MAT250 : Topología

Referencias

1. Allen Hatcher, "Algebraic Topology"
2. Oscar Randall-Williams, "Algebraic Topology"
3. Haynes Miller, "Lectures on Algebraic Topology"

Parte I : Grupo fundamental y Revestimientos topológicos

§1. Motivación y Preliminares

La topología moderna (i.e., topología algebraica) busca construir "functores" desde la categoría de espacios topológicos a la categoría de grupos (o módulos sobre un anillo, etc): un functor covariante (resp. contravariante) es una regla $\mathcal{F}$ tal que:

1. A todo X esp. topológico asocia un grupo $\mathcal{F}(X)$.
2. A toda $f: X \to Y$ continua asocia $\mathcal{F}(f): \mathcal{F}(X) \to \mathcal{F}(Y)$ (resp. $\mathcal{F}(f): \mathcal{F}(Y) \to \mathcal{F}(X)$) morfismo de grupos tal que $\mathcal{F}(\mathrm{Id}_X) = \mathrm{Id}_{\mathcal{F}(X)}$ y $\mathcal{F}(f \circ g) = \mathcal{F}(f) \circ \mathcal{F}(g)$ (resp. $= \mathcal{F}(g) \circ \mathcal{F}(f)$).

En particular, si $f: X \xrightarrow{\simeq} Y$ homeo. entonces $\mathcal{F}(X) \cong \mathcal{F}(Y)$ son isomorfos.

Ejemplo: Sea $i \in \mathbb{N}$. Más adelante construiremos el functor covariante de "homología" $X \mapsto H_i(X, \mathbb{Z})$ y calcularemos para $S^n \overset{\text{def}}{=} \{x \in \mathbb{R}^{n+1}, \|x\| = 1\}$ que

$$H_i(S^n, \mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} & \text{si } 0 = i = n \\ \mathbb{Z} & \text{si } 0 = i < n \\ 0 & \text{si } 0 < i < n \\ \mathbb{Z} & \text{si } 0 < i = n \\ 0 & \text{si } i > n \end{cases}$$

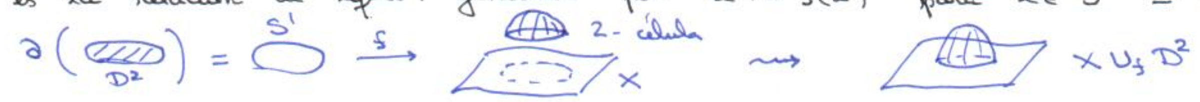
Esto implica que si $n \neq m$ entonces $\mathbb{R}^n$ no es homeomorfo a $\mathbb{R}^m$ (Brouwer, 1912): si $n \neq m$, entonces $H_m(S^n) \not\cong H_m(S^m)$ y luego S^n no es homeo. a S^m. Por otro lado, si $\mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^m$ entonces sus compactificaciones de Alexandroff, S^n y S^m, serían homeo ↯.

⚠ **Convención**: En todo el curso, una función continua será llamada "mapeo".

Lema del pegado: Sea $f: X \to Y$ función arbitraria entre esp. top y sean $F_1, F_2 \subseteq X$ cerrados tales que $F_1 \cup F_2 = X$. Entonces, f continua $\Leftrightarrow$ $f|_{F_1}$ y $f|_{F_2}$ son continuas.

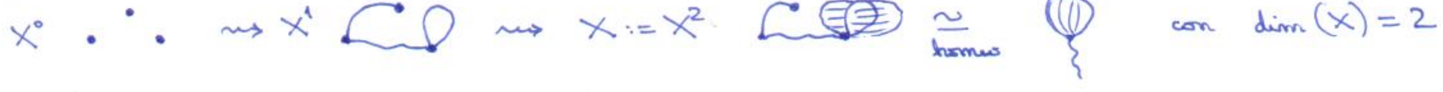
Dem: $(\Rightarrow)$ Por definición ✓ $(\Leftarrow)$ Veamos que $\forall\, C \subseteq Y$ cerrado se tiene $f^{-1}(C)$ cerrado: Como $f^{-1}(C) \cap F_i \overset{\text{def}}{=} (f|_{F_i})^{-1}(C)$, este último es cerrado en F_i ✓ (pues $f|_{F_i}$ continua) y luego es cerrado en X (pues $F_i \subseteq X$ cerrado). Así, $f^{-1}(C) \overset{\text{def}}{=} (f^{-1}(C) \cap F_1) \cup (f^{-1}(C) \cap F_2)$ cerrado ✓ ∎

Construcción: Dados X esp. top. y $f: S^{n-1} \to X$ continua, el espacio obtenido agregando una n-célula a X mediante f es el esp. top. cociente $X \cup_f D^n := (X \sqcup D^n)/\sim$, donde $\sim$ es la relación de equiv. generada por $x \sim f(x)$ para $x \in S^{n-1} \overset{\text{def}}{=} \partial D^n \subseteq D^n$.



Def: Un complejo celular (finito) es un esp. top. X obtenido mediante:

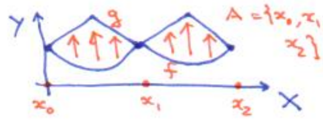
1. Un 0-esqueleto X^0 dado por un conj. finito con la topología discreta.
2. Dado el $(n-1)$-esqueleto X^{n-1}, se obtiene el n-esqueleto X^n agregando finitas n-células mediante mapas $\{f_\alpha : S^{n-1} \to X^{n-1}\}_{\alpha \in I}$, i.e., $X^n := \left(X^{n-1} \sqcup \bigsqcup_{\alpha \in I} D^n_\alpha\right)/\sim$ donde $x \in S^{n-1}_\alpha \subseteq D^n_\alpha \sim f_\alpha(x) \in X^{n-1}$.
3. El último paso $d \in \mathbb{N}$ define $X := X^d$, y definimos $\dim(X) := d$.



§2. Homotopía

⚠ **Convención**: En todo el curso, escribiremos $I := [0,1] \subseteq \mathbb{R}$ (con su topología usual).

Def: Sean $f, g: X \to Y$ mapeos. Una homotopía de f a g es un mapeo $H: X\times I \to Y$ tq $H(x,0) = f(x)$ y $H(x,1) = g(x)$; en tal caso escribimos $f \simeq_H g$ (o simplemente $f \simeq g$). Más aún, si $A \subseteq X$ subconj, decimos que H es una homotopía relativa a A si además $H(a,t) = f(a) = g(a)$ $\forall a \in A$ y $\forall t \in I$, y escribimos $f \simeq g$ rel A.



Prop: "Homotópicas rel. A" es una relación de equivalencia.

Dem: ① $f \simeq f$ rel A: Para $f: X \to Y$ consideramos $H: X \times I \to Y$, $(x,t) \mapsto f(x)$ $\forall t$, i.e., $H: X\times I \xrightarrow{pr_X} X \xrightarrow{f} Y$ composición de funciones continuas, y luego continua. Además, $H(x,0) \overset{def}{=} f(x) \overset{def}{=} H(x,1)$ y luego $f \simeq_H f$ rel A para cualquier $A \subseteq X$ subconj ✓

② $f \simeq_H g$ rel $A \Rightarrow g \simeq f$ rel A: sea $\widetilde{H}(x,t) = H(x, 1-t)$ mapeo tal que $\widetilde{H}(x,0) = H(x,1) \overset{def}{=} g(x)$, $\widetilde{H}(x,1) = H(x,0) \overset{def}{=} f(x)$ y $\widetilde{H}(a,t) = H(a,1-t) = f(a) = g(a)$ $\forall a \in A$ ✓

③ $f \simeq_H g$ rel A, $g \simeq_{H'} h$ rel $A \Rightarrow f \simeq h$ rel A: sea $H'': X \times I \to Y$ la función

$$H''(x,t) := \begin{cases} H(x,2t) & , 0 \le t \le 1/2 \\ H'(x, 2t-1) & , 1/2 \le t \le 1 \end{cases}$$

con $H(x, 2\cdot\frac{1}{2}) \overset{def}{=} g(x) \overset{def}{=} H'(x,0) = H'(x, 2\cdot\frac{1}{2} - 1)$.

Además, H'' es continua gracias al Lema del pegado ($H''|_{X\times[0,\frac{1}{2}]}$ y $H''|_{X\times[\frac{1}{2},1]}$ continuas) ✓ ■

Def: Un mapeo $f: X \to Y$ es una equivalencia homotópica si $\exists\, g: Y \to X$ mapeo tal que $g\circ f \simeq Id_X$ y $f \circ g \simeq Id_Y$; decimos que X es homotópicamente equiv. a Y, i.e., $X \simeq Y$.

Ejemplo: $S^1 \simeq \mathbb{R}^2\setminus\{0\}$ pues si $i: S^1 \hookrightarrow \mathbb{R}^2 \setminus\{0\}$ inclusión y $r: \mathbb{R}^2\setminus\{0\} \to S^1$, $x \mapsto \frac{x}{|x|}$ entonces $r \circ i \overset{def}{=} r|_{S^1} = Id_{S^1}$ y $i \circ r: \mathbb{R}^2\setminus\{0\} \to \mathbb{R}^2\setminus\{0\}$, $x \mapsto \frac{x}{|x|}$ verifica $i\circ r \simeq_H Id_{\mathbb{R}^2\setminus\{0\}}$ con $H: (\mathbb{R}^2\setminus\{0\}) \times I \to \mathbb{R}^2\setminus\{0\}$, $(x,t) \mapsto \frac{x}{t + (1-t)\cdot|x|}$.

Ejemplo: $\{0\} \simeq \mathbb{R}^n$ pues si $i: \{0\} \hookrightarrow \mathbb{R}^n$ inclusión y $r: \mathbb{R}^n \to \{0\}$, $x \mapsto 0$, entonces $r \circ i = Id_{\{0\}}$ y $i \circ r \simeq_H Id_{\mathbb{R}^n}$ con $H: \mathbb{R}^n \times I \to \mathbb{R}^n$, $(x,t) \mapsto tx$.

Terminología: X esp. top. es contractible si $X \simeq \{*\}$ homotópico a 1 punto (eg. $X = \mathbb{R}^n$)

Lema útil: Sean $f_0, f_1 : X \to Y$ con $f_0 \simeq_H f_1$ y $g_0, g_1: Y \to Z$ con $g_0 \simeq_G g_1$. Entonces, $g_0 \circ f_0 : X \to Z$ es homotópico a $g_1 \circ f_1 : X \to Z$.

Dem: $g_0 \circ f_0 \simeq_{H'} g_0 \circ f_1$ con $H' := g_0 \circ H$ y $g_1 \circ f_1 \simeq_{H''} g_0 \circ f_1$ con $H'' := G \circ (f_1 \times Id_I)$ ✓ ■

Caso particular: $T \xrightarrow{i} X \overset{f}{\underset{g}{\rightrightarrows}} Y \xrightarrow{h} Z \overset{f\simeq g}{\Longrightarrow} h\circ f \simeq h \circ g$ y $f \circ i \simeq g \circ i$.

Teorema: La equivalencia homotópica es una relación de equivalencia:
① $X \simeq X$ para todo esp. top. X.
② $X \simeq Y \Rightarrow Y \simeq X$.
③ $X \simeq Y$, $Y \simeq Z \Rightarrow X \simeq Z$.

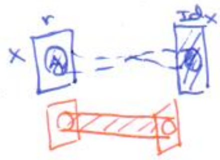
Dem: Para ①, considerar $f = g = Id_X$ ✓. Para ②, si $f: X \to Y$ y $g: Y \to X$ con $f \circ g \simeq Id_Y$, $g \circ f \simeq Id_X$, entonces $g: Y \to X$ es equiv. homotópica ✓ Para ③, consideramos mapas

$X \underset{g}{\overset{f}{\rightleftarrows}} Y \underset{g'}{\overset{f'}{\rightleftarrows}} Z$ con $f\circ g \simeq Id_Y$, $g \circ f \simeq Id_X$, y con $f' \circ g' \simeq Id_Z$, $g' \circ f' \simeq Id_Y$

$\Rightarrow (g \circ g') \circ (f' \circ f) = g \circ (g' \circ f') \circ f \simeq g \circ Id_Y \circ f = g \circ f \simeq Id_X$ y $(f' \circ f) \circ (g \circ g') \simeq Id_Z$ ✓ ■

⚠ Muchas de las construcciones en Topología Algebraica permiten diferenciar espacios top. "módulo homotopía".

Def: Sea X esp. top. y $A \overset{i}{\hookrightarrow} X$ subesp. Decimos que un mapeo $r : X \to A$ es:
① Un retracto de X a A si $r|_A = Id_A$.
② Un retracto de deformación de X a A si $r|_A = Id_A$ y $i \circ r \simeq Id_X$.
③ Un retracto fuerte de X a A si $r|_A = Id_A$ y $i \circ r \simeq Id_X$ rel A.



Obs: ① Todo retracto de deformación define una equivalencia homotópica $A \simeq X$.
② Un retracto arbitrario no es una equiv. homotópica! Eg. $A = \{x_0\} \overset{i}{\hookrightarrow} X$, y $r : X \to \{x_0\}$
Aquí, i es equiv. homotópica $\iff$ X es contractible.

§3. Caminos y Lazos

Consideramos X espacio topológico fijo.

Def: Sean $x_0, x_1 \in X$. Un camino de x_0 a x_1 es un mapeo $\gamma : I \to X$ tq $\gamma(0) = x_0$ y $\gamma(1) = x_1$. Si $x_0 = x_1$, decimos que γ es un lazo basado (o con punto base) en x_0.

Construcción: Sea γ camino de x_0 a x_1, y sea γ' camino de x_1 a x_2. Se define el producto (o concatenación) de γ con γ' como el camino de x_0 a x_2 dado por

$$(\gamma \cdot \gamma')(t) := \begin{cases} \gamma(2t), & 0 \le t \le 1/2 \\ \gamma'(2t-1), & \frac{1}{2} \le t \le 1 \end{cases}$$

⚠ El producto $\gamma \cdot \gamma'$ se "dibuja" de izquierda a derecha!

Se define el camino inverso γ^{-1} de x_1 a x_0 como $\gamma^{-1}(t) := \gamma(1-t)$.
Se define el lazo constante c_{x_0} en x_0 como $c_{x_0}(t) := x_0 \ \forall t \in I$.
Obs importante: Las construcciones anteriores implican que hay una rel. de equiv. en X dada por

$$x \sim y \overset{\text{df}}{\iff} \exists \text{ un camino en } X \text{ desde } x \text{ a } y.$$

Def: Las clases de equiv. de $\sim$ son llamadas componentes conexas por caminos y el conjunto (cociente) de dichas clases se denota $\pi_0(X)$. Decimos que X es conexo por caminos si hay sólo una comp. conexa por caminos.

