Profesor: Pedro Montero
Ayudante: Sebastián Fuentes

Ayudantía 12 Topología Pauta

Cohomología

24 de junio de 2024

Definición 1. Sea A un anillo, M un A-módulo. Una resolución libre de M es una sucesión exacta de A-módulos:

$$\cdots \longrightarrow F_2 \xrightarrow{f_2} F_1 \xrightarrow{f_1} F_0 \xrightarrow{f_0} G \longrightarrow 0$$

donde cada F_i es un A-módulo libre.

Lema 2. *1. Dados $A-$módulos H, H' y resoluciones libres $F_\bullet, F'_\bullet$ de cada uno, todo morfismo $\alpha : H \to H'$ se extiende a un morfismo de complejos:*

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & F_2 \arrow[r] \arrow[d] & F_1 \arrow[r] \arrow[d] & F_0 \arrow[r] \arrow[d] & H \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"] & 0 \\
\cdots \arrow[r] & F'_2 \arrow[r] & F'_1 \arrow[r] & F'_0 \arrow[r] & H' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Más aún, todo par de extensiones de α son homotópicas.

2. Para cualquier par de resoluciones libres $F_\bullet, F'_\bullet$ de H hay isomorfismos canónicos $H^n(F_\bullet; G) \cong H^n(F'_\bullet, G)$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Problema 1. (*Functor Ext*) El objetivo de este problema es probar propiedades básicas del functor EXT definido en clases.

1. Muestre que $\mathrm{Ext}(H, G)$ define un functor contravariante en H y covariante en G.
2. Pruebe que los mapeos $G \xrightarrow{n} G, H \xrightarrow{n} H$ inducen la multiplicación por n en $\mathrm{Ext}(H, G)$.
3. Considerando $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ como $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$-módulo, construya una resolución libre y muestre que $\mathrm{Ext}^n_{\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \neq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Demostración.

1. Sea $f : H_1 \to H_2$ morfismo de grupos, $F_\bullet \to H_1, F'_\bullet \to H_2$ resoluciones libres de H_1, H_2. Por el Lema f induce un morfismo de complejos:

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & F_2 \arrow[r] \arrow[d, "f_2"] & F_1 \arrow[r] \arrow[d, "f_1"] & F_0 \arrow[r] \arrow[d, "f_0"] & H_1 \arrow[r] \arrow[d, "f"] & 0 \\
\cdots \arrow[r] & F'_2 \arrow[r] & F'_1 \arrow[r] & F'_0 \arrow[r] & H_2 \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Podemos aplicar el functor $\mathrm{Hom}(-, G)$ al diagrama anterior para obtener el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}(H_2, G) \arrow[r] \arrow[d, "f^*"] & \mathrm{Hom}(F'_0, G) \arrow[r] \arrow[d, "f_0^*"] & \mathrm{Hom}(F'_1, G) \arrow[r] \arrow[d, "f_1^*"] & \mathrm{Hom}(F'_2, G) \arrow[r] \arrow[d, "f_2^*"] & \cdots \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}(H_1, G) \arrow[r] & \mathrm{Hom}(F_0, G) \arrow[r] & \mathrm{Hom}(F_1, G) \arrow[r] & \mathrm{Hom}(F_2, G) \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Dado que tenemos un mapeo de complejos de cocadenas, hay morfismos inducidos en cohomología:

$$f^* : H^*\left(\mathrm{Hom}\left(F'_\bullet, G\right)\right) \to H^*\left(\mathrm{Hom}\left(F_\bullet, G\right)\right).$$

Por definición $H^1(\operatorname{Hom}(F_\bullet, G)) \cong \operatorname{Ext}(H_1, G)$ y $H^1(\operatorname{Hom}(F'_\bullet, G)) \cong \operatorname{Ext}(H_2, G)$, obteniendo así un morfismo inducido:

$$\operatorname{Ext}(f, G) : \operatorname{Ext}(H_2, G) \to \operatorname{Ext}(H_1, G)$$

Por el Lema, este morfismo está bien definido. Necesitamos probar ahora que si $H_1 \xrightarrow{f} H_2 \xrightarrow{g} H_3$, entonces

$$\operatorname{Ext}(g \circ f, G) = \operatorname{Ext}(f, G) \circ \operatorname{Ext}(g, G)$$

Para lo anterior basta notar que si consideramos $F_\bullet \to H_1, F'_\bullet \to H_2, F''_\bullet \to H_3$ resoluciones libres, existen morfismos de complejos inducidos por f, g y $g \circ f$, i.e., tenemos $f_i : F_i \to F'_i, g_i : F'_i \to F''_i$, así como también una extensión $(g \circ f)_i : F_i \to F''_i$ inducida por $g \circ f$. Notando que las composiciones $g_i \circ f_i$ también definen un morfismo de complejos, por unicidad los morfismos de complejos $(g \circ f)_i$ y $g_i \circ f_i$ son homotópicos, y por lo tanto al dualizar y considerar grupos de cohomología se obtendrá el mismo morfismo.
El caso covariante es similar y se deja como ejercicio propuesto.

