Profesor: Pedro Montero
Ayudante: Sebastián Fuentes

Ayudantía 11 Topología Pauta

Cálculo de homología celular

3 de junio de 2024

Problema 1. Demuestre que para el subespacio $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ el grupo de homología relativa $H_1(\mathbb{R}, \mathbb{Q})$ es un grupo abeliano libre. Encuentre una base de dicho grupo.

Demostración. Probemos en primer lugar que es libre. Para ello consideramos la sucesión exacta larga en homología reducida,

$$\cdots \to \widetilde{H}_n(\mathbb{Q}) \to \widetilde{H}_n(\mathbb{R}) \to \widetilde{H}_n(\mathbb{R}, \mathbb{Q}) \to \widetilde{H}_{n-1}(\mathbb{Q}) \to \cdots$$

Notar que $\mathbb{Q}$ es totalmente disconexo, i.e., todo punto $x \in \mathbb{Q}$ es una componente conexa, y por lo tanto

$$\widetilde{H}_n(\mathbb{Q}) = \begin{cases} \oplus_{x \in \mathbb{Q}} \mathbb{Z} & \text{si } n = 0 \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases}$$

Además, como $\mathbb{R}$ es contractible $\widetilde{H}_n(\mathbb{R}) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Así, en $n = 0$ la sucesión exacta larga en homología luce de la siguiente manera:

$$0 \to \widetilde{H}_1(\mathbb{R}, \mathbb{Q}) \to \widetilde{H}_0(\mathbb{Q}) \to \widetilde{H}_0(\mathbb{R}) = 0 \to 0$$

así que

$$H_1(\mathbb{R}, \mathbb{Q}) = \widetilde{H}_1(\mathbb{R}, \mathbb{Q}) = \oplus_{x \in \mathbb{Q}} \mathbb{Z}$$

Buscaremos ahora una base, para lo cual debemos entender el explicitamente el grupo $H_1(\mathbb{R}, \mathbb{Q})$. Para ello, notemos que si consideramos la sucesión exacta larga no reducida tenemos

$$0 \hookrightarrow H_1(\mathbb{R}, \mathbb{Q}) \to H_0(\mathbb{Q}) \xrightarrow{i_*} H_0(\mathbb{R})$$

donde $i_* : H_0(\mathbb{Q}) \to H_0(\mathbb{R})$ corresponde al morfismo inducido por la inclusión $i : \mathbb{Q} \hookrightarrow \mathbb{R}$. De manera explícita,

$$H_0(\mathbb{Q}) = \bigoplus_{x \in \mathbb{Q}} \mathbb{Z}[x]_{\mathbb{Q}}$$

es el grupo abeliano libre generado por las clases de homología de puntos en $H_0(\mathbb{Q})$ (pensados como 0-símplices), y en este grupo todos los puntos son homológicamente no equivalentes (i.e., $[x] \nsim [y]$ para todos $x, y \in \mathbb{Q}$ con $x \neq y$), puesto que todo mapeo continuo $\Delta_1 \to \mathbb{Q}$ es constante por ser $\mathbb{Q}$ totalmente disconexo. Sin embargo, en $H_0(\mathbb{R})$ todos los puntos son equivalentes, y por lo tanto bajo el mapeo[1]

$$i_* : H_0(\mathbb{Q}) \to H_0(\mathbb{R}), \quad [x]_{\mathbb{Q}} \mapsto [x]_{\mathbb{R}}$$

todos los puntos van a parar al generador de $H_0(\mathbb{R})$. Así,

$$H_1(\mathbb{R}, \mathbb{Q}) = \ker(i_*) = \langle [x]_{\mathbb{Q}} - [y]_{\mathbb{Q}} | x, y \in \mathbb{Q} \rangle \bigoplus_{x \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}} \mathbb{Z}([x]_{\mathbb{Q}} - [0]_{\mathbb{Q}})$$

donde $H_0(\mathbb{Q}) = \bigoplus_{x \in \mathbb{Q}} \mathbb{Z}[x]$ es el grupo abeliano generado por todos los puntos en $\mathbb{Q}$, pensados como 0-símplices. Así, $\{[p] - [0] | \quad p \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}\}$ es una base de $H_1(\mathbb{R}, \mathbb{Q})$.

□

[1] La notación $[x]_{\mathbb{Q}}$ hace referencia a la clase de x en el grupo de homología $H_0(\mathbb{Q})$, mientras que $[x]_{\mathbb{R}}$ hace referencia a $H_0(\mathbb{R})$.

Problema 2. Sea X un espacio el cual es la unión de abiertos $A_1, \ldots, A_n$ los cuales poseen la propiedad de que cualquier intersección $A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}$ es vacía o tiene grupos de homología reducida trivial. Pruebe que $\widetilde{H}_i(X) = 0$ para $i \geq n-1$. Dé un ejemplo que muestre que el índice $n-1$ es minimal.