Prop: Todo mapeo $f : X \to Y$ induce una función $\pi_0(f) : \pi_0(X) \to \pi_0(Y)$, $[x] \mapsto [f(x)]$ que verifica: ① Si $f \simeq_H g$, entonces $\pi_0(f) = \pi_0(g)$.
② Para mapeos $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{h} Z$ se tiene $\pi_0(h \circ f) = \pi_0(h) \circ \pi_0(f)$
③ $\pi_0(Id_X) = Id_{\pi_0(X)}$
ie, "$\pi_0 : Top \to Conj$ es un functor covariante".

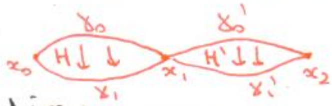
Dem: $\pi_0(f)$ está bien definida pues si $[x] = [x'] \in \pi_0(X)$ entonces $\exists \gamma : I \to X$ camino de x a x', y luego $f \circ \gamma : I \to Y$ es un camino de $f(x)$ a $f(x')$, ie, $[f(x)] = [f(x')]$ en $\pi_0(Y)$. Como ② y ③ son verificados por df, basta probar ①: Para $x \in X$ fijo, $H(x, \cdot) : I \to Y$ es un camino de $f(x)$ a $g(x)$ y luego $[f(x)] = [g(x)] \in \pi_0(Y)$ ∎

Corolario: Si $f : X \xrightarrow{\simeq} Y$ equiv. homotópica, $\pi_0(f) : \pi_0(X) \xrightarrow{1:1} \pi_0(Y)$ es una biyección.
Dem: Por functorialidad, $f \circ g \simeq Id_Y$ y $g \circ f \simeq Id_X \Rightarrow \pi_0(f) \circ \pi_0(g) = Id_{\pi_0(Y)}$, $\pi_0(g) \circ \pi_0(f) = Id_{\pi_0(X)}$ ∎

Ejemplos: ① Sea $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ conjunto finito discreto con $n \geq 2$, entonces X no es contractible (ie, $X \not\simeq \{*\}$): Todo camino $\gamma : I \to X$ es constante y luego $\pi_0(X) \cong X$ tiene cardinal $n \geq 2$, mientras que $\pi_0(\{*\}) \cong \{*\}$ tiene cardinal 1.
② Sea $A = \{x_1, \dots, x_n\} \overset{i}{\hookrightarrow} \mathbb{R}^m$ conj. finito de puntos, con $n \geq 2$, entonces $\nexists\, r : \mathbb{R}^m \to A$ retracto: sino $r \circ i = Id_A$ implica una factorización $Id_{\pi_0(A)} : \pi_0(A) \cong A \xrightarrow{\pi_0(i)} \pi_0(\mathbb{R}^m) \simeq \{*\} \xrightarrow{\pi_0(r)} \pi_0(A) \cong A$ pero $\pi_0(i) : A \to \{*\}$ no puede ser inyectiva!

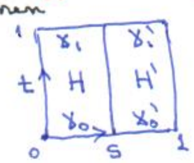
Def: Dos caminos $\gamma, \gamma' : I \to X$ desde x_0 a x_1 son <u>homotópicos</u> (como caminos) si son homotópicos relativos a $A = \{0,1\} \subseteq I$ (i.e., $\gamma(0) = \gamma'(0) = x_0$ y $\gamma(1) = \gamma'(1) = x_1$ están fijos durante la homotopía), y escribimos $\gamma \simeq \gamma'$.

<u>Lema del producto</u>: Si $\gamma_0 \underset{H}{\simeq} \gamma_1$ son caminos de x_0 a x_1 y $\gamma_0' \underset{H'}{\simeq} \gamma_1'$ son caminos de x_1 a x_2, entonces $\gamma_0 \cdot \gamma_0' \simeq \gamma_1 \cdot \gamma_1'$ son caminos homotópicos de x_0 a x_2.



<u>Dem</u>: Como $H(1,t) = x_1 = H'(0,t)$ $\forall t \in I$, dichas homotopías definen

$$H'' : I \times I \to X, \quad (s,t) \mapsto \begin{cases} H(2s,t), & 0 \le s \le \frac{1}{2} \\ H'(2s-1,t), & \frac{1}{2} \le s \le 1 \end{cases}$$



función continua (Lema del pegado). Así:

$H''(\cdot,0) \overset{df}{=} (\gamma_0 \cdot \gamma_0')(\cdot)$, $H''(\cdot,1) \overset{df}{=} (\gamma_1 \cdot \gamma_1')(\cdot)$, $H''(0,t) \overset{df}{=} x_0$, $H''(1,t) \overset{df}{=} x_1$ ∎

De manera completamente análoga (Ejercicio) se prueba:

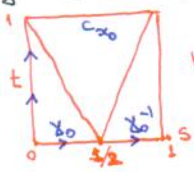
<u>Prop</u>: Sea $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2 : I \to X$ caminos de x_0 a x_1, x_1 a x_2 y x_2 a x_3, resp. Entonces:

① $(\gamma_0 \cdot \gamma_1) \cdot \gamma_2 \simeq \gamma_0 \cdot (\gamma_1 \cdot \gamma_2)$ de x_0 a x_3.

② $\gamma_0 \cdot c_{x_1} \simeq \gamma_0 \simeq c_{x_0} \cdot \gamma_0$ de x_0 a x_1.

③ $\gamma_0 \cdot \gamma_0^{-1} \simeq c_{x_0}$ de x_0 a x_0 y $\gamma_0^{-1} \cdot \gamma_0 \simeq c_{x_1}$ de x_1 a x_1.

Eg.



$$H(s,t) = \begin{cases} \gamma_0(2s), & s \in \left[0, \frac{1-t}{2}\right] \\ \gamma_0(1-t), & s \in \left[\frac{1-t}{2}, \frac{1+t}{2}\right] \\ \gamma_0(2-2s), & s \in \left[\frac{1+t}{2}, 1\right] \end{cases}$$

§4. <u>Grupo fundamental</u>

<u>Terminología</u>: En todo lo que sigue, un <u>espacio basado</u> es (X, x_0) donde X esp. top. y donde $x_0 \in X$ (punto base). Un mapeo de espacios basados $f : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ es un mapeo $f : X \to Y$ tal que $f(x_0) = y_0$. Además, diremos que una homotopía relativa a $A := \{x_0\} \subseteq X$ es una <u>homotopía basada en x_0</u>. Por §3, tenemos:

<u>Teorema/Def</u>: Sea (X, x_0) un espacio basado, y sea $\pi_1(X, x_0)$ el conjunto de clases de equiv. homotópicas $[\gamma]$ de lazos $\gamma : I \to X$ basados en x_0. Entonces, el producto $[\gamma] \cdot [\gamma'] := [\gamma \cdot \gamma']$ y $e := [c_{x_0}]$ dotan a $\pi_1(X, x_0)$ de estructura de grupo, llamado <u>grupo fundamental</u> de (X, x_0)

Veamos que $\pi_1 : (\mathrm{Top}, *) \to \mathrm{Grupos}$ define un functor covariante:

<u>Prop</u>: Todo mapeo basado $f : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ induce una función $\pi_1(f) : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, y_0)$ dada por $[\gamma] \mapsto [f \circ \gamma]$ tal que:

① $\pi_1(f)$ es un morfismo de grupos.

② Si $f \simeq g$ mapeos homotópicos basados en $x_0 \in X$, entonces $\pi_1(f) = \pi_1(g)$.

③ Para mapeos basados $(X, x_0) \xrightarrow{f} (Y, y_0) \xrightarrow{h} (Z, z_0)$ se tiene $\pi_1(h \circ f) = \pi_1(h) \circ \pi_1(f)$.

④ $\pi_1(\mathrm{Id}_X) = \mathrm{Id}_{\pi_1(X, x_0)}$.

<u>Dem</u>: Como $\gamma \simeq \gamma'$ como caminos implica $f \circ \gamma \simeq f \circ \gamma'$, $\pi_1(f)$ está bien definida. Para ① notamos que $f \circ c_{x_0} \overset{df}{=} c_{y_0}$ y $f \circ (\gamma \cdot \gamma') \overset{df}{=} (f \circ \gamma) \cdot (f \circ \gamma')$ ✓ Para ②, notamos que como $\gamma(0) = \gamma(1) = x_0$ entonces $f \simeq g$ rel $\{x_0\}$ implica $f \circ \gamma \simeq g \circ \gamma$ rel $\{0,1\}$ ✓ ③ y ④ por def ✓ ∎

<u>Notación</u>: Sea $u : I \to X$ un camino de x_0 a x_1. Entonces, definimos el <u>cambio de punto base</u> inducido por u mediante el isomorfismo de grupos

$$u_\# : \pi_1(X, x_0) \xrightarrow{\sim} \pi_1(X, x_1), \quad [\gamma] \mapsto [u^{-1} \cdot \gamma \cdot u]$$

con inversa $u_\#^{-1} \overset{df}{=} (u^{-1})_\#$.

Usando los resultados de §3, notamos que el cambio de punto base verifica que:

Prop: Sea $u: I \to X$ un camino de x_0 a x_1. Entonces, $u_\#$ cumple:

1. Si $u \simeq u'$ como caminos de x_0 a x_1, entonces $u_\# = u'_\#$.
2. $(c_{x_0})_\# = Id_{\pi_1(X,x_0)}$
3. Si $v: I \to X$ camino de x_1 a x_2, entonces $(u\cdot v)_\# = v_\# \circ u_\#$ (ie, $(\cdot)_\#$ contravariante)
4. Si $x_0 = x_1$ entonces $u_\#$ es el automorfismo de $\pi_1(X,x_0)$ dado por conjugación por $[u]\in\pi_1(X,x_0)$.
5. Sea $f: X \to Y$ mapeo y sean $y_0 := f(x_0)$, $y_1 := f(x_1)$ entonces hay un diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} \pi_1(X,x_0) \arrow[r, "\pi_1(f)"] \arrow[d, "\cong"', "u_\#"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & \pi_1(Y,y_0) \arrow[d, "\cong"', "(f\circ u)_\#"] \\ \pi_1(X,x_1) \arrow[r, "\pi_1(f)"] & \pi_1(Y,y_1) \end{tikzcd}$$

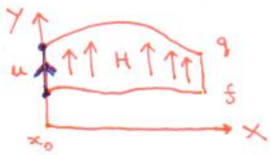
, ie, $(f\circ u)_\# \circ \pi_1(f) = \pi_1(f)\circ u_\#$.

Dem: 1 - 4 quedan como Ejercicio. Para 5, notamos que si $[\gamma]\in\pi_1(X,x_0)$ entonces tenemos

$$((f\circ u)_\# \circ \pi_1(f))([\gamma]) \overset{def}{=} (f\circ u)_\#([f\circ\gamma]) \overset{def}{=} [(f\circ u)^{-1}\cdot(f\circ\gamma)\cdot(f\circ u)] \overset{def}{=} [f\circ(u^{-1}\cdot\gamma\cdot u)] \overset{def}{=} \pi_1(f)(u_\#([\gamma]))$$ ■

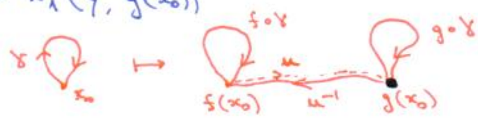
⚠ Los grupos $\pi_1(X,x_0)\cong\pi_1(X,x_1)$ no son canónicamente isomorfos (hay que elegir u).

Construcción: Sea $H: X\times I \to Y$ una homotopía de $f: X\to Y$ a $g: X\to Y$ y sea $x_0\in X$ un punto base. Entonces, $u := H(x_0,\cdot): I \to Y$ es un camino de $f(x_0)$ a $g(x_0)$ en Y.



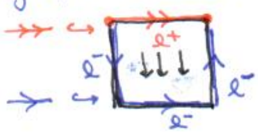
y hay un diagrama natural

$$\begin{tikzcd} & \pi_1(Y,f(x_0)) \arrow[d, "\cong"', "u_\#"] \\ \pi_1(X,x_0) \arrow[ur, "\pi_1(f)"] \arrow[r, "\pi_1(g)"] & \pi_1(Y,g(x_0)) \end{tikzcd} \quad (\bigstar)$$



Lema: El diagrama $(\bigstar)$ es conmutativo, ie, $u_\#\circ\pi_1(f) = \pi_1(g)$.

Dem: Sea $\gamma: I\to X$ un lazo basado en x_0 y sea $F: I\times I \xrightarrow{\gamma\times Id_I} X\times I \xrightarrow{H} Y$ composición.
Sea $\ell^+: I \to I\times I$, $s\mapsto(s,1)$ camino entre $(0,1)$ y $(1,1)$ y sea $\ell^-: I\to I\times I$ camino entre $(0,1)$ y $(1,1)$ obtenido al concatenar $s\mapsto(0,1-s)$, $s\mapsto(s,0)$ y $s\mapsto(1,s)$:



Consideremos $L: I\times I\to I\times I$, $(s,t)\mapsto t\cdot\ell^-(s)+(1-t)\,\ell^+(s)$ homotopía entre ℓ^+ y ℓ^- como caminos entre $(0,1)$ y $(1,1)$.

$\Rightarrow F\circ\ell^+ \simeq F\circ\ell^-$ como caminos entre $F(0,1)\overset{def}{=}H(x_0,1)\overset{def}{=}g(x_0)$ y $F(1,1)\overset{def}{=}H(x_0,1) = g(x_0)$.

Basta entonces observar que $[F\circ\ell^+]\underset{t=1}{\overset{def}{=}}[g\circ\gamma]$ y $[F\circ\ell^-]\underset{\boxed{Ejer}}{\overset{def}{=}}[u^{-1}\cdot\underset{t=0}{(f\circ\gamma)}\cdot u]$ ■

Teorema: Sea $f: X\xrightarrow{\simeq} Y$ equivalencia homotópica y sea $x_0\in X$. Entonces,
$\pi_1(f): \pi_1(X,x_0)\xrightarrow{\simeq}\pi_1(Y,f(x_0))$, $[\gamma]\mapsto[f\circ\gamma]$ es un isomorfismo.