2. Consideremos el mapeo $\alpha : H \to H, h \mapsto nh$. Consideramos una resolución libre de la forma $0 \to F_1 \to F_0 \to H$ (ver página 2 apunte). Tenemos un morfismo de complejos:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & F_1 \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"] & F_0 \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"] & H \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"] & 0 \\
0 \arrow[r] & F_1 \arrow[r] & F_0 \arrow[r] & H \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Dualizando obtenemos:

$$\begin{tikzcd}
0 & \operatorname{Hom}(F_1, G) \arrow[l] \arrow[d, "\alpha^*"] & \operatorname{Hom}(F_0, G) \arrow[l, "\varphi"'] \arrow[d, "\alpha^*"] & \operatorname{Hom}(H, G) \arrow[l] \arrow[d, "\alpha^*"] & 0 \arrow[l] \\
0 & \operatorname{Hom}(F_1, G) \arrow[l] & \operatorname{Hom}(F_0, G) \arrow[l] & \operatorname{Hom}(H, G) \arrow[l] & 0 \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

donde por definición $\alpha^*(f)(x) = f(nx) = nf(x)$, y por tanto el morfismo inducido entre los grupos Ext será:

$$\operatorname{Ext}(\alpha) : \operatorname{Ext}(H, G) := \operatorname{Hom}(F_1, G)/\operatorname{Im}(\varphi) \to \operatorname{Ext}(H, G), \quad [f] \mapsto [\alpha^*(f)] = [nf] = n[f]$$

3. Naturalmente $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$, por lo tanto la estructura de $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$-módulo debe venir dada por la multiplicación de enteros módulo 4, i.e., $[2]_4 \cdot [1]_2 = [2]_2 = [0]_2, [3]_4 \cdot [1]_2 = [3]_2 = [1]_2$. Notando que todo módulo es libre sobre sí mismo, tenemos la siguiente resolución libre:

$$\cdots \xrightarrow{2} \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \xrightarrow{2} \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \xrightarrow{2} \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \xrightarrow{1} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to 0,$$

Observando que $\operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}_4}(\mathbb{Z}_4, \mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2$, al dualizar el complejo anterior los mapeos 2 se vuelven nulos, obteniendo:

$$\cdots \longleftarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \xleftarrow{0} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \longleftarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \longleftarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \longleftarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \longleftarrow 0.$$

Concluimos así que $\operatorname{Ext}^n_{\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

$\square$

Problema 2. Sea X espacio topológico. Demuestre que el grupo de cohomología entera $H^1(X;\mathbb{Z})$ es libre de torsión.

Demostración. Por el teorema de coeficientes universales tenemos una sucesión exacta corta:

$$0 \to \operatorname{Ext}(H_0(X),\mathbb{Z}) \to H^1(X,\mathbb{Z}) \to \operatorname{Hom}(H_1(X),\mathbb{Z}) \to 0.$$

Como $H_0(X)$ es un grupo abeliano libre, se tiene que $\operatorname{Ext}(H_0(X),\mathbb{Z}) = 0$, y por lo tanto

$$H^1(X,\mathbb{Z}) \cong \operatorname{Hom}(H_1(X),\mathbb{Z}).$$

Basta notar entonces que $\operatorname{Hom}(H_1(X),\mathbb{Z})$ es libre de torsión pues son morfismos con valores en $\mathbb{Z}$.

□

Problema 3. En este problema se asumen conocidos los anillos de cohomología del espacio proyectivo real $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ con coeficientes en el cuerpo finito $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ (Tarea 7), siendo

$$H^*(\mathbb{P}^n(\mathbb{R});\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})[\alpha]/\left(\alpha^{n+1}\right)$$

con $\deg(\alpha) = 1$.

1. Muestre que todo mapeo $\mathbb{P}^n(\mathbb{R}) \to \mathbb{P}^m(\mathbb{R})$ induce el morfismo trivial $\varphi : H^1(\mathbb{P}^m(\mathbb{R});\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \to H^1(\mathbb{P}^n(\mathbb{R});\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ si $n > m$.

2. Demuestre el **Teorema de Borsuk-Ulam:** *Para todo mapeo $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{R}^n$ existe $x \in \mathbb{S}^n$ tal que $f(x) = f(-x)$.* Para ello, asuma por contradicción que no se cumple el enunciado, defina

$$g : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^{n-1}, \quad x \mapsto \frac{f(x) - f(-x)}{\|f(x) - f(-x)\|}$$

y utilice la naturalidad del teorema del coeficiente universal junto con el Teorema de Hurewicz de manera adecuada:

Teorema (Hurewicz)**.** *Si X es conexo por caminos y $\pi_1(X)$ es abeliano, existe un isomorfismo natural $h_* : \pi_1(X) \xrightarrow{\sim} H_1(X)$.*

3. Considere un cubrimiento $\mathbb{S}^n = \bigcup_i C_i$ de la esfera consistente de $n+1$ cerrados. Demuestre que existe i tal que C_i contiene un punto x y su antípoda $-x$.
Indicación: Utilice el *Lema de Urysohn:* Sea X espacio normal, $C \subseteq X$ cerrado y $C \subseteq U$ abierto. Entonces existe un mapeo $f : X \to [0,1]$ tal que $f|_C = 0$ y $f|_{X\setminus U} = 1$.