Demostración. Procederemos por inducción en n. El caso $n=1$ es obvio. Asumiremos que la conclusión es cierta para $n-1$ y denotemos $Y = A_1 \cup \cdots \cup A_{n-1}$. La sucesión de Mayer-Vietoris con (Y, A_n) da que

$$\ldots \to \tilde{H}_i\left(Y \cap A_n\right) \to \tilde{H}_i(Y) \oplus \tilde{H}_i\left(A_n\right) \to \tilde{H}_i(X) \to \tilde{H}_{i-1}\left(Y \cap A_n\right) \to \ldots$$

Dado que cada $A_k \cap A_n$ es abierto, $Y \cap A_n$ es la unión de a lo más $n-1$ abiertos de esta forma. La hipótesis asume que la intersección de cualquier colección de abiertos A_i tiene homología trivial, por lo tanto tenemos que la hipótesis de inducción aplica a $Y \cap A_n$, obteniendo que $\tilde{H}_i\left(Y \cap A_n\right) \simeq 0$ para todo $i \geq n-2$ así que

$$\ldots \to 0 \to \tilde{H}_i(Y) \oplus \tilde{H}_i\left(A_n\right) \to \tilde{H}_i(X) \to 0 \to \ldots$$

vale para todo $i \geq n-1$, y por tanto en dicho caso $\tilde{H}_i(Y) \oplus \tilde{H}_i\left(A_n\right) \simeq \tilde{H}_i(X)$. La hipótesis de inducción implica también que

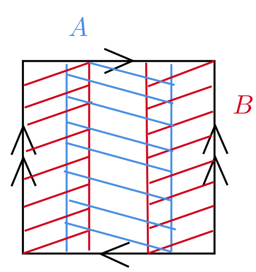
$$\tilde{H}_i(Y) = \tilde{H}_i\left(A_1 \cup \ldots \cup A_{n-1}\right) \simeq 0$$

para $i \geq n-2$, y también por hipótesis $\widetilde{H}_i\left(A_n\right) \simeq 0$ para $i \geq 0$. Obtenemos así la conclusión.
Para dar un contraejemplo, para $n \geq 3$ consideremos la esfera $\mathbb{S}^{n-2} \cong \partial\Delta^{n-1}$ pensada como el borde del $(n-1)$-símplice. Este espacio verifica $\widetilde{H}_{n-2}(\mathbb{S}^{n-2}) = \mathbb{Z}$, sin embargo es posible encontrar un cubrimiento abierto. Notemos que $\partial\Delta^{n-1}$ posee n caras, por tanto podemos considerar una vecindad abierta de cada cara, lo suficientemente pequeña como para que las intersecciones se puedan retractar a una cara de dimensión menor. Esto muestra entonces que el índice $n-1$ no se puede bajar.

□

Problema 3. Considere la botella de Klein K, definida como $K = I^2/\sim$ donde $(0,y) \sim (1,y)$ para $0 \leq y \leq 1$ y $(x,0) \sim (1-x,1)$ para $0 \leq x \leq 1$. Usando la sucesión exacta de Mayer-Vietoris calcule los grupos de homología de K.

Demostración. Para utilizar la sucesión de Mayer-Vietoris, descompondremos el espacio en los siguientes abiertos:



i.e., la descomposición consiste de dos bandas de Möebius A y B las cuales se intersectan. En la Ayudantía 2 probamos que la banda de Möebius es homotópicamente equivalente a $\mathbb{S}^1$ construyendo un retracto, así que $H_n(A), H_n(B)$ son isomorfos a $H_n(K)$ para cada $n \geq 0$. De forma similar, notamos que también $A \cap B \simeq \mathbb{S}^1$. Luego la sucesión exacta de Mayer-Vietoris para $n \geq 2$

$$H_n\left(S^1\right) \oplus H_n\left(S^1\right) \to H_n(X) \to H_{n-1}\left(S^1\right) \to H_{n-1}\left(S^1\right) \oplus H_{n-1}\left(S^1\right)$$

da que $H^n(X) \neq 0$ para $n > 2$. En $n=2$ tenemos

$$H_2\left(S^1\right) \oplus H_2\left(S^1\right) \to H_2(X) \to H_1\left(S^1\right) \to H_1\left(S^1\right) \oplus H_1\left(S^1\right) \to H_1(X) \to 0$$

y por tanto luce de la siguiente manera

$$0 \to H_2(K) \to \mathbb{Z} \xrightarrow{f} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \xrightarrow{g} H_1(X) \xrightarrow{h} 0$$

Notar que el morfismo f está dado por $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}, 1 \mapsto (2,-2)$ y este mapeo es inyectivo, por lo tanto $H_2(X) = 0$.

La imagen de f viene dada por $\operatorname{Im}(f) = 2\mathbb{Z}(1,-1) = \ker(g)$, por ende $H_1(X) = (\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z})/2\mathbb{Z}(1,-1)$. Como $\{(1,0),(1,-1)\}$ es una base de $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$, calculamos que $H_1(X) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Además, $H_0(K) = \mathbb{Z}$.

□

Problema 4. Calcule los grupos de homología del espacio X obtenido al pegar 3 n-discos a lo largo del sus bordes.