Dem: Sea $g: Y\to X$ con $f\circ g\simeq_H Id_Y$ y $g\circ f\simeq_{H'} Id_X$. Consideramos $u': I\to X$ dado por $t\mapsto H'(x_0,1-t)$ con $u'(0)\overset{def}{=}x_0$ y $u'(1)\overset{def}{=}(g\circ f)(x_0)$. $\overset{Lema}{\Rightarrow} u'_\#\circ\pi_1(Id_X) = \pi_1(g\circ f) = \pi_1(g)\circ\pi_1(f)$
y luego (como $u'_\#$ isomorfismo), $\pi_1(f)$ inyectiva y $\pi_1(g): \pi_1(Y,f(x_0))\twoheadrightarrow\pi_1(X,(g\circ f)(x_0))$ sobre.
Veamos que $\pi_1(g)$ inyectiva ($\Rightarrow \pi_1(f) = (\pi_1(g))^{-1}\circ u'_\#$ isom ✓): Consideramos $u: I\to Y$ dado por $t\mapsto H(f(x_0),1-t)$ con $u(0)\overset{def}{=}f(x_0)$ y $u(1)\overset{def}{=}(f\circ g)(f(x_0)) =: y_1$.
$\overset{Lema}{\Rightarrow} u_\#\circ\pi_1(Id_Y) = \pi_1(f\circ g) = \pi_1(f)\circ\pi_1(g)$ con $\pi_1(f): \pi_1(X,(g\circ f)(x_0))\to\pi_1(Y,y_1) \Rightarrow \pi_1(g)$ iny ■

Def: Un esp. top. X es simplemente conexo si $\pi_0(X)\cong\{*\}$ y si $\pi_1(X,x_0)\cong\{1\}$ $\forall x_0\in X$.

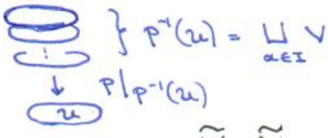
Ejemplo: Si X es contractible entonces X simplemente conexo (eg. $\pi_1(\mathbb{R}^n,x_0)\cong\{1\}$).

Lema útil: X simplemente conexo $\Leftrightarrow$ $\forall x_0,x_1\in X$ existe una única clase homotópica de $\gamma: x_0\rightsquigarrow x_1$

Dem: ($\Rightarrow$) Si $\gamma,\gamma': I\to X$ son caminos de x_0 a x_1 $\Rightarrow [\gamma^{-1}\cdot\gamma']\in\pi_1(X,x_0) = \{[c_{x_0}]\}$ y luego $\gamma^{-1}\cdot\gamma'\simeq c_{x_0}$, ie, $\gamma\simeq\gamma'$ ✓ ($\Leftarrow$) X es conexo por caminos por hipótesis. Además, si γ es un lazo en x_0 entonces (como c_{x_0} también lo es) $\gamma\simeq c_{x_0}$, ie, $\pi_1(X,x_0)\cong\{1\}$ ■

§5. Revestimientos topológicos

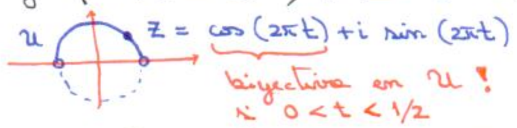
Def: Un *revestimiento* (o "covering") de un esp. top X es un mapeo $p:\tilde X\to X$ tal que $\forall x\in X$ existe $x\in\mathcal U$ vecindad abierta tal que $p^{-1}(\mathcal U)=\bigsqcup_{\alpha\in I}V_\alpha$ unión disjunta de abiertos $V_\alpha\subseteq\tilde X$ tales que $p|_{V_\alpha}:V_\alpha\xrightarrow{\sim}\mathcal U$ son homeomorfismos; decimos que dicho abierto $\mathcal U\subseteq X$ *trivializa* $p:\tilde X\to X$ en $x\in\mathcal U\subseteq X$.



Ejemplos: ① Todo homeo. es un revestimiento.

② Si $p:\tilde X\to X$, $q:\tilde Y\to Y$ revestimientos, entonces $p\times q:\tilde X\times\tilde Y\to X\times Y$ revestimiento.

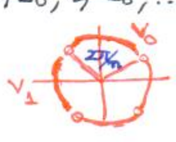
③ Sea $S^1\cong\{z\in\mathbb C, |z|=1\}\subseteq\mathbb C$ y $p:\mathbb R\to S^1$, $t\mapsto e^{2\pi i t}$. Consideremos el abierto $\mathcal U=\mathcal U_{y>0}:=\{x+iy\in S^1, y>0\}$:



$\Rightarrow p^{-1}(\mathcal U)=\bigsqcup_{j\in\mathbb Z}]j,j+\frac12[$ y $p|_{]j,j+\frac12[}:]j,j+\frac12[\to\mathcal U$ es continua biyectiva con inversa continua $\mathcal U\to]j,j+\frac12[$, $x+iy\mapsto j+\arccos(x)/2\pi$ ✓

El mismo cálculo en $\mathcal U_{y<0}$, $\mathcal U_{x<0}$ y $\mathcal U_{x<0}$ muestra que $p:\mathbb R\to S^1$ es un revestimiento.

④ Sea $S^1\cong\{z\in\mathbb C, |z|=1\}\subseteq\mathbb C$ y $p:S^1\to S^1$, $z\mapsto z^n$. Si $\xi:=e^{2\pi i/n}$ y para $y\in S^1$ fijamos $z_0\in S^1$ raíz n-ésima de y (ie, $z_0^n=y$) entonces $p^{-1}(y)=\{z_0,\xi z_0,\xi^2z_0,\dots,\xi^{n-1}z_0\}$.
Si $V_0:=\{z\in S^1, 0<\arg(z/z_0)<2\pi/n\}$, ie, "$\measuredangle z\in]\measuredangle z_0,\measuredangle \xi z_0[$"
y $V_i:=\xi^iV_0$ para $i\in\{0,1,\dots,n-1\}$ $\Rightarrow p^{-1}(S^1\setminus\{y\})=\bigsqcup_{i=0}^{n-1}V_i$ y además $p|_{V_i}:V_i\xrightarrow{\sim}S^1\setminus\{y\}$ es un homeomorfismo (dilata el sector circular), ie, p revestimiento.



⑤ Plano proyectivo real: En $S^2\subseteq\mathbb R^3$ consideramos la rel. de equiv. $\sim$ generada por $x\sim -x$ y $\mathbb P^2(\mathbb R):=S^2/\sim$. Veamos que el mapeo cociente $p:S^2\twoheadrightarrow\mathbb P^2(\mathbb R)$ es un revestimiento: sea $V:=\{(x,y,z)\in S^2, z\neq0\}$ y $\mathcal U:=p(V)$. Como $p^{-1}(\mathcal U)=V$ abierto, $\mathcal U\subseteq\mathbb P^2(\mathbb R)$ es abierto. Escribamos $V=V_{z<0}\sqcup V_{z>0}$ y construyamos una inversa de $f=p|_{V_{z>0}}:V_{z>0}\to\mathcal U$ (idem para $V_{z<0}$): Por definición de topología cociente de $\mathcal U=V/\sim$, una función continua $g:\mathcal U\to V_{z>0}$ es una función $\tilde g:V\to V_{z>0}$ continua y constante en las clases de equiv. Así, $\tilde g:V\to V_{z>0}$, $(x,y,z)\mapsto(x,y,z)$ si $z>0$ (resp. $(-x,-y,-z)$ si $z<0$) induce $g=f^{-1}$.

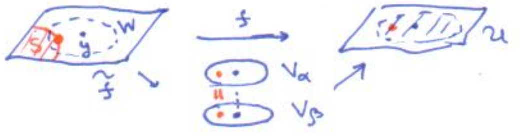
Def: Sea $p:\tilde X\to X$ un revestimiento y $f:Y\to X$ un mapeo. Un *levantamiento* de f resp. a p es un mapeo $\tilde f:Y\to\tilde X$ tal que $p\circ\tilde f=f$.

$$\begin{tikzcd} & \tilde X \arrow[d, "p"] \\ Y \arrow[ur, dashed, "\exists\tilde f"] \arrow[r, "f"] & X \end{tikzcd}$$

Lema: Sea $p:\tilde X\to X$ revestimiento y sean $\tilde f_0,\tilde f_1:Y\to\tilde X$ levantamientos de un mapeo $f:Y\to X$ resp. a p. Entonces, $S:=\{y\in Y, \tilde f_0(y)=\tilde f_1(y)\}$ es abierto y cerrado en Y. En part, si Y es conexo entonces $S=\emptyset$ o $S=Y$.

Dem: S abierto: Sea $y\in S$ y $\mathcal U\subseteq X$ abierto con $f(y)\in\mathcal U$ y con $p^{-1}(\mathcal U)=\bigsqcup_{\alpha\in I}V_\alpha$. Como $\tilde f_0(y)=\tilde f_1(y)$, pertenecen al mismo $V_\alpha\subseteq\tilde X$ abierto. Así, en $W:=\tilde f_0^{-1}(V_\alpha)\cap\tilde f_1^{-1}(V_\alpha)\subseteq Y$ tenemos $p|_{V_\alpha}\circ\tilde f_0|_W\overset{\text{def}}{=}f|_W\overset{\text{def}}{=}p|_{V_\alpha}\circ\tilde f_1|_W\xRightarrow[\text{homeo.}]{p|_{V_\alpha}}\tilde f_0=\tilde f_1$ en W, ie, $y\in W\subseteq S$ vecindad abierta ✓

S cerrado: Sea $y\in\bar S$ y sup. $y\notin S$, ie, $\tilde f_0(y)\neq\tilde f_1(y)$. Sea $\mathcal U\subseteq X$ abierto con $f(y)\in\mathcal U$ y con $p^{-1}(\mathcal U)=\bigsqcup_{\alpha\in I}V_\alpha$. Como $\tilde f_0(y)\neq\tilde f_1(y)$, $\tilde f_0(y)\in V_\alpha$ y $\tilde f_1(y)\in V_\beta$ con $\alpha\neq\beta$, y además $W:=\tilde f_0^{-1}(V_\alpha)\cap\tilde f_1^{-1}(V_\beta)\subseteq X$ es una vecindad abierta de $y\in\bar S$ que por ende cumple $W\cap S\neq\emptyset$.
$\Rightarrow V_\alpha\cap V_\beta\neq\emptyset$ por definición de S y pues $p|_{V_\alpha}:V_\alpha\xrightarrow{\sim}\mathcal U$, $p|_{V_\beta}:V_\beta\xrightarrow{\sim}\mathcal U$ son homeos ↯ ✓ ■

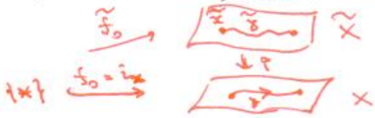


Lema técnico (Levantamiento de homotopías): Sea $p: \tilde{X} \to X$ revestimiento y sean $f_0, f_1: Y \to X$ mapeos. Entonces, para toda homotopía $H: Y \times I \to X$ de f_0 a f_1 y todo levantamiento $\tilde{f}_0$ de f_0 resp. a p, existe una única homotopía $\tilde{H}: Y \times I \to \tilde{X}$ tal que:
① $\tilde{H}(\cdot, 0) = \tilde{f}_0(\cdot)$, y
② $p \circ \tilde{H} = H$

Dem: Ver A. Hatcher página 30 (cf. O. Randal-Williams Lemma 3.1.9). ■

Al considerar $Y = \{*\}$ en el Lema anterior obtenemos:

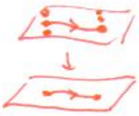
Corolario (Levantamiento de caminos): Sea $p: \tilde{X} \to X$ revestimiento, $\gamma: I \to X$ un camino y $\tilde{x}_0 \in \tilde{X}$ tal que $p(\tilde{x}_0) = \gamma(0)$. Entonces, existe un único camino $\tilde{\gamma}: I \to \tilde{X}$ tal que
① $\tilde{\gamma}(0) = \tilde{x}_0$, y
② $p \circ \tilde{\gamma} = \gamma$



Corolario: Sea $p: \tilde{X} \to X$ revestimiento y sean $\gamma_0, \gamma_1: I \to X$ caminos de x_0 a x_1 en X, y sean $\tilde{\gamma}_0, \tilde{\gamma}_1: I \to \tilde{X}$ los levantamientos a $\tilde{X}$ partiendo en $\tilde{x}_0 \in p^{-1}(x_0)$. Luego, si $\gamma_0 \underset{H}{\simeq} \gamma_1$ como caminos entonces $\tilde{\gamma}_0 \underset{\tilde{H}}{\simeq} \tilde{\gamma}_1$ como caminos. En part, $\tilde{\gamma}_0(1) = \tilde{\gamma}_1(1)$ es el mismo punto.

Dem: Sea $\tilde{H}: I \times I \to \tilde{X}$ el levantamiento de la homotopía H con $\tilde{H}(\cdot, 0) = \tilde{\gamma}_0(\cdot)$. Entonces:
① $\tilde{H}(\cdot, 1)$ es un levantamiento de γ_1 partiendo en $\tilde{x}_0$ y luego (unicidad!) es $\tilde{\gamma}_1$.
② $H(0, \cdot)$ y $H(1, \cdot)$ son caminos constantes y luego $\tilde{H}(0, \cdot)$ y $\tilde{H}(1, \cdot)$ también. ■

Prop: Sea X esp. top. conexo por caminos y $p: \tilde{X} \to X$ un revestimiento. Entonces, todas las fibras $p^{-1}(x)$, con $x \in X$, están en biyección. El cardinal $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ de las fibras es el grado del revestimiento y decimos que $p: \tilde{X} \xrightarrow{n:1} X$ es un "revestimiento n a 1".



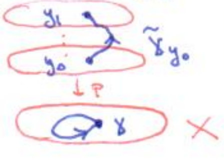
Dem: Sea $\gamma: I \to X$ camino de x_0 a x_1, y para $y_0 \in p^{-1}(x_0)$ sea $\tilde{\gamma}_{y_0}$ el único levantamiento de γ partiendo en $y_0 \in \tilde{X}$. Consideremos la función "punto final" dada por $\varphi_\gamma: p^{-1}(x_0) \longrightarrow p^{-1}(x_1)$, $y_0 \longmapsto \tilde{\gamma}_{y_0}(1)$. y similarmente $\varphi_{\gamma^{-1}}: p^{-1}(x_1) \to p^{-1}(x_0)$. Así, para $y_0 \in p^{-1}(x_0)$ tenemos $\varphi_{\gamma^{-1}}(\varphi_\gamma(y_0)) =$ punto final de $(\widetilde{\gamma^{-1}})_{z_0}$ con $z_0 = \tilde{\gamma}_{y_0}(1)$, ie, punto final de $(\widetilde{\gamma \cdot \gamma^{-1}})_{y_0} \underset{\text{corolario}}{=}$ punto final de $(\widetilde{c_{x_0}})_{y_0} \overset{\text{def}}{=} y_0$. Así, $\varphi_{\gamma^{-1}} \circ \varphi_\gamma = Id_{p^{-1}(x_0)}$ y similarmente $\varphi_\gamma \circ \varphi_{\gamma^{-1}} = Id_{p^{-1}(x_1)}$ ■

Ejemplo: La proyección $p: S^2 \twoheadrightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ es un revestimiento de grado 2.