Demostración.

1. Consideremos $\alpha \in H^1(\mathbb{P}^m(\mathbb{R});\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}), \beta \in H^1(\mathbb{P}^n(\mathbb{R});\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ generadores de cada anillo. Dado que el morfismo inducido entre anillos de cohomología por un mapeo a nivel de espacios es un morfismo de anillos graduados (i.e., respeta la graduación), si φ no fuese trivial necesariamente se tendría que $\varphi(\alpha) = \beta$. Luego

$$\beta^n = \varphi(\alpha)^n = \varphi(\alpha^n)$$

la cual supone una contradicción, pues $\beta^n \neq 0$ en $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})[\beta]/(\alpha^{n+1})$, pero $\alpha^n = 0$ en $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})[\alpha]/(\alpha^{m+1})$ al ser $n > m$.

2. Supondremos por contradicción que $f(x) \neq f(-x)$ para todo $x \in \mathbb{S}^n$. Podemos definir entonces

$$g : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^{n-1}, \quad x \mapsto \frac{f(x) - f(-x)}{\|f(x) - f(-x)\|}$$

Es claro que $g(-x) = -g(x)$ para todo $x \in \mathbb{S}^n$. Por lo tanto, recordando que $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ corresponde al cociente de la esfera por puntos antipodales, el mapeo g es compatible con los mapeos cocientes y por tanto induce un mapeo $\overline{g} : \mathbb{P}^n(\mathbb{R}) \to \mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{R})$. Esto se observa en el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{S}^n \arrow[r, "g"] \arrow[d] & \mathbb{S}^{n-1} \arrow[d] \\ \mathbb{P}^n(\mathbb{R}) \arrow[r, "\overline{g}"] & \mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{R}) \end{tikzcd}$$

donde las flechas verticales son justamente los cubrimientos universales de cada espacio proyectivo. Dado entonces un generador de $\pi_1(\mathbb{P}^n(\mathbb{R}), [x])$, este se levanta a un camino no trivial e $\mathbb{S}^n$, el cual por tanto corresponde a un camino $x \rightsquigarrow (-x)$. Ahora, la imagen de dicho camino por g es no trivial, pues es un camino $g(x) \rightsquigarrow -g(x)$. Por lo tanto, la imagen de dicho camino en $\mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{R})$ es un lazo no nulo (por ser $\mathbb{S}^{n-1}$ cubrimiento universal), y por lo tanto concluimos que el morfismo $\overline{g}_* : \pi_1(\mathbb{P}^n(\mathbb{R})) \to \pi_1(\mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{R}))$ es no trivial. Analizamos diferentes casos dependiendo de n:

a) Si $n = 1$, $\mathbb{P}^0(\mathbb{R}) = \{*\}$ es un punto, y existe una contradicción pues claramente todo morfismo $\mathbb{Z} \to 0$ es trivial.

b) Si $n = 2$, sabemos que todo morfismo $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ es trivial.

Los casos anteriores implican entonces que para $n = 1, 2$ se tiene el teorema.
Si $n > 2$, el teorema de Hurewicz implica que hay isomorfismos

$$\begin{tikzcd} \pi_1(\mathbb{P}^n(\mathbb{R})) \arrow[r, "g_*"] \arrow[d, "\simeq"] & \pi_1(\mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{R})) \arrow[d, "\simeq"] \\ H_1(\mathbb{P}^n(\mathbb{R})) \arrow[r, "g_*"] & H_1(\mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{R})) \end{tikzcd}$$

lo cual implica que el morfismo inducido por g en H_1 es no trivial, y por lo tanto es un isomorfismo (puesto que $H_1(\mathbb{P}^n(\mathbb{R})) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$).
De la misma forma que en el Problema 2. y por naturalidad del TCU tenemos:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & H^1\left(\mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{R}); \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\right) \arrow[r] \arrow[d, "g^*"] & H^1\left(\mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{R}); \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\right) \arrow[r] \arrow[d, "(g_*)^*"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & H^1\left(\mathbb{P}^{n}(\mathbb{R}); \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\right) \arrow[r] & H^1\left(\mathbb{P}^{n}(\mathbb{R}); \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\right) \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Dado que g_* es un isomorfismo, el diagrama anterior muestra que g^* es un isomorfismo también, lo cual supone una contradicción con 1..

3. Asumimos por contradicción que $C_i \cap (-C_i) = \emptyset$ para todo $1 \leq i \leq n$. Por el Lema de Urysohn existen mapeos $f_i : \mathbb{S}^n \to [0, 1]$ tales que $f_i|_{C_i} = 0$ y $f_i|_{-C_i} = 1$. Definimos $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{R}^n$ como $f = (f_1, \ldots, f_n)$. El teorema de Borsuk-Ulam afirma que existe $x \in \mathbb{S}^n$ tal que $f(x) = f(-x)$. Claramente $x \notin C_i$ para todo $i = 1, \ldots, n$ ni tampoco $-x$, por lo tanto $x, -x \in C_{n+1}$.

$\square$