TAREA 2 – TOPOLOGÍA

PROFESOR: PEDRO MONTERO, AYUDANTE: SEBASTIÁN FUENTES

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA, UNIVERSIDAD TÉCNICA FEDERICO SANTA MARÍA

Fecha de entrega:[1] Hasta el LUNES 15 DE ABRIL DE 2024 A LAS 23H59.

Esta Tarea debe ser realizada **individualmente**.

Problema 1

Sea X un espacio topológico y sean $x_0, x_1, x_2 \in X$ tres puntos. Recordar que si $u : I \to X$ es un camino de x_0 a x_1 entonces definimos el **cambio de punto base** como el isomorfismo de grupos

$$u_\# : \pi_1(X, x_0) \xrightarrow{\sim} \pi_1(X, x_1),\ [\gamma] \mapsto [u^{-1} \cdot \gamma \cdot u].$$

Probar que:

1. Si $u' : I \to X$ es otro camino de x_0 a x_1 y $u \simeq u'$ son homotópicos como caminos de x_0 a x_1, entonces los isomorfismos $u_\# = u'_\#$ coinciden.
2. Si c_{x_0} es el lazo constante basado en x_0, entonces $(c_{x_0})_\# = \mathrm{Id}_{\pi_1(X,x_0)}$.
3. Si $v : I \to X$ es un camino de x_1 a x_2, entonces $(u \cdot v)_\# = v_\# \circ u_\#$.

Problema 2

Sea $\mathbb{S}^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1},\ \|x\|^2 = x_1^2 + \ldots + x_{n+1}^2 = 1\} \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ la esfera unitaria con la topología usual, y sea

$$f : \mathbb{S}^n \longrightarrow \mathbb{S}^n,\ x \longmapsto -x.$$

Pruebe que si n es **impar** entonces $f \simeq \mathrm{Id}_{\mathbb{S}^n}$.

Indicación: Si $n = 2m-1$ es impar, conviene pensar $\mathbb{S}^{2m-1} \cong \{z \in \mathbb{C}^m,\ \|z\|^2 = |z_1|^2 + \ldots + |z_m|^2 = 1\}$.

Problema 3

Sean $1 \leq m < n$ enteros positivos. Consideremos $\mathbb{S}^m$ como el subespacio de $\mathbb{S}^n$ dado por

$$\left\{(x_1, \ldots, x_{m+1}, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^{m+1},\ \sum_{i=1}^{m+1} x_i^2 = 1\right\}.$$

Pruebe que el complemento $\mathbb{S}^n \setminus \mathbb{S}^m$ es homotópicamente equivalente a $\mathbb{S}^{n-m-1}$.

Problema 4

Sea X un espacio topológico y sean $U, V \subseteq X$ dos abiertos conexos por caminos tales que $X = U \cup V$ y tales que $U \cap V \neq \emptyset$ es conexo por caminos. Sean $\iota_U : U \hookrightarrow X$ y $\iota_V : V \hookrightarrow X$ las inclusiones de dichos abiertos en X.

1. Sea $x_0 \in U \cap V$. Probar que el conjunto $\pi_1(\iota_U)(\pi_1(U, x_0)) \cup \pi_1(\iota_V)(\pi_1(V, x_0))$ genera al grupo $\pi_1(X, x_0)$.

   Indicación: Por compacidad de $I = [0,1]$, todo lazo $\gamma : I \to X$ basado en x_0 puede subdividirse en caminos completamente contenidos en U o en V.

2. Bajo las hipótesis del ítem (1), probar que si U y V son símplemente conexos entonces X es símplemente conexo.
3. Deducir que la esfera $\mathbb{S}^n$ es símplemente conexa para todo $n \geq 2$.

[1] Factor de retraso: 0.7 por 1 día de retraso, 0.55 por 2 días de retraso, 0.01 por 3 días de retraso.