Lema útil: Sea (X, x_0) espacio basado, $p: \tilde{X} \to X$ revestimiento y sea $\tilde{x}_0 \in p^{-1}(x_0)$. Entonces, el morfismo de grupos $\pi_1(p): \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0) \hookrightarrow \pi_1(X, x_0)$ es inyectivo.

Dem: Sea $\tilde{\gamma}: I \to \tilde{X}$ un lazo en $\tilde{x}_0$ tal que $\pi_1(p)([\tilde{\gamma}]) = [c_{x_0}]$, ie, $\gamma := p \circ \tilde{\gamma} \underset{H}{\simeq} c_{x_0}$. Sea $\tilde{H}$ el levantamiento de H partiendo de $\tilde{\gamma}$, entonces $\tilde{H}$ es una homotopía de $\tilde{\gamma}$ a un levantamiento de c_{x_0}, ie, a $c_{\tilde{x}_0}$ (unicidad!), ie, $[\tilde{\gamma}] = [c_{\tilde{x}_0}] \in \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$. ■

Construcción fundamental: Sea (X, x_0) espacio basado y $p: \tilde{X} \to X$ revestimiento. Dado un lazo $\gamma: I \to X$ en $x_0 \in X$, la función "punto final" $\varphi_\gamma: p^{-1}(x_0) \xrightarrow{\simeq} p^{-1}(x_0)$, $y_0 \mapsto \tilde{\gamma}_{y_0}(1)$ es una biyección y (por el Corolario anterior) sólo depende de la clase de homotopía de γ. Más aún, se verifica que si γ' es otro lazo en $x_0 \in X$ entonces $\varphi_{\gamma \cdot \gamma'} \overset{\text{def}}{=} \varphi_{\gamma'} \circ \varphi_\gamma$, ie, Hay una acción (derecha!) de $\pi_1(X, x_0)$ en $p^{-1}(x_0)$:



$\boxed{y_1 \overset{\text{def}}{=} \gamma \cdot y_0}$

Teorema: Sea X esp. top. conexo por caminos y sea $p : \tilde{X} \to X$ revestimiento. Para todo $x_0 \in X$:

① $\pi_1(X, x_0)$ actúa transitivamente en $p^{-1}(x_0) \iff \tilde{X}$ es conexo por caminos.

② El estabilizador de $y_0 \in p^{-1}(x_0)$ es $\mathrm{Im}\,(\pi_1(p) : \pi_1(\tilde{X}, y_0) \to \pi_1(X, x_0)) \leq \pi_1(X, x_0)$.

③ Si $\tilde{X}$ es conexo por caminos, hay una biyección $\pi_1(X, x_0)/\pi_1(p)(\pi_1(\tilde{X}, y_0)) \xrightarrow[\sim]{1:1} p^{-1}(x_0)$.

"acción por monodromía"

Dem: ① $(\Leftarrow)$: Sean $y_0, y_1 \in p^{-1}(x_0)$ y sea $\tilde{\gamma} : I \to \tilde{X}$ camino de y_0 a y_1 ($\tilde{X}$ conexo por caminos). Luego, $\gamma := p \circ \tilde{\gamma}$ es un lazo en $x_0 \in X$ y $\tilde{\gamma}$ es su levantamiento partiendo en y_0, y así $y_1 \overset{\text{def}}{=} [\gamma] \cdot y_0$ ✓ Para $(\Rightarrow)$: Si existieran $y_0, y_1 \in \tilde{X}$ en diferentes componentes por caminos, elegimos $\gamma : I \to X$ camino de $p(y_0)$ a $p(y_1)$ y un levantamiento $\tilde{\gamma}$ partiendo en y_0. Así, $\tilde{\gamma}$ es un camino en $\tilde{X}$ de y_0 a cierto $z_0 \in \tilde{X}$ donde $p(z_0) \overset{\text{def}}{=} p(y_1)$. Sin embargo, la acción de $\pi_1(X, x_0)$ en $p^{-1}(x_0)$, con $x_0 = p(z_0) = p(y_1)$, es transitiva y luego $\exists\, \tilde{\delta}$ camino entre y_1 y z_0 ↯

Para ②: Si $[\gamma] \cdot y_0 = y_0$ entonces el levantamiento $\tilde{\gamma}$ que comienza en y_0 también termina en y_0 i.e., $\tilde{\gamma}$ lazo en y_0 y $\gamma = p \circ \tilde{\gamma}$, i.e., $[\gamma] = \pi_1(p)([\tilde{\gamma}]) \in \mathrm{Im}\,(\pi_1(p) : \pi_1(\tilde{X}, y_0) \to \pi_1(X, x_0))$. Recíprocamente, si $[\tilde{\gamma}] \in \pi_1(\tilde{X}, y_0)$ entonces $\tilde{\gamma}$ es el único levantamiento de $\gamma := p \circ \tilde{\gamma}$ partiendo en y_0 y luego $[\gamma] \cdot y_0 \overset{\text{def}}{=} y_0$ (punto final de $\tilde{\gamma}$) ✓ ③ se deduce de la Teoría de grupos ✓ ■

Def: Un revestimiento $p : \tilde{X} \to X$ es un revestimiento universal si $\tilde{X}$ es simplemente conexo, i.e., $\pi_0(\tilde{X}) = \{*\}$ y $\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0) \cong \{1\}$.

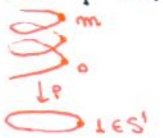
Corolario: Sea $p : \tilde{X} \to X$ un revestimiento universal, entonces cada $\tilde{x}_0 \in p^{-1}(x_0)$ determina una biyección $\ell : \pi_1(X, x_0) \xrightarrow{\sim} p^{-1}(x_0)$, $[\gamma] \mapsto [\gamma] \cdot \tilde{x}_0$

⚠ La biyección ℓ permite definir una estructura de grupo en $p^{-1}(x_0)$: si $y_0, y_1 \in p^{-1}(x_0)$ entonces $y_0 \cdot y_1 := \ell(\ell^{-1}(y_0) \cdot \ell^{-1}(y_1))$ se obtiene eligiendo un camino $\tilde{\gamma} : I \to \tilde{X}$ desde el punto $\tilde{x}_0$ (¡fijo!) a y_1 y considerando $\tilde{\eta}$ el levantamiento del lazo $p \circ \tilde{\gamma}$ en x_0 tal que $\tilde{\eta}$ parte en y_0, y así $\ell(\ell^{-1}(y_0) \cdot \ell^{-1}(y_1)) \overset{\text{def}}{=} \tilde{\eta}(1)$.

§6. Cálculo de $\pi_1(S^1, 1)$

Teorema: Sea $\gamma : I \to S^1$, $t \mapsto e^{2\pi i t}$ lazo en $1 \in S^1$. Entonces, $\pi_1(S^1, 1) \xrightarrow{\sim} (\mathbb{Z}, +)$, $[\gamma] \mapsto 1$ isomorf.

Dem: Sea $p : \mathbb{R} \to S^1$, $t \mapsto e^{2\pi i t}$ un revestimiento universal de S^1 (pues $\pi_1(\mathbb{R}, x_0) \cong \{1\}$), con $p^{-1}(1) = \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{R}$ y elijamos $\tilde{x}_0 := 0 \in \mathbb{Z}$ punto base para la biyección $\ell : \pi_1(S^1, 1) \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}$.



Para calcular $\ell^{-1}(m)$ elegimos un camino $\tilde{\gamma}_m : I \to \mathbb{R}$ de 0 a m (eg. $\tilde{\gamma}_m(t) = mt$) y luego $\ell^{-1}(m) = [p \circ \tilde{\gamma}_m]$ da m vueltas al rededor de 1. Así, tenemos que $\ell(\ell^{-1}(n) \cdot \ell^{-1}(m)) =$ final del levant. de $[p \circ \tilde{\gamma}_m]$ partiendo en n, i.e., final del camino $I \to \mathbb{R}$, $t \mapsto n + mt$, i.e., $n + m$ es la suma de enteros ■

Corolario: No existe $r : D^2 \to \partial D^2 = S^1$ retracto de D^2 a su borde.

Dem: En caso contrario, tenemos $r|_{S^1} = \mathrm{Id}_{S^1}$, i.e., $r \circ i = \mathrm{Id}_{S^1}$ con $i : S^1 \hookrightarrow D^2$ inclusión. Por functorialidad $\mathrm{Id}_{\pi_1(S^1,1)} : \pi_1(S^1, 1) \cong \mathbb{Z} \xrightarrow{\pi_1(i)} \pi_1(D^2, 1) \cong \{0\} \xrightarrow{\pi_1(r)} \pi_1(S^1, 1) \cong \mathbb{Z}$ ↯ ■

Teorema del punto fijo de Brouwer (1909): Todo mapeo $f : D^2 \to D^2$ tiene un punto fijo.

Dem: Si $f(x) \neq x$ $\forall x \in D^2$, definimos $r : D^2 \to S^1$, $x \mapsto$ (rayo de $f(x)$ a x) $\cap S^1$ que es continua pues f continua y que cumple $r(x) = x$ si $x \in \partial D^2 = S^1$ ↯ ■

⚠ Veremos que lo anterior es un caso particular del Teorema del punto fijo de Lefschetz, el cual requiere de grupos de homología, y fue probado por Solomon Lefschetz (1926).

§7. Revestimientos universales

En esta sección estudiaremos la existencia y unicidad de revestimientos universales. Sea X esp. topológico.

Observación: sea $x_0 \in X$ y sea $p: \widetilde{X} \to X$ un revestimiento universal. Sea $x_0 \in \mathcal{U} \subseteq X$ vecindad abierta que trivializa a p, i.e., $p^{-1}(\mathcal{U}) = \bigsqcup_{\alpha \in I} V_\alpha$ y $p|_{V_\alpha}: V_\alpha \xrightarrow{\sim} \mathcal{U}$ homeo. $\forall \alpha \in I$. Entonces: Para cada $\alpha \in I$, todo lazo en x_0 contenido en $\mathcal{U}$ (i.e. $\gamma: I \to \mathcal{U}$) se levanta a un lazo $\tilde{\gamma}_\alpha : I \to V_\alpha$ en $\tilde{x}_\alpha := V_\alpha \cap p^{-1}(x_0)$, i.e., $\pi_1(p): \pi_1(\widetilde{X}, \tilde{x}_\alpha) \hookrightarrow \pi_1(X, x_0)$ envía $[\tilde{\gamma}_\alpha]$ en $[\gamma]$. Como $\widetilde{X}$ simplemente conexo, $[\tilde{\gamma}_\alpha] = [c_{\tilde{x}_\alpha}]$ y luego $[\gamma] = [c_{x_0}]$. Esto motiva la sgte:

Def: Un esp. topológico X es semi-localmente simplemente conexo (slsc) si $\forall x \in X$ existe una vecindad abierta $x \in \mathcal{U}_x \subseteq X$ tal que todo lazo en x contenido en $\mathcal{U}_x$ es contractible en X.

Construcción: sea (X, x_0) espacio basado, sea $p: \widetilde{X} \to X$ un revestimiento universal, y sea $\tilde{x}_0 \in p^{-1}(x_0)$. Como $\pi_1(\widetilde{X}, \tilde{x}_0) \simeq \{1\}$, para todo $y \in \widetilde{X}$ existe una única clase $[\gamma_y]$ homotópica de caminos entre $\tilde{x}_0$ e y, y así $[p \circ \gamma_y]$ es una clase homotópica "canónica" de caminos de x_0 a $p(y)$: y es el punto final del levantamiento de $[p \circ \gamma_y]$ partiendo en $\tilde{x}_0$:

$$\widetilde{X} \xrightarrow[\sim]{1:1} \left\{ \begin{array}{l} \text{clases de homot. de caminos en } X \\ \text{partiendo en } x_0 \end{array} \right\}, \quad y \longmapsto [p \circ \gamma_y]$$

y luego podemos usar el lado derecho de la biyección para construir $\widetilde{X}$:

Teorema: Sea X espacio top. conexo por caminos, localmente conexo por caminos (i.e., $\forall x \in X$ y todo abierto $x \in \mathcal{U} \subseteq X$, $\exists x \in V$ abierto con $V \subseteq \mathcal{U}$ y $\pi_0(V) \cong \{*\}$), y semi-localmente simpl. conexo. Entonces, existe $p: \widetilde{X} \to X$ revestimiento con $\widetilde{X}$ simplemente conexo.

Idea de Dem (cf. A. Hatcher, Theorem 1.38, pág 67): Sea $x_0 \in X$ fijo en todo lo que sigue. Consideramos el conjunto $\widetilde{X} := \{$clases de homot. de caminos en X partiendo en $x_0\}$ y definimos $p: \widetilde{X} \to X$ por $p([\gamma]) := \gamma(1)$. Basta probar que $\widetilde{X}$ puede ser dotado de una topología tal que p es un revestimiento y tal que $\widetilde{X}$ sea simplemente conexo:

1° Considerar $\mathcal{B} := \{\mathcal{U} \subseteq X$ abierto conexo por caminos con $\mathrm{Im}(\pi_1(\mathcal{U}, x) \to \pi_1(X, x))$ trivial $\forall x \in \mathcal{U}\}$ que es una base para la top. de X pues es slsc y localmente conexo por caminos.

2° Si $x, y \in \mathcal{U} \in \mathcal{B}$, $\exists \gamma: I \to \mathcal{U}$ camino de x a y, y todos esos caminos son homot. en X. Luego, para $[\alpha] \in \widetilde{X}$ y $\mathcal{U} \in \mathcal{B}$ tal que $\alpha(1) \in \mathcal{U}$ podemos definir el conjunto

$(\alpha, \mathcal{U}) := \{[\beta] \in \widetilde{X},\ [\beta] = [\alpha \cdot \alpha']$ con $\alpha': I \to \mathcal{U}$ camino partiendo en $\alpha(1)\}$

y dichos conjuntos forman una base para una topología para $\widetilde{X}$.

