Tarea 1 – Topología

Profesor: Pedro Montero, Ayudante: Sebastián Fuentes

Departamento de Matemática, Universidad Técnica Federico Santa María

Fecha de entrega:[1] Hasta el Domingo 31 de Marzo de 2024 a las 23h59.

Esta Tarea debe ser realizada **individualmente**.

Problema 1

Sea $(E, \|\cdot\|)$ un espacio vectorial real normado. Probar que:

1. Si $x_0 \in E$, entonces los conjuntos de la forma
$$V_{\varepsilon,\ell_1,\ldots,\ell_n}(x_0) := \{x \in E,\ |\ell_i(x) - \ell_i(x_0)| < \varepsilon\}$$
forman un sistema fundamental de vecindades de x_0 en E respecto a la topología débil, donde $\varepsilon > 0$, $n \in \mathbb{N}$ y $\ell_1, \ldots, \ell_n \in E^*$.

2. Los abiertos en la topología débil de E son todas las posibles uniones de intersecciones finitas de conjuntos de la forma $\ell^{-1}(I)$ donde $I \subseteq \mathbb{R}$ es un intervalo abierto y donde $\ell \in E^*$.

3. La topología fuerte de E es más fina que la topología débil.

Problema 2

Sea X un espacio topológico. Probar que las condiciones siguientes son equivalentes:

1. X es discreto.

2. La topología de X es la topología coherente definida por la familia de singletons[2] en X.

3. La biyección canónica $\coprod_{x\in X}\{x\} \to X$ es un homeomorfismo.

Problema 3

Sea X un espacio topológico y $\mathscr{R}$ una relación de equivalencia en X. Probar que:

1. Si $X/\mathscr{R}$ es Hausdorff, entonces $\mathscr{R} \subseteq X \times X$ es un cerrado.

2. Si X' es un espacio topológico de Hausdorff y si $f : X \to X'$ es una función continua tal que $[x] = [y]$ si y sólo si $f(x) = f(y)$ para todos $x, y \in X$, entonces $X/\mathscr{R}$ es de Hausdorff.

Problema 4

Sea X un espacio localmente compacto y sea ∞ un conjunto disjunto a X, y sea $\widehat{X} := X \cup \{\infty\}$.

1. Probar que la familia de subconjuntos de $\widehat{X}$ de la forma U, donde U es un abierto de X o bien de la forma $(X \setminus K) \cup \{\infty\}$, donde $K \subseteq X$ es un compacto, es una topología en $\widehat{X}$. El espacio topológico $\widehat{X}$, dotado de esta topología, se llama la **compactificación de Alexandrov** de X y decimos que ∞ es el **punto al infinito**.

2. Demostrar que la topología inducida en X por aquella de $\widehat{X}$ es la topología original de X.

3. Probar que $\widehat{X}$ es un espacio compacto.

4. Probar la unicidad de la compactificación de Alexandrov. Más precisamente, dado Y espacio topológico compacto y $\varphi : X \to Y$ un homeomorfismo sobre su imagen tal que $\varphi(X) = Y \setminus \{y\}$, probar que $\Phi : \widehat{X} \to Y$ dado por $x \mapsto \varphi(x)$ si $x \in X$ y por $\infty \mapsto y$, es un homeomorfismo.

5. Probar que la compactificación de Alexandrov es functorial para homeomorfismos. Más precisamente, probar que si Y es otro espacio localmente compacto y si $f : X \to Y$ es un homeomorfismo, entonces la función $\widehat{f} : \widehat{X} \to \widehat{Y}$ dada por $\widehat{f}|_X = f$ y por $\widehat{f}(\infty) = \infty$, es un homeomorfismo.

[1] Factor de retraso: 0.7 por 1 día de retraso, 0.55 por 2 días de retraso, 0.01 por 3 días de retraso.

[2] Notar que un singleton posee una y sólo una topología posible.