Tarea 3 – Topología

Profesor: Pedro Montero, Ayudante: Sebastián Fuentes

Departamento de Matemática, Universidad Técnica Federico Santa María

Fecha de entrega:[1] Hasta el Jueves 2 de Mayo de 2024 a las 23h59.

Esta Tarea debe ser realizada **individualmente**.

Problema 1

Sea $\mathbf{D}^2 = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2,\ x^2+y^2 \leq 1\} \subseteq \mathbf{R}^2$ el disco unitario cerrado en el plano real, dotado de la topología usual. Sea X un espacio topológico y sea $p : \mathbf{D}^2 \to X$ un revestimiento. Pruebe que p es un homeomorfismo.

Indicación: Puede ser útil probar el lema general siguiente (cf. A. Hatcher, Algebraic Topology*, páginas 68–70):*

> **Lema auxiliar:** Sea $p : \widetilde{X} \to X$ un revestimiento, donde $\widetilde{X}$ (y luego X) es conexo por caminos y localmente conexo por caminos. Un **automorfismo** (o **transformación deck**) **de** p es un homeomorfismo $f : \widetilde{X} \to \widetilde{X}$ tal que $p \circ f = p$, i.e., el diagrama siguiente es conmutativo
>
> $$\begin{tikzcd} \widetilde{X} \arrow[rr, "f", "\sim"'] \arrow[dr, "p"'] & & \widetilde{X} \arrow[dl, "p"] \\ & X & \end{tikzcd}$$
>
> En particular, para $x_0 \in X$ fijo la función f induce una biyección $f|_{p^{-1}(x_0)} : p^{-1}(x_0) \xrightarrow{\sim} p^{-1}(x_0)$. Probar que si $p : \widetilde{X} \to X$ es un revestimiento universal, entonces hay una isomorfismo de grupos $\pi_1(X,x_0) \cong \mathrm{Aut}(p) := \{f : \widetilde{X} \to \widetilde{X} \text{ automorfismo de } p\}$ para todo $x_0 \in X$. Deducir[2] que si $f \in \mathrm{Aut}(p)$ posee un punto fijo, entonces necesariamente $f = \mathrm{Id}_{\widetilde{X}}$.

Problema 2

Decimos que un espacios topológico X tiene la **propiedad del punto fijo** si toda función continua $f : X \to X$ posee un punto fijo, i.e., existe $x_0 \in X$ tal que $f(x_0) = x_0$. Sea X un espacio con la propiedad del punto fijo.

(a) Probar que si Y es un espacio topológico homeomorfo a X, entonces Y posee la propiedad del punto fijo.

(b) Sea $A \subseteq X$ un sub-espacio topológico tal que existe un retracto $r : X \to A$. Probar que A también posee la propiedad del punto fijo.

(c) Sea $\mathbf{R}^2$ el plano real con la topología usual y sea $X \subseteq \mathbf{R}^2$. En los siguientes casos, determine si X posee o no la propiedad del punto fijo: $X = \mathbf{R}^2$, $X = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2,\ x^2+y^2 < 1\}$, y $X = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2,\ |x|+|y| \leq 1\}$.

Problema 3

Sea $\mathbf{D}^2 = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2,\ x^2+y^2 \leq 1\} \subseteq \mathbf{R}^2$ el disco unitario cerrado en el plano real, dotado de la topología usual. Sea $f : \mathbf{D}^2 \to \mathbf{D}^2$ función continua tal que $f(x) = x$ para todo $x \in \partial\mathbf{D}^2 \cong \mathbf{S}^1$. Pruebe que f es sobreyectiva.

Problema 4

Sea (X, x_0) un espacio topológico basado conexo por caminos, localmente conexo por caminos y semi-localmente símplemente conexo, con la base de abiertos dada por

$$\mathscr{B} := \{U \subseteq X \text{ abierto conexo por caminos tal que } \mathrm{Im}(\pi_1(U,x) \to \pi_1(X,x)) \text{ es trivial para todo } x \in U\}.$$

Considere el conjunto $\widetilde{X} := \{\text{clases de homotopía de caminos } [\gamma] \text{ en } X \text{ partiendo en } x_0 \in X\}$, con la topología generada por los conjuntos de la forma

$$(\alpha, U) := \{[\beta] \in \widetilde{X},\ [\beta] = [\alpha \cdot \alpha'] \text{ con } \alpha' : I \to U \text{ camino partiendo en } \alpha(1)\},$$

donde $[\alpha] \in \widetilde{X}$ y $U \in \mathscr{B}$ es tal que $\alpha(1) \in U$. Pruebe que $\widetilde{X}$ es un espacio **conexo por caminos**.

---

[1] Factor de retraso: 0.7 por 1 día de retraso, 0.55 por 2 días de retraso, 0.01 por 3 días de retraso.

[2] e.g. usando el Lema de levantamiento de homotopías visto en la Ayudantía 4.