3° p es continua pues si $\mathcal{U} \in \mathcal{B}$ y $[\alpha] \in p^{-1}(\mathcal{U})$ entonces $[\alpha] \in (\alpha, \mathcal{U}) \subseteq p^{-1}(\mathcal{U})$ con $\alpha' = c_{\alpha(1)}$.

4° $p|_{(\alpha,\mathcal{U})}: (\alpha, \mathcal{U}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{U}$ es un homeo: sobreyectivo pues $\pi_0(\mathcal{U}) = \{*\}$, inyectivo pues si $[\beta], [\beta'] \in (\alpha, \mathcal{U})$ tienen el mismo punto final entonces difieren por un lazo en $\mathcal{U}$ y luego $[\beta] = [\beta']$ pues $\mathrm{Im}(\pi_1(\mathcal{U}, x) \to \pi_1(X, x))$ trivial, y además $p((\beta, V)) \overset{\text{4}}{=} V$, i.e., p mapea abiertos ✓

5° $p^{-1}(\mathcal{U}) = \bigsqcup_{[\alpha] \text{ con } \alpha(1) \in \mathcal{U}} (\alpha, \mathcal{U})$: si $[\gamma] \in (\alpha, \mathcal{U}) \cap (\beta, \mathcal{U})$ entonces $[\gamma] = [\alpha \cdot \alpha'] = [\beta \cdot \beta']$ y luego $[\alpha] = [\beta \cdot \beta' \cdot (\alpha')^{-1}]$ con $\beta' \cdot (\alpha')^{-1}: I \to \mathcal{U}$ y así $[\alpha] \in (\beta, \mathcal{U})$. Así, $[\delta] = [\alpha \cdot \alpha''] \in (\alpha, \mathcal{U})$ se escribe como $[\delta] = [\beta \cdot \beta' \cdot (\alpha')^{-1} \cdot \alpha'']$ y luego $[\delta] \in (\beta, \mathcal{U})$ ✓ similar: $(\beta, \mathcal{U}) \subseteq (\alpha, \mathcal{U})$ ✓✓

6° Si $\tilde{x}_0 := [c_{x_0}] \in \widetilde{X}$, entonces $\pi_1(\widetilde{X}, \tilde{x}_0) \cong \{1\}$: si $\gamma: I \to X$ camino partiendo en x_0, su levantamiento $\tilde{\gamma}: I \to \widetilde{X}$ partiendo en $\tilde{x}_0$ es $s \mapsto [t \mapsto \gamma(st)]$, terminando en $[\gamma] \in \widetilde{X}$. Luego, un lazo basado en x_0, $\gamma: I \to X$, que se levanta a $\tilde{\gamma}$ lazo basado en $\tilde{x}_0 = [c_{x_0}]$ debe cumplir $[\gamma] = [c_{x_0}]$, i.e., $\pi_1(p)(\pi_1(\widetilde{X}, \tilde{x}_0)) = \{1\} \leq \pi_1(X, x_0) \underset{\text{inyectivo!}}{\overset{\pi_1(p)}{\Longrightarrow}} \pi_1(\widetilde{X}, \tilde{x}_0) \cong \{1\}$ ■

Ejemplo: $p: S^2 \overset{2:1}{\twoheadrightarrow} \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$, $x \mapsto [x]$ revestimiento universal, y luego $\pi_1(\mathbb{P}^2(\mathbb{R}), x_0) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

§8. La correspondencia de Galois (cf. MAT529 "Aritmética")

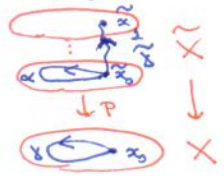
Sea (X,x_0) espacio basado y $p:\tilde{X}\to X$ revestimiento. Vimos que para $\tilde{x}_0\in p^{-1}(x_0)$ el morfismo $\pi_1(p):\pi_1(\tilde{X},\tilde{x}_0)\hookrightarrow\pi_1(X,x_0)$ inyectivo, i.e., $\pi_1(\tilde{X},\tilde{x}_0)\cong\mathrm{Im}(\pi_1(p))\leq\pi_1(X,x_0)$ subgrupo.

Sup. $\tilde{X}$ conexo por caminos y sea $\tilde{x}_1\in p^{-1}(x_0)$. Si $\tilde{\gamma}:I\to\tilde{X}$ camino de $\tilde{x}_0$ a $\tilde{x}_1$ y $\gamma:=p\circ\tilde{\gamma}$ lazo en $x_0\in X$, entonces $[\gamma]^{-1}\cdot\pi_1(p)(\pi_1(\tilde{X},\tilde{x}_0))\cdot[\gamma]=\pi_1(p)(\pi_1(\tilde{X},\tilde{x}_1))$ son conjugados.

Así, obtenemos funciones

$\{$Revestimientos basados $p:(\tilde{X},\tilde{x}_0)\to(X,x_0)\}\longrightarrow\{$Subgrupos de $\pi_1(X,x_0)\}$

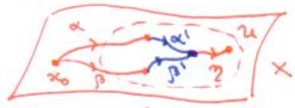
$\{$Revestimientos $p:\tilde{X}\to X\}\longrightarrow\{$Clases de conjugación de subgr. de $\pi_1(X,x_0)\}$



⚠ En lo que sigue: X esp. top. con $\pi_0(X)\simeq\{*\}$, localmente conexo por caminos y slsc, y $x_0\in X$.

Teorema: Para todo subgrupo $H\leq\pi_1(X,x_0)$ existe un revestimiento basado $p_H:(\tilde{X}_H,\tilde{x}_H)\to(X,x_0)$ tal que $\pi_1(p_H)(\pi_1(\tilde{X}_H,\tilde{x}_H))=H$.

Dem: Sea $p:\tilde{X}=\{$clases de homot. de caminos en X partiendo en $x_0\}\to X$, $[\gamma]\mapsto\gamma(1)$ revestimiento universal, y consideremos la rel. de equiv. $[\gamma]\sim_H[\gamma']\iff\gamma(1)=\gamma'(1)$ y $[\gamma\cdot(\gamma')^{-1}]\in H$.
Sea $\tilde{X}_H:=\tilde{X}/\sim_H$ espacio cociente y $p_H:\tilde{X}_H\to X$, $[\gamma]_H\mapsto\gamma(1)$.



$\Rightarrow p_H$ revestimiento pues si $[\gamma]=[\alpha\cdot\alpha']\in(\alpha,\mathcal{U})$ y $[\gamma']=[\beta\cdot\beta']\in(\beta,\mathcal{U})$ son tales que $[\gamma]\sim_H[\gamma']\Rightarrow[\gamma\cdot\eta]\sim_H[\gamma'\cdot\eta]$ para todo $\eta:I\to\mathcal{U}$ partiendo de $\gamma(1)=\gamma'(1)$, i.e., $p_H((\alpha,\mathcal{U}))=p_H((\beta,\mathcal{U}))$ en tal caso ✓

Sea $\tilde{x}_H:=[c_{x_0}]_H$ y veamos que $\pi_1(p_H)(\pi_1(\tilde{X}_H,\tilde{x}_H))=H$: $(\supseteq)$ Si $[\gamma]\in H$ entonces, dado que su levantamiento $\tilde{\gamma}$ a $\tilde{X}$ partiendo en $\tilde{x}_0=[c_{x_0}]\in\tilde{X}$ termina en $[\gamma]\in\tilde{X}$, tenemos que el levantamiento de γ a $\tilde{X}_H$ es un lazo basado en $[\gamma]_H=[c_{x_0}]_H\overset{\text{def}}{=}\tilde{x}_H$ ✓ $(\subseteq)$ Considerar $[\gamma]=[p_H\circ\tilde{\gamma}]$ con $\tilde{\gamma}$ lazo en $\tilde{X}_H$ basado en $[c_{x_0}]_H=\tilde{x}_H$. Como el levantamiento de γ a $\tilde{X}$ partiendo de $[c_{x_0}]\in\tilde{X}$ termina en $[\gamma]\in\tilde{X}$, el levantamiento de $\tilde{\gamma}$ a $\tilde{X}$ también! Como $\tilde{\gamma}$ es un lazo en $\tilde{X}_H$, $[c_{x_0}]\sim_H[\gamma]$, i.e., $[\gamma]\in H$ ✓ ■

Teorema (unicidad basada): Sean $p_1:(\tilde{X}_1,\tilde{x}_1)\to(X,x_0)$ y $p_2:(\tilde{X}_2,\tilde{x}_2)\to(X,x_0)$ revestimientos con $\pi_0(\tilde{X}_1)\simeq\pi_0(\tilde{X}_2)\simeq\{*\}$. Entonces,
$\exists\, h:(\tilde{X}_1,\tilde{x}_1)\xrightarrow{\sim}(\tilde{X}_2,\tilde{x}_2)$ homeo basado tq $p_2\circ h=p_1\iff\pi_1(p_1)(\pi_1(\tilde{X}_1,\tilde{x}_1))=\pi_1(p_2)(\pi_1(\tilde{X}_2,\tilde{x}_2))$.

Obs. De manera análoga, si olvidamos puntos base se tiene el mismo resultado, pero en lugar de tener igualdad de subgrupos de $\pi_1(X,x_0)$ se pide que sean conjugados.

Dem del Teorema: $(\Rightarrow)$ Si h existe, $\pi_1(p_1)=\pi_1(p_2)\circ\pi_1(h)\overset{\pi_1(h)}{\underset{\text{isom.}}{\Longrightarrow}}\mathrm{Im}(\pi_1(p_1))=\mathrm{Im}(\pi_1(p_2))$ ✓
$(\Leftarrow)$ Sea $H:=\pi_1(p_1)(\pi_1(\tilde{X}_1,\tilde{x}_1))$ y veamos que $\exists\, h:(\tilde{X}_H,\tilde{x}_H)\to(\tilde{X}_1,\tilde{x}_1)$ homeo. basado. Con la notación del Teorema anterior, consideramos $\tilde{p}_1:(\tilde{X},[c_{x_0}])\mapsto(\tilde{X}_1,\tilde{x}_1)$, $[\gamma]\mapsto\tilde{\gamma}(1)$ donde $\tilde{\gamma}$ es el levantamiento de $\gamma:I\to X$ a $\tilde{X}_1$ partiendo en $\tilde{x}_1$. Así:
$\tilde{p}_1([\gamma])=\tilde{p}_1([\gamma'])\overset{\text{def}}{\iff}\tilde{\gamma}$ y $\tilde{\gamma}'$ terminan en el mismo punto en $\tilde{X}_1\iff[\gamma'\cdot\gamma^{-1}]\in\mathrm{Im}(\pi_1(p_1))=H$, i.e., $[\gamma]\sim_H[\gamma']$ y luego $\tilde{p}_1$ induce una biyección continua $h:(\tilde{X}_H,\tilde{x}_H)\xrightarrow{\sim}(\tilde{X}_1,\tilde{x}_1)$ que es abierta pues $p_1:\tilde{X}_1\to X$ y $p_H:\tilde{X}_H\to X$ son homeos. locales ■

§9. Grupos libres y producto amalgamado

Necesitaremos un poco de Teoría de Grupos para calcular grupos fundamentales, que usaremos sin pruebas: Sea $S:=\{s_\alpha\}_{\alpha\in I}$ conjunto, llamado alfabeto ("generadores") y $S^{-1}:=\{s_\alpha^{-1}\}_{\alpha\in I}$ otro conjunto con $S\cap S^{-1}=\emptyset$. Una palabra (quizás vacía) es una sucesión de símbolos $w=x_1\cdots x_m\in T:=S\cup S^{-1}$. Decimos que w es reducida si no contiene $s_\alpha\cdot s_\alpha^{-1}=:()=:1$ ni $s_\alpha^{-1}\cdot s_\alpha=:()=:1$; toda palabra puede reducirse omitiendo dichas palabras.

Eg. $S = \{a,b,c\}$ y $T \overset{\text{def}}{=} \{a,a^{-1},b,b^{-1},c,c^{-1}\}$, con $w = ab^3c^{-1}a^{-1}c$ palabra reducida en S.

Def: El grupo libre $F(S)$ en el alfabeto S es el grupo de palabras reducidas en S, con la operación de concatenar palabras y con $1 = (\,)$ como la identidad.

Prop. Universal de $F(S)$: Sea $i : S \hookrightarrow F(S)$, $s_\alpha \mapsto s_\alpha$. Entonces, para todo grupo G hay una biyección

$$\left\{\begin{matrix}\text{Morfismos de grupos}\\ \varphi : F(S) \to G\end{matrix}\right\} \xrightarrow{\sim} \left\{\begin{matrix}\text{Funciones}\\ f : S \to G\end{matrix}\right\}, \quad \varphi \mapsto \varphi \circ i$$

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i"'] & G \\ F(S) \arrow[ur, "\varphi"'] & \end{tikzcd}$$

En efecto, dada f se define $\varphi = \varphi_f$ como $\varphi(s_{\alpha_1}^{\varepsilon_1} \cdots s_{\alpha_m}^{\varepsilon_m}) := f(s_{\alpha_1})^{\varepsilon_1} \cdots f(s_{\alpha_m})^{\varepsilon_m}$.

Def: Sea $R \subseteq F(S)$ subconj ("relaciones"). Definimos el grupo $\langle S ; R\rangle$ como el cociente $F(S)/\langle\langle R\rangle\rangle$ donde $\langle\langle R\rangle\rangle \trianglelefteq F(S)$ es el subgrupo normal dado por:

$$\langle\langle R\rangle\rangle := \{(r_1^{\varepsilon_1})^{g_1} \cdots (r_m^{\varepsilon_m})^{g_m},\ r_i \in R,\ \varepsilon_i \in \{\pm 1\},\ g_i \in F(S)\} \quad \text{y donde } s^g := g^{-1}sg.$$

⚠ Intuición: Las palabras en $R = \{r_\beta\}_{\beta\in J}$ son $\equiv 1$, y escribimos $\langle S ; r_\beta = 1\ \forall \beta \in J\rangle$

Propiedad Universal de $\langle S;R\rangle$: Para todo grupo G hay una biyección

$$\left\{\begin{matrix}\text{Morfismos de grupos}\\ \varphi : \langle S;R\rangle \to G\end{matrix}\right\} \xrightarrow{\sim} \left\{\begin{matrix}\text{Funciones } f : S \to G\\ \text{tq } f(r) = 1_G\ \forall r \in R\end{matrix}\right\}, \quad \varphi \longmapsto f : S \xhookrightarrow{i} F(S) \overset{\pi}{\twoheadrightarrow} \langle S;R\rangle \xrightarrow{\varphi} G$$

Ejemplos: ⓪ $G \cong \langle G ; R_G\rangle$ con $R_G := \ker(F(G) \to G)$.

