Ayudantía 1 Topología

Repaso topología general

18 de marzo de 2024

Problema 1. (topología cociente inducida) Sea X un espacio topológico y $\mathscr{R}$ una relación de equivalencia en X, y sea $\pi : X \to X/\mathscr{R}$ la proyección canónica. Sea $A \subseteq X$ un subconjunto arbitrario y $\mathscr{R}_A := \mathscr{R} \cap (A \times A)$ la relación de equivalencia inducida en A. Así, hay una inclusión continua $A/\mathscr{R}_A \hookrightarrow X/\mathscr{R}$. Suponga que alguna de las condiciones siguientes se verifica

1. Todo abierto saturado de A es la traza sobre A de un abierto saturado de X.
2. A es abierto y π es una función abierta.
3. A es cerrado y π es una función cerrada.
4. La restricción $\pi|_A : A \to X/\mathscr{R}$ es una función abierta.
5. La restricción $\pi|_A : A \to X/\mathscr{R}$ es una función cerrada.

y demuestre que la topología cociente de $A/\mathscr{R}_A$ coincide con la topología inducida por $X/\mathscr{R}$. ¿Qué ocurre si $X = \mathbb{R}$, si $\mathscr{R}$ está dada por $x \sim_{\mathscr{R}} y \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Z}$ y si $A = [0, 1[$ o $A = [0, 1]$?

Definición 1. Decimos que un espacio topológico X es normal si es Hausdorff y si para todo par de cerrados $F, F' \subseteq X$ disjuntos existen abiertos disjuntos U, U' de X tales que $F \subseteq U$ y $F' \subseteq U'$.

Problema 2. El objetivo de este problema es probar propiedades básicas relacionadas con la propiedad de normalidad, en particular para el caso de cocientes y unión disjunta.

1. Probar que un espacio topológico compacto es normal.
2. Sea X un espacio topológico normal. Probar que si $F \subseteq X$ es un cerrado y $U \subseteq X$ es un abierto tal que $F \subseteq U$, entonces existe un abierto $V \subseteq X$ tal que $F \subseteq V \subseteq \bar{V} \subseteq U$.
3. Sea X un espacio topológico normal y sea $\mathscr{R}$ una relación de equivalencia en X tal que la proyección canónica $\pi : X \to X/\mathscr{R}$ es una función cerrada. Probar que $X/\mathscr{R}$ es normal (luego, Hausdorff).
4. Sea X un espacio topológico compacto y sea $\mathscr{R}$ una relación de equivalencia en X. Probar que $X/\mathscr{R}$ es compacto.
5. Probar que la unión disjunta de espacios topológicos normales es normal.

Definición 2.(grupo topológico) Un grupo topológico G es un grupo dotado de una topología satisfaciendo las siguientes condiciones:

1. La ley de grupo
$$m : G \times G \to G, \quad (g, h) \mapsto gh$$
es continua, considerando la topología producto en $G \times G$.
2. La inversión
$$i : G \to G, \quad g \mapsto g^{-1}$$
es continua.

Problema 3. El objetivo de este problema es probar algunas propiedades de grupos topológicos. Para ello considere G un grupo topológico y $H \subseteq G$ un subgrupo.

1. Muestre que $\overline{H}$ es también un subgrupo.
2. Demuestre que si dotamos al grupo cociente G/H de la topología cociente (i.e., la topología final asociada a la proyección al cociente $\pi : G \twoheadrightarrow G/H$), entonces π es una aplicación abierta.
3. Pruebe que si H es un subgrupo normal entonces $\overline{H}$ también.
4. Pruebe que si H es normal, entonces G/H dotado de la topología cociente es un grupo topológico.
5. Demuestre que si G es conexo y $U \subseteq G$ es una vecindad de la identidad e, entonces G es generado por U.