow[r, "\tilde{f}"] \arrow[d, "p"'] & (\widetilde{Y}, \tilde{y}_0) \arrow[d, "q"] \\
(X, x_0) \arrow[r, "f"] & (Y, y_0)
\end{tikzcd}$$