① $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \cong \langle a ; a^3 = 1\rangle$.

② $G = \langle a,b ; a = 1\rangle \cong H = \langle t ; \rangle \cong \mathbb{Z}$.

③ Sea $G := \langle a,b ; ab^{-3} = ba^{-2} = 1\rangle$ con $b \overset{\text{def}}{=} a^2$ y $a \overset{\text{def}}{=} b^3 = a^6$, i.e., $a^5 = 1$. Así, $G \cong \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$.

Explícitamente: $f : \{a,b\} \to \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$, $a \mapsto 1$, $b \mapsto 2$ cumple $f(ab^{-3}) \equiv 5 \equiv 0$ y $f(ba^{-2}) \equiv 0$.

Luego, $\exists!\ \varphi_f : G \twoheadrightarrow \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$, $[a] \mapsto 1$. Como $|G| \leq 5$ se tiene que φ_f isomorfismo.

⚠ Objetivo: "Pegar grupos a lo largo de un subgrupo común".

Construcción: Sean H, G_1, G_2 grupos y sean $G_1 \xleftarrow{i_1} H \xrightarrow{i_2} G_2$ morfismos de grupos arbitrarios.
Si $G_i = \langle S_i ; R_i\rangle$ (cf. ⓪), se define el producto libre $G_1 * G_2 := \langle S_1 \cup S_2 ; R_1 \cup R_2\rangle$.
Si $j_i : G_i \hookrightarrow G_1 * G_2$ son las inclusiones canónicas, se define el producto libre amalgamado sobre H

$$G_1 *_H G_2 := (G_1 * G_2)/\langle\langle j_1 i_1(h)\cdot(j_2 i_2(h))^{-1},\ \forall h \in H\rangle\rangle \quad \text{y así} \quad \begin{tikzcd} H \arrow[r, "i_1"] \arrow[d, "i_2"'] & G_1 \arrow[d] \\ G_2 \arrow[r] & G_1 *_H G_2 \end{tikzcd} \quad \text{es conmutativo.}$$

Ejemplo: Sean $G_1 = \langle x\rangle \overset{\text{def}}{=} \langle x ; \rangle$, $G_2 = \langle y\rangle$, $H = \langle a\rangle$ (todos $\cong \mathbb{Z}$). Consideremos los morfismos $i_1 : H \to G_1$, $a \mapsto x^2$ y $i_2 : H \to G_2$, $a \mapsto y^3$, entonces $G_1 *_H G_2 \overset{\text{def}}{=} \langle x,y ; x^2 = y^3\rangle$

Prop. Universal de $G_1 *_H G_2$: Sean $G_1 \xleftarrow{i_1} H \xrightarrow{i_2} G_2$ morfismos y K un grupo. Hay una biyección

$$\left\{\begin{matrix}\text{Morfismos de grupos}\\ \varphi : G_1 *_H G_2 \to K\end{matrix}\right\} \xrightarrow{\sim} \left\{\begin{matrix}\text{Morfismos de grupos } \varphi_1 : G_1 \to K\\ \text{y } \varphi_2 : G_2 \to K \text{ tq } \varphi_1 \circ i_1 = \varphi_2 \circ i_2\end{matrix}\right\}, \quad \varphi \longmapsto (\varphi_1 := \varphi \circ j_1, \varphi_2 := \varphi \circ j_2).$$

§10. Teorema de Seifert-van Kampen

Sea X esp top. y sean $A, B \subseteq X$ subespacios con $x_0 \in A \cap B \neq \emptyset$. Las inclusiones inducen morfismos

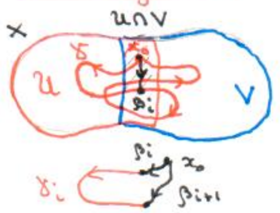
$$\begin{tikzcd} \pi_1(A\cap B, x_0) \arrow[r] \arrow[d] & \pi_1(A, x_0) \arrow[d] \\ \pi_1(B, x_0) \arrow[r] & \pi_1(X, x_0) \end{tikzcd}$$

y luego (por §9), $\exists!$ morfismo inducido $\varphi : \pi_1(A,x_0) *_{\pi_1(A\cap B, x_0)} \pi_1(B,x_0) \to \pi_1(X,x_0)$.

Teorema (Seifert 1931, van Kampen 1933): Sea X esp. top. y sean $\mathcal{U}, \mathcal{V} \subseteq X$ abiertos tales que $\mathcal{U} \cup \mathcal{V} = X$ y $\mathcal{U} \cap \mathcal{V} \neq \emptyset$ es conexo por caminos. Entonces, para todo $x_0 \in \mathcal{U} \cap \mathcal{V}$ el morfismo de grupos inducido por las inclusiones $\pi_1(\mathcal{U}, x_0) *_{\pi_1(\mathcal{U}\cap\mathcal{V}, x_0)} \pi_1(\mathcal{V}, x_0) \xrightarrow{\sim} \pi_1(X, x_0)$ es un isomorfismo

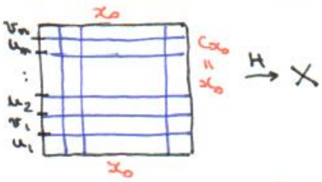
Dem: El grupo del enunciado es $\pi_1(\mathcal{U},x_0) * \pi_1(V,x_0) / \text{Amal}$, con Amal el subgrupo normal generado por las relaciones amalgamadas $i_*([\gamma])\, j_*([\gamma])^{-1}$ con $i: \mathcal{U}\cap V \hookrightarrow \mathcal{U}$, $j: \mathcal{U}\cap V\hookrightarrow V$ y con $i_* = \pi_1(i)$, $j_*=\pi_1(j)$. Buscamos $\varphi: \pi_1(\mathcal{U},x_0)*\pi_1(V,x_0) \twoheadrightarrow \pi_1(X,x_0)$ sobreyectivo con $\ker(\varphi)=\text{Amal}$:
Sea $w = u_1v_1u_2v_2\cdots u_mv_m \in \pi_1(\mathcal{U},x_0)*\pi_1(V,x_0)$ con $u_i\in\pi_1(\mathcal{U},x_0)$, $v_i\in\pi_1(V,x_0)$, definimos $\varphi(w) := a_*u_1\cdot b_*v_1\cdots a_*u_m\cdot b_*v_m$ morfismo, con $a: \mathcal{U}\hookrightarrow X$, $b: V\hookrightarrow X$, $a_*=\pi_1(a)$, $b_*=\pi_1(b)$.

φ sobreyectivo: Sea $\gamma: I\to X$ lazo en x_0. Como I es compacto, $\exists$ subdivisión finita



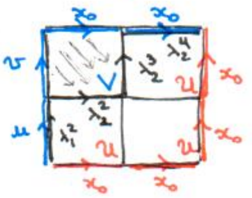
$t_0=0<t_1<\dots<t_m=1$ tq $\gamma|_{[t_i,t_{i+1}]}$ contenido en $\mathcal{U}$ o en V. Si $\gamma_i := \gamma|_{[t_i,t_{i+1}]}$ consideramos para $0\le i\le n$ un camino β_i en $\mathcal{U}\cap V$ desde x_0 a $\gamma(t_i)$, y donde $\beta_0 := c_{x_0} =: \beta_m$. Así, $\beta_{i+1}^{-1}\cdot\gamma_i\cdot\beta_i$ lazos en x_0 contenido en $\mathcal{U}$ o en V.
$\Rightarrow (\beta_m^{-1}\gamma_{m-1}\beta_{m-1})\cdots(\beta_1^{-1}\cdot\gamma_0\cdot\beta_0) \simeq \beta_m^{-1}\cdot\gamma_{m-1}\cdots\gamma_0\cdot\beta_0 \simeq \gamma$ ✓

ker(φ) = Amal: $w=u_1v_1\cdots u_mv_m\in\ker(\varphi) \iff a_*u_1\cdot b_*v_1\cdots a_*u_m\cdot b_*v_m \underset{H}{\simeq} c_{x_0}$ en X.
Consideremos $H: I\times I\to X$ la homotopía de $\varphi(w)$ a c_{x_0}. Como $I\times I$ compacto, podemos



subdividirlo en una malla más fina tal que cada subcuadrado se envíe por H a $\mathcal{U}$ o a V.

Por conveniencia, nos restringimos al caso de 4 subcuadrados (caso gral. análogo):



Podemos realizar homotopías sucesivas en $\mathcal{U}$ y en V:

$uv\,c_{x_0}c_{x_0} := \lambda_1^1\lambda_2^1\lambda_3^1\lambda_4^1 \in \ker(\varphi)$

$\wr\, H_1$ en V ⇝ Relaciones en V

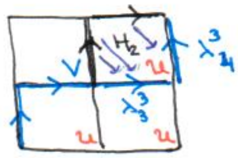
$\lambda_1^2\lambda_2^2\lambda_3^2\lambda_4^2$

$\wr\, H_2$ en $\mathcal{U}$

$\lambda_1^3\lambda_2^3\lambda_3^3\lambda_4^3$

$\vdots$

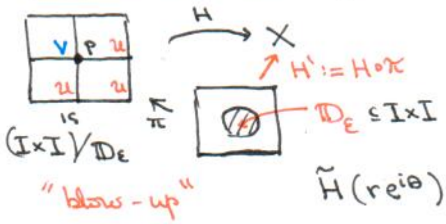
$c_{x_0}c_{x_0}c_{x_0}c_{x_0}\in\ker(\varphi)$



⚠ λ_3^2 es una palabra en V, para aplicar H_2 necesito "convertirla" en una palabra en $\mathcal{U}$. Podemos hacerlo pues λ_3^2 se mapea a $\mathcal{U}\cap V$!

En cada paso usamos: Relaciones en $\mathcal{U}$, Rel. en V, Amal para pasar entre $\mathcal{U}$ y V.

El problema es que los λ_i^k son caminos, no son lazos: Hay que modificar H en cada nodo de la malla y obtener $\tilde H$ que envíe los nodos en x_0 ($\Rightarrow \lambda_i^k$ lazos y estamos OK!):



Elegimos un camino δ desde x_0 a $H(p)$ contenido en $\mathcal{U}$, V, o $\mathcal{U}\cap V$ dependiendo de los "vecinos" de p, y definimos la homotopía $\tilde H: I\times I\to X$ como $\tilde H|_{(I\times I)\setminus D_\varepsilon} = H'|_{(I\times I)\setminus D_\varepsilon}$ y como

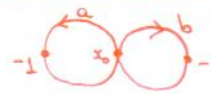
$$\tilde H(re^{i\theta}) := \begin{cases} H(p) & \text{si } r=\varepsilon\\ \delta(r/\varepsilon) & \text{si } 0<r<\varepsilon \\ x_0 & \text{si } r=0\end{cases}$$

en D_ε. Reemplazamos H por $\tilde H$ ✓ ■

Ejemplo (La esfera): En $S^n\subseteq\mathbb{R}^{n+1}$ consideramos $n=(0,\dots,0,1)$, $s=(0,\dots,0,-1)\in S^n$ polos de S^n. Entonces, $\mathcal{U}:=S^n\setminus\{n\}\cong V:=S^n\setminus\{s\}\cong\mathbb{R}^n$ (compactificación de Alexandrov) y además $\mathcal{U}\cap V\cong$ "Ecuador" $\times\,]-1,1[\; = S^{n-1}\times\,]-1,1[$ es conexo por caminos si $n\ge2$. Así, para $x_0\in\mathcal{U}\cap V$:
$\overset{S\text{-}vK}{\Rightarrow} \pi_1(S^n,x_0)\cong \pi_1(\mathcal{U},x_0)*_{\pi_1(\mathcal{U}\cap V,x_0)}\pi_1(V,x_0)\cong\{1\}*_{\pi_1(\mathcal{U}\cap V,x_0)}\{1\}\cong\{1\}$, i.e., S^n simpl. conexa $\forall n\ge2$.

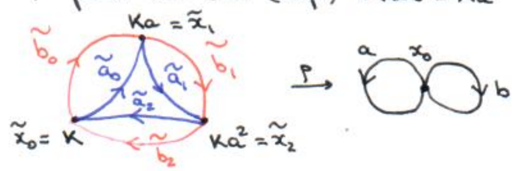
Ejemplo (Espacio proyectivo real): Recordar que $\mathbb{P}^n(\mathbb{R}):=S^n/\sim$ con $x\sim -x$ y $p: S^n\xrightarrow{2:1}\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ es un revestimiento. Dado que $\pi_1(S^n,y_0)\cong\{1\}$ para $n\ge2$, tenemos que p es revest. universal.
$\Rightarrow$ Hay una biyección entre $\pi_1(\mathbb{P}^n(\mathbb{R}),x_0)$ y el conj. $p^{-1}(x_0)$ de 2 elem, i.e., $\pi_1(\mathbb{P}^n(\mathbb{R}),x_0)\cong\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.
Dado que $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})\simeq S^1$, $\pi_1(\mathbb{P}^1(\mathbb{R}),x_0)\cong\mathbb{Z}$.

Recuerdo: Sean (X,x_0) e (Y,y_0) espacios basados. El bouquet (o wedge) $X\vee Y$ es el espacio topológico cociente $X\vee Y := (X\sqcup Y)/\sim$ donde $\sim$ es la rel. de equivalencia generada por $x_0\sim y_0$. Dicho punto común es el punto base de $X\vee Y$. Eg. $S^1\vee S^1 =$ 

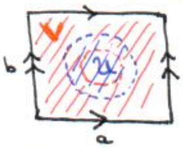
Ejemplo: Consideramos $(S^1, 1)$ y formamos $X = S^1 \vee S^1$ con punto base x_0. 

Sean $\mathcal{U} := S^1 \vee (S^1 \setminus \{-1\}) \simeq S^1 \vee \{1\}$ y $V := (S^1 \setminus \{-1\}) \vee S^1 \simeq \{1\} \vee S^1 \simeq S^1$.
Como $\mathcal{U} \cap V = (S^1 \setminus \{-1\}) \vee (S^1 \setminus \{-1\}) \simeq \{x_0\}$ es contractible, $\pi_1(\mathcal{U} \cap V, x_0) \cong \{1\}$ y luego calculamos
$\pi_1(S^1 \vee S^1, x_0) \underset{S\text{-}vK}{\cong} \pi_1(S^1 \vee \{1\}) *_{\{1\}} \pi_1(\{1\} \vee S^1) \cong \langle a, b ; \rangle \cong \mathbb{Z} * \mathbb{Z} =: F_2$ grupo libre con 2 generad

Ejemplo: Sea $(X, x_0) := (S^1 \vee S^1, x_0)$ como antes, con $\pi_1(S^1 \vee S^1, x_0) \cong \langle a, b ; \rangle \cong \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$.
La función $f : \{a, b\} \to \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$, $a \mapsto 1$, $b \mapsto 1$ induce $\varphi_f = \varphi : \langle a, b ; \rangle \twoheadrightarrow \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ morfismo.
con $K := \ker(\varphi) \leq \pi_1(X, x_0)$ de índice 3. La correspondencia de Galois implica la existencia de un único revestimiento $p : (\tilde{X}_K, \tilde{x}_0) \to (X, x_0)$ con $\pi_1(p)(\pi_1(\tilde{X}_K, \tilde{x}_0)) = K$.
La acción por monodromía induce una biyección $\pi_1(X, x_0)/K \left(\underset{\text{Noether}}{\cong} \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}\right) \xrightarrow{\sim} p^{-1}(x_0)$ y luego p revestimiento de grado 3, y podemos identificar $p^{-1}(x_0) \cong \{\tilde{x}_0 \cong K, \tilde{x}_1 \cong Ka, \tilde{x}_2 \cong Ka^2\}$.
⚠ Si $x \in \pi_1(S^1 \vee S^1, x_0) = \langle a, b ; \rangle$ es una palabra en a y b, por definición, su levantamiento partiendo en $Ky \in p^{-1}(x_0)$ es precisamente Kyx. Así, el levantamiento de:
1) a partiendo en $\tilde{x}_0 = K$ (resp. $\tilde{x}_1 = Ka$, resp. $\tilde{x}_2 = Ka^2$) termina en $Ka = \tilde{x}_1$ (resp. $Ka^2 = \tilde{x}_2$, resp. $\underset{\tilde{x}_0}{\overset{Ka^3 = K}{\shortparallel}}$)
2) b partiendo en $\tilde{x}_0 = K$ (resp. $\tilde{x}_1$, resp. $\tilde{x}_2$) termina en $Kb = Ka = \tilde{x}_1$ pues $ba^{-1} \in K$ (resp. $Kab = Ka^2 = \tilde{x}_2$, resp. $Ka^2b = Ka^3 = K = \tilde{x}_0$). Así, $\tilde{X}$ está dado por:



Ejercicio Dibujar el revestimiento universal de $(S^1 \vee S^1, x_0)$ como un grafo infinito donde en cada eje "sale" el camino a, a^{-1}, b, b^{-1}.

Ejemplo (Toro): Sea $T \cong S^1 \times S^1 \cong$  $\cong$ 

con $\mathcal{U} \simeq \{*\}$ y luego $\pi_1(\mathcal{U}, x_0) \cong \{1\} = G_1$
$V \simeq S^1 \vee S^1$ y así $\pi_1(V, x_0) \cong \langle a, b ; \rangle = G_2$
Como $\mathcal{U} \cap V \simeq S^1$ tenemos $\pi_1(\mathcal{U} \cap V, x_0) \cong \langle c \rangle \cong \mathbb{Z} = H$. Aquí, $\pi_1(\mathcal{U} \cap V, x_0) \to \pi_1(V, x_0)$, $c \mapsto aba^{-1}b^{-1}$
y luego $\pi_1(T, x_0) \underset{S\text{-}vK}{\cong} G_1 *_H G_2 \cong \langle a, b ; aba^{-1}b^{-1} = 1 \rangle = \langle a, b ; ab = ba \rangle \cong \mathbb{Z}^2$.

Recuerdo: Sea (X, x_0) espacio basado y $f : (S^{n-1}, *) \to (X, x_0)$ mapeo basado. El pegado de $\mathbb{D}^n \subseteq \mathbb{R}^n$ a X mediante f es $Y := X \cup_f \mathbb{D}^n := (X \sqcup \mathbb{D}^n)/\sim$ con $\sim$ rel. de equiv. generada por $z \in S^{n-1} = \partial \mathbb{D}^n \sim f(z) \in X$ para todo $z \in S^{n-1}$. Si $y_0 := [x_0] \in Y$, $i : (X, x_0) \hookrightarrow (Y, y_0)$ induce un morfismo $\pi_1(i) : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, y_0)$. Con esta notación, tenemos que:

Teorema: ① Si $n \geq 3$ entonces $\pi_1(i)$ es un isomorfismo.
② Si $n = 2$, y luego $f : (S^1, *) \to (X, x_0)$ induce $[f] \in \pi_1(X, x_0)$, entonces $\pi_1(i)$ sobreyectivo y $\ker(\pi_1(i))$ es el subgrupo normal generado por $[f]$.

Dem: Escribamos $Y = \mathcal{U} \cup V$ con $\mathcal{U} := \operatorname{int}(\mathbb{D}^n)$ y $V := X \cup_f (\mathbb{D}^n \setminus \{0\})$ complemento del centro del disco $\mathbb{D}^n$. Así, $\mathcal{U} \cap V \simeq S^{n-1} \times]0,1[$ conexo por caminos si $n \geq 2$.
Sea $y_1 \in \mathcal{U} \cap V \subseteq \operatorname{int}(\mathbb{D}^n)$ y $u : I \to \mathbb{D}^n \setminus \{0\}$ camino de y_0 a y_1.

Para ①, $\mathcal{U} \cap V \simeq S^{n-1}$ simplemente conexo $\overset{S\text{-}vK}{\Longrightarrow} \pi_1(Y, y_1) \cong \pi_1(\mathcal{U}, y_1) *_{\{1\}} \pi_1(V, y_1) \cong \pi_1(V, y_1)$.
Así, el cambio de punto base $u_\#$ induce $\pi_1(V, y_0) \xrightarrow{\sim} \pi_1(Y, y_0)$ isomorfismo, con $(V, y_0) \xhookrightarrow{\sim} (X, y_0)$ equivalencia homotópica (!) y luego $\pi_1(i)$ isomorfismo ✓ En ②, $\mathcal{U} \cap V \simeq S^1$ y el morfismo $\mathbb{Z} \simeq \pi_1(\mathcal{U} \cap V, y_1) \to \pi_1(V, y_1)$ envía 1 en $u_\#[f]$. Como $\pi_1(\mathcal{U}, y_1) \simeq \{1\}$, $\pi_1(Y, y_1) \underset{S\text{-}vK}{\cong} \pi_1(V, y_1)/\langle\langle u_\#[f] \rangle\rangle$ y tal como antes obtenemos $\pi_1(Y, y_0) \cong \pi_1(X, x_0)/\langle\langle [f] \rangle\rangle$ ∎

Corolario: Para todo $G \cong \langle S ; R \rangle$ con S y R finitos, $\exists\, (Y, y_0)$ esp. tal que $\pi_1(Y, y_0) \cong G$.

Dem: Sea $(X, x_0) = S^1 \vee \ldots \vee S^1$ bouquet de $\#S|$ círculos, con $\pi_1(X, x_0) \underset{S\text{-}vK}{\cong} \langle S ; \rangle \cong F_{|S|}$ grupo libre.
Cada $r \in R \subseteq \langle S, \cdot \rangle$ es un lazo $\gamma_r : (S^1, 1) \to (X, x_0)$ y por el Teo. anterior tenemos un isom.
$\pi_1(Y, y_0) \cong \pi_1(X, x_0)/\langle\langle [\gamma_r], r \in R \rangle\rangle \cong \langle S ; R \rangle$ donde (Y, y_0) se obtiene pegando los γ_r ∎

§11. Grupos de homotopía superiores

Si $n, m \geq 2$, entonces no podemos distinguir S^n de S^m usando el grupo fundamental. Es natural considerar la generalización siguiente de $\pi_1(X, x_0)$:

Sean X, Y esp. top y $A \subseteq X$, $B \subseteq Y$ subespacios. Un mapeo de pares $f: (X,A) \to (Y,B)$ es un mapeo $f: X \to Y$ tal que $f(A) \subseteq B$. Una homotopía entre mapeos de pares $f, g: (X,A) \to (X,B)$ es una homotopía $H: X \times [0,1] \to Y$ de f a g tal que $H(A \times [0,1]) \subseteq B$.

Notación: sea $I^0 := \{*\}$ punto, $I := [0,1] \subseteq \mathbb{R}$ y $I^n = [0,1]^n \subseteq \mathbb{R}^n$ $\forall n \geq 2$, donde se tiene $\partial I^n \overset{\text{def}}{=} \{(t_1, \dots, t_n) \in I^n$, algún t_i es 0 o $1\}$.

Def: Sea (X, x_0) espacio basado y $n \in \mathbb{N}$, se define el n-ésimo grupo de homotopía por $\pi_n(X, x_0) := \{$ clases de homotopía de mapeos $f: (I^n, \partial I^n) \to (X, \{x_0\})\}$.

Ejemplo: Como conjuntos, la definición anterior coincide con $\pi_0(X, x_0) \overset{\text{def}}{=} \pi_0(X)$ (pues $\partial I^0 = \emptyset$) y $\pi_1(X, x_0)$.

Construcción (cf. §3): Sea $n \geq 1$ y $f, g: (I^n, \partial I^n) \to (X, \{x_0\})$ mapeos. Se define el producto de f y g en $\pi_n(X, x_0)$ por
$$(f \cdot g)(t_1, \dots, t_n) := \begin{cases} f(2t_1, t_2, \dots, t_n) & \text{si } 0 \leq t_1 \leq 1/2 \\ g(2t_1 - 1, t_2, \dots, t_n) & \text{si } 1/2 \leq t_1 \leq 1 \end{cases}$$

Teorema: Para todo $n \geq 1$ el producto anterior define una estructura de grupo en $\pi_n(X, x_0)$ con identidad la clase de homotopía de $c_{x_0}: I^n \to X$, $(t_1, \dots, t_n) \mapsto x_0$. Dicho grupo es abeliano $\forall n \geq 2$.

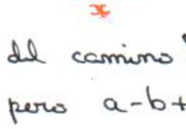
Dem: La misma prueba que en el caso $n=1$ muestra que $\pi_n(X, x_0)$ es un grupo. Si $n \geq 2$, consideramos homotopías: $f \cdot g = \boxed{\begin{array}{c|c} f & g \end{array}} \simeq \boxed{\begin{array}{c|c} f & c_{x_0} \\ \hline c_{x_0} & g \end{array}} \simeq \boxed{\begin{array}{c|c} c_{x_0} & f \\ \hline g & c_{x_0} \end{array}} \simeq \boxed{\begin{array}{c|c} g & f \end{array}} = g \cdot f$, ie, $\pi_n(X, x_0)$ abeliano ■

Obs: En física de partículas, π_2 y π_3 miden la existencia de "monopolos" y "texturas", respectivamente.

⚠ Los grupos de homotopía superiores comparten algunas propiedades de π_1. Por ejemplo, si $\varphi: (X, x_0) \to (Y, y_0)$ mapeo basado, entonces $\pi_n(\varphi): \pi_n(X, x_0) \to \pi_n(Y, y_0)$, $[f] \mapsto [\varphi \circ f]$ es un morfismo que sólo depende de la clase de homotopía de φ y $\pi_n(\psi \circ \varphi) = \pi_n(\psi) \circ \pi_n(\varphi)$, $\pi_n(\mathrm{Id}_X) = \mathrm{Id}_{\pi_n(X, x_0)}$. En part, si φ equivalencia homotópica entonces $\pi_n(\varphi)$ es un isomorfismo.

El gran problema es que dichos grupos son muy difíciles de calcular y no es verdad que si X es una variedad diferenciable real de $\dim_{\mathbb{R}}(X) = n$ entonces $\pi_i(X, x_0) = 0$ $\forall i > n$, siendo el ejemplo más emblemático la esfera S^n! Eg. $\pi_6(S^2, x_0) \cong \mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$, $\pi_{11}(S^6, x_0) \cong \mathbb{Z}$, etc.

Idea (Riemann 1857, Betti 1871, etc): Solucionar esto olvidando completamente el punto base y el orden en que acorre el "tiempo". Eg ($n=1$): En lugar de estudiar lazos (ie, $\pi_1(X, x_0)$) consideraremos imágenes continuas de S^1 en X (ie, $H_1(X, \mathbb{Z})$ "primer grupo de homología")!

Ejemplo informal (cf. Hatcher pág 99): Sea $X =$ 

con $\pi_1(x, x) \underset{\text{S-vK}}{\cong} \langle ba^{-1}, cb^{-1}, dc^{-1} \rangle \cong \mathbb{Z} * \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$

Olvidar punto base: $ba^{-1} = a^{-1}b$, ie, "$b - a$"

La notación aditiva sólo detecta la orientación del camino! Diremos que $b - a$ es un 1-ciclo.

Eg. $c - b$, $d - c$, $c + d - a - b$ son 1-ciclos pero $a - b + c$ no lo es.

Sea $C_1(X) := \mathbb{Z}a \oplus \mathbb{Z}b \oplus \mathbb{Z}c \oplus \mathbb{Z}d \cong \mathbb{Z}^4$ grupo de 1-cadenas, ¿cuándo $\delta \in C_1(X)$ es un 1-ciclo?

Sea $C_0(X) := \mathbb{Z}x \oplus \mathbb{Z}y \cong \mathbb{Z}^2$ grupo de 0-cadenas y sea $\partial_1: C_1(X) \to C_0(X)$ el morfismo de grupos $a \mapsto y - x$, $b \mapsto y - x$, $c \mapsto y - x$, $d \mapsto y - x$. Así, $\delta = \lambda_1 a + \lambda_2 b + \lambda_3 c + \lambda_4 d$ en $C_1(X)$ es un 1-ciclo $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \partial_1(\delta) = (\lambda_1 + \dots + \lambda_4)(y - x) = 0$, ie, $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = 0$.

$\Rightarrow$ Los 1-ciclos forman el grupo $H_1(X, \mathbb{Z}) := \ker(\partial_1) = \mathbb{Z}(b-a) \oplus \mathbb{Z}(c-b) \oplus \mathbb{Z}(d-c) \cong \mathbb{Z}^3$ (más fácil de calcular que $\pi_1(x,x)$!), donde hay $b_1(X) := \mathrm{rg}\, H_1(X, \mathbb{Z}) \overset{\text{def}}{=} 3$ lazos en X.

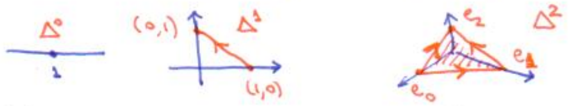
§12. Homología simplicial

Def: Un *n-símplice* es la envolvente convexa de $n+1$ puntos en $\mathbb{R}^n$ que no están en un hiperplano.

Ejemplos: 

⚠ Convención: Denotamos un n-símplice por el conjunto ordenado de sus vértices $[v_0, v_1, \dots, v_n]$. Esto equivale a darle una "orientación". Eg. $[v_0, v_1] = v_0 \longrightarrow v_1 \neq [v_1, v_0] = v_0 \longleftarrow v_1$

Def: El *n-símplice estándar* es el n-símplice $\Delta^n := [e_0, \dots, e_n]$ con vértices la base canónica de $\mathbb{R}^{n+1}$, ie, $\Delta^n \overset{\text{def}}{=} \{(t_0, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^{n+1},\ \sum_{i=0}^{n} t_i = 1,\ t_i \geq 0\ \forall i\} \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$.

Ejemplos: 

⚠ Convención: Las caras de $[v_0, \dots, v_n]$ son los símplices obtenidos por subconj. de vértices con el orden inducido. Eg. $[v_0, v_1, v_2, v_3]$: 

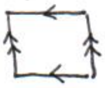
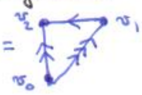
$[v_0, v_1, v_2]$, $[v_0, v_3]$ son caras, $[v_0, v_2, v_1]$ no es.

Def: El homeomorfismo lineal canónico $\beta: \Delta^n \xrightarrow{\sim} [v_0, v_1, \dots, v_n]$, $(t_0, \dots, t_n) \mapsto \sum_{i=0}^{n} t_i v_i$ es el único homeo. lineal que envía $e_i \mapsto v_i$. Los $(t_0, \dots, t_n)$ son las coord. baricéntricas de $[v_0, \dots, v_n]$.

Obs: Dados $\Delta, \Delta' \subseteq \mathbb{R}^n$ símplices, $\Delta \xrightarrow[\sim]{\beta_\Delta^{-1}} \Delta^n \xrightarrow[\sim]{\beta_{\Delta'}} \Delta'$ es el homeo. lineal canónico de Δ a Δ'.

Def: Un *Δ-complejo* es el espacio cociente de una colección de símplices disjuntos $\{\Delta_\alpha\}_{\alpha \in I}$ que se obtiene identificando algunas de sus caras vía homeos. lineales canónicos preservando orden de vértices.

Ejemplos: ① El círculo S^1: $[v_0, v_1]$ $v_0 \longrightarrow v_1$ e identificamos v_0 y v_1: 

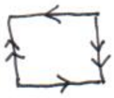
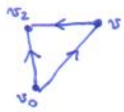
② El toro $T \cong S^1 \times S^1$:  $\cong \Big(\Delta_\alpha = [v_0, v_1, v_2] =$ 

$\sqcup\ \Delta_\beta = [v_0', v_1', v_2'] =$ 

$\Big)/\sim$

donde $[v_0, v_1] \sim [v_1', v_2']$, $[v_0, v_2] \sim [v_0', v_2']$ y $[v_1, v_2] \sim [v_0', v_1']$.

③ El plano proyectivo $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$: 

$\cong$  $\cong \Big($ 

$\sqcup$ 

$\Big)/\sim$

donde $[v_0, v_1] \sim [v_0', v_1']$, $[v_0, v_2] \sim [v_1', v_2']$ y $[v_1, v_2] \sim [v_0', v_2']$.

Def: Sea $X = (\bigsqcup_{\alpha \in I} \Delta_\alpha)/\sim$ un Δ-complejo. El *símplice abierto* e_α^n asociado al n-símplice Δ_α es el interior de Δ_α (ie, Δ_α sin sus caras). Así, cada e_α^n viene con un mapeo canónico $\sigma_\alpha: \Delta^n \xrightarrow{\sim} \Delta_\alpha \to X$, llamado mapeo característico de e_α^n y con $\sigma_\alpha|_{\text{int}(\Delta^n)}: \text{int}(\Delta^n) \xrightarrow{\sim} e_\alpha^n$ homeo.

Para asociar grupos abelianos a un Δ-complejo necesitamos "Álgebra Homológica":

Terminología: Un complejo de cadenas $C_\bullet$ es una sucesión de morfismos de grupos abelianos

$$C_\bullet: \cdots \to C_{n+1} \xrightarrow{\partial_{n+1}} C_n \xrightarrow{\partial_n} \cdots \xrightarrow{\partial_2} C_1 \xrightarrow{\partial_1} C_0 \xrightarrow{\partial_0} 0 \quad \text{con } \partial_n \circ \partial_{n+1} = 0 \ \forall n \geq 1$$

ie, $\text{Im}(\partial_{n+1}) \subseteq \ker(\partial_n)$. Decimos que los elementos de C_n (resp. $\ker(\partial_n)$, resp. $\text{Im}(\partial_{n+1})$) son cadenas (resp. ciclos, resp. bordes).

El grupo abeliano cociente $H_n(C_\bullet) := \ker(\partial_n)/\text{Im}(\partial_{n+1})$ es el n-ésimo grupo de homología de $C_\bullet$.

Decimos que dos ciclos $\alpha, \alpha' \in \ker(\partial_n)$ son homólogos si tienen la misma clase de homología, ie, $\exists \beta \in C_{n+1}$ tal que $\alpha = \alpha' + \partial_{n+1}(\beta)$.

Construcción: Sea $X = (\bigsqcup_{\alpha \in I} \Delta_\alpha)/\sim$ un Δ-complejo. Para todo $n \in \mathbb{N}$ definimos

$\Delta_n(X) :=$ grupo abeliano libre generado por los n-símplices abiertos e_α^n ($\Leftrightarrow$ por los $\sigma_\alpha: \Delta^n \to X$).

ie, sus elementos son sumas formales finitas $\sum_\alpha n_\alpha e_\alpha^n$ ($\Leftrightarrow \sum_\alpha n_\alpha \sigma_\alpha$) con $n_\alpha \in \mathbb{Z}$.

Eg. $\Delta_0(X)$ son combinaciones lineales enteras de vértices de X.

Se define la función borde $\partial_n : \Delta_n(X) \to \Delta_{n-1}(X)$ enviando $[v_0,\dots,v_n]$ en $\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\,[v_0,\dots,\hat{v}_i,\dots,v_n]$ o equivalentemente $\partial_n(\sigma_\alpha) := \sum_{i=0}^{n}(-1)^i\,\sigma_\alpha|_{[v_0,\dots,\hat{v}_i,\dots,v_n]}$ donde $[v_0,\dots,\hat{v}_i,\dots,v_n]$ omite el vértice v_i.

Ejemplo $(n=2)$: sea $X = \Delta = [v_0,v_1,v_2] =$ 

$\Rightarrow \partial_2(\Delta) \overset{def}{=} (-1)^0[\hat{v}_0,v_1,v_2] + (-1)^1[v_0,\hat{v}_1,v_2] + (-1)^2[v_0,v_1,\hat{v}_2]$

i.e., $\partial_2(\Delta) = [v_1,v_2] - [v_0,v_2] + [v_0,v_1]$ ⇝ "∂_n recorre el borde de forma orientada"

Lema: $\Delta_\bullet(X) : \dots \to \Delta_n(X) \xrightarrow{\partial_n} \Delta_{n-1}(X) \xrightarrow{\partial_{n-1}} \Delta_{n-2}(X) \to \dots \to \Delta_0(X) \to 0$ es un complejo de cadenas.

Dem: Sea $\sum n_\alpha \sigma_\alpha \in \Delta_n(X)$. Por linealidad, basta probar que para un $\sigma_\alpha =: \sigma$ se tiene $\partial_{n-1}(\partial_n(\sigma))$ es cero. Aquí, $\partial_n(\sigma) = \sum_{i=0}^{n}(-1)^i\,\sigma|_{[v_0,\dots,\hat{v}_i,\dots,v_n]}$ y $(\partial_{n-1}\circ\partial_n)(\sigma) = \sum_i (-1)^i\,\partial_{n-1}(\sigma|_{[v_0,\dots,\hat{v}_i,\dots,v_n]})$

$$\Rightarrow (\partial_{n-1}\circ\partial_n)(\sigma) = \sum_i (-1)^i \sum_{j<i}(-1)^j\,\sigma|_{[v_0,\dots,\hat{v}_j,\dots,\hat{v}_i,\dots,v_n]} + \sum_i(-1)^i\sum_{j>i}\overset{\leftarrow\ \text{posición } j-1}{(-1)^{j-1}}\,\sigma|_{[v_0,\dots,\hat{v}_i,\dots,\hat{v}_j,\dots,v_n]}$$

$$= \sum_{j<i}(-1)^i(-1)^j\,\sigma|_{[v_0,\dots,\hat{v}_j,\dots,\hat{v}_i,\dots,v_n]} - \sum_{k<l}(-1)^k(-1)^l\,\sigma|_{[v_0,\dots,\hat{v}_k,\dots,\hat{v}_l,\dots,v_n]} \equiv 0 \quad ■$$

Def: Sea X un Δ-complejo y sea $n \in \mathbb{N}$. El n-ésimo grupo de homología simplicial de X es el n-ésimo grupo de homología del complejo $\Delta_\bullet(X)$, i.e., $H_n^\Delta(X) := H_n(\Delta_\bullet(X)) \overset{def}{=} \ker(\partial_n)/\mathrm{Im}(\partial_{n+1})$.

⚠ Por construcción, si $\dim(X) := \max\{n\in\mathbb{N},\ \Delta_\alpha \text{ es un } n\text{-símplice}\}$ entonces $H_i^\Delta(X) = 0$ para todo $i > \dim(X)$ (pues $\Delta_i(X) \overset{def}{=} \{0\}$). Pero no es evidente que $X \cong Y \Rightarrow H_n^\Delta(X) \cong H_n^\Delta(Y)$.

Ejemplo: Sea $X = [v_0,v_1]/\sim\ \cong S^1$ con $v_0 \sim v_1$. Así, X tiene un vértice $v = v_0 = v_1$ 

y una única arista e, i.e., $\Delta_0(X) = \mathbb{Z}v$, $\Delta_1(X) = \mathbb{Z}e$ y $\Delta_n(X) = 0\ \forall n \geq 2$.

$\Delta_\bullet(X) : \dots \to 0 \xrightarrow{\partial_2} \Delta_1(X) = \mathbb{Z}e \xrightarrow{\partial_1} \Delta_0(X) = \mathbb{Z}v \xrightarrow{\partial_0} 0$ con $\partial_1(e) = \partial_1([v_0,v_1]) = [v_1]-[v_0] = [v]-[v] = 0$, i.e., $\partial_1 \equiv 0$. Así: $\mathrm{Im}(\partial_2) = \{0\}$, $\ker(\partial_1) = \mathbb{Z}e$, $\mathrm{Im}(\partial_1) = \{0\}$, $\ker(\partial_0) = \mathbb{Z}v$

$\Rightarrow H_0^\Delta(S^1) = \mathbb{Z}v \cong \mathbb{Z}$, $H_1^\Delta(S^1) = \mathbb{Z}e \cong \mathbb{Z}$, $H_i^\Delta(S^1) = \{0\}\ \forall i \geq 2$.

Ejercicio: Pruebe que con la estructura de Δ-complejo de $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ dada antes, $H_1^\Delta(\mathbb{P}^2(\mathbb{R})) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

§13. Homología singular

Sea X un espacio topológico. Tal como antes, $\Delta^n = \{(t_0,\dots,t_n)\in\mathbb{R}^{n+1},\ \sum_{i=0}^{n} t_i = 1 \text{ y } t_i \geq 0\ \forall i\}$.

Def: Un n-símplice singular en X es un mapeo $\sigma : \Delta^n \to X$. Denotamos por $C_n(X)$ al grupo abeliano libre generado por los n-símplices singulares, y definimos la función borde $\partial_n : C_n(X) \to C_{n-1}(X)$, $\sigma \mapsto \sum_{i=0}^{n}(-1)^i\,\sigma|_{[v_0,\dots,\hat{v}_i,\dots,v_n]}$ donde identificamos $[v_0,\dots,\hat{v}_i,\dots,v_n]$ con Δ^{n-1} vía el homeomorfismo lineal canónico.

Obs: ① El adjetivo singular se refiere a que σ no es necesariamente un homeo de $\mathrm{int}(\Delta^n)$ a su imagen.
② El grupo $C_n(X)$ es mucho más grande que los $\Delta_n(X)$ (e.g. típicamente no es fin. generado).
③ Tal como antes, $C_\bullet(X) : \dots \to C_n(X) \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1}(X) \to \dots \to C_0(X) \to 0$ es un complejo de cadenas.

Def: Sea X un espacio topológico y sea $n \in \mathbb{N}$. El n-ésimo grupo de homología singular de X es el n-ésimo grupo de homología de $C_\bullet(X)$, i.e., $H_n(X) := H_n(X,\mathbb{Z}) := H_n(C_\bullet(X)) \overset{def}{=} \ker(\partial_n)/\mathrm{Im}(\partial_{n+1})$.

⚠ Por construcción, el grupo $H_n(X)$ es invariante por homeomorfismo. Pero no es evidente que si X es homeo. a un Δ-complejo de dimensión n_0 entonces $H_i(X) = 0\ \forall i > n_0$.

Prop: Sea X esp. top y sean $\{X_\alpha\}_{\alpha\in I}$ sus componentes conexas por caminos, entonces para todo $n\in\mathbb{N}$ se tiene que $H_n(X) \cong \bigoplus_{\alpha\in I} H_n(X_\alpha)$.

Dem: Si $\sigma : \Delta^n \to X$ mapeo, entonces $\sigma(\Delta^n)$ conexo por caminos (pues Δ^n lo es) y así $\sigma(\Delta^n) \subseteq X_\alpha$ para algún α. Así, $C_n(X) \cong \bigoplus_{\alpha\in I} C_n(X_\alpha)$. Además, si $\sigma \in C_n(X_\alpha)$ entonces $\partial_n(\sigma) \in C_{n-1}(X_\alpha)$ y luego $\ker(\partial_n)$ e $\mathrm{Im}(\partial_{n+1})$ se descomponen en suma directa, y luego sus cocientes también ■