Demostración. Denotemos por $D_1, D_2, D_3 \subseteq X$ los n-discos. Consideraremos la partición $A = D_1 \cup D_2, B = D_2 \cup D_3$, teniendo asi $X = A \cup B$. Tenemos que $A \cong B \cong \mathbb{S}^n$, mientras que $A \cap B = D_2$ es un n-disco. De esta forma, tenemos que $H_k(A \cap B)$ es trivial excepto en grado 0, y $H_k(A) = H_k(B)$ son triviales excepto en grado 0 y n. Dada la sucesión de Mayer-Vietoris

$$0 \to H_k(A \cap B) \to H_k(A) \oplus H_k(B) \to H_k(X) \to H_{k-1}(A \cap B) \to \dots$$

lo anterior implica que $H_k(X) \cong H_k(A) \oplus H_k(B)$ para todo $k \geq 2$, y utilizando homología relativa también es válida para $k = 1$. Además, es claro que $H_0(X) \cong \mathbb{Z}$ pues X es conexo por caminos. Hemos calculado así que

$$H_k(X) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & k = 0 \\ \mathbb{Z}^2, & k = n \\ 0, & \text{otro caso} \end{cases}$$

□

Proposición 1 (versión relativa de Mayer-Vietoris)**.** *Sea $(X, Y) = (A \cup B, C \cup D)$ un par, i.e., $Y \subseteq X$ abiertos tal que cada uno posee descomposiciones $X = A \cup B, Y = C \cup D$ y estas verifican que $A \subseteq C, B \subseteq D$. Entonces hay una sucesión exacta*

$$\cdots \longrightarrow H_n(A \cap B, C \cap D) \xrightarrow{\Phi} H_n(A, C) \oplus H_n(B, D) \xrightarrow{\Psi} H_n(X, Y) \xrightarrow{\partial} \cdots$$

Problema 5. El objetivo de este ejercicio es demostrar la fórmula

$$H_i\left(X \times \mathbb{S}^n\right) \approx H_i(X) \oplus H_{i-n}(X)$$

para todo i, n, donde $H_i = 0$ para $i < 0$ por definición. Para ello haga lo siguiente:

1. Muestre que hay isomorfismos
$$H_i\left(X \times \mathbb{S}^n\right) \approx H_i(X) \oplus H_i\left(X \times \mathbb{S}^n, X \times \{x_0\}\right).$$
2. Demuestre que
$$H_i\left(X \times \mathbb{S}^n, X \times \{x_0\}\right) \approx H_{i-1}\left(X \times \mathbb{S}^{n-1}, X \times \{x_0\}\right).$$
3. Concluya.

Demostración.

1. Comencemos notando que hay un retracto $r : X \times \mathbb{S}^n \to X \times \{x_0\}$ dada por $r(x, s) = (x, x_0)$ para cualquier punto $x_0 \in \mathbb{S}^n$, esto es, $r \circ i : \mathrm{id}_{X \times \{x_0\}}$ donde $i : X \times \{x_0\} \hookrightarrow X \times \mathbb{S}^n$ es la inclusión.
Esto implica que la inclusión induce un morfismo inyectivo en homología, y por tanto la sucesión exacta larga en homología escinde en sucesiones exactas cortas
$$0 \to H_i\left(X \times \{x_0\}\right) \to H_i\left(X \times S^n\right) \to H_i\left(X \times \mathbb{S}^n, X \times \{x_0\}\right) \to 0$$
Más aún, el retracto r induce una sección del morfismo en cohomología, y el splitting lemma implica que hay un isomorfismo
$$H_i(X \times \mathbb{S}^n) \cong H_i\left(X \times \{x_0\}\right) \oplus H_i\left(X \times S^n, X \times \{x_0\}\right) \cong H_i(X) \oplus H_i\left(X \times S^n, X \times \{x_0\}\right)$$

2. A continuación, usaremos la descomposición $\mathbb{S}^n = \mathbb{D}^n_+ \cup \mathbb{D}^n_-$ en sus dos hemisferios. Notemos entonces que si denotamos $A = X \times \mathbb{D}^n_+, B = X \times \mathbb{D}^n_-$, $C = D = X \times \{x_0\}$ tendremos las siguientes propiedades de pares.

   a) $(A, C) \simeq (X, X)$.
   b) $(B, D) \simeq (X, X)$.
   c) $(A \cup B, C \cup D) = (X \times \mathbb{S}^n, X \times \{x_0\})$.
   d) $(A \cap B, C \cap D) \simeq \big(X \times \mathbb{S}^{n-1}, X \times \{x_0\}\big)$.

   Lo anterior implica que las grupos de homología relativa

$$H_i(A, C) = H_i(B, C) = H_i(X, X) = 0$$

   se anulan, y luego la versión relativa de la sucesión exacta de Mayer-Vietoris da

$$0 \to H_i(A \cup B, C \cup D) \to H_{i-1}(A \cap B, C \cap D) \to 0$$

   para todo $k \geq 0$. Por tanto concluimos que hay un isomorfismo

$$\begin{aligned} H_i(A \cup B, C \cup D) &\cong H_{i-1}(A \cap B, C \cap D) \\ H_i\left(X \times \mathbb{S}^n, X \times \{x_0\}\right) &\cong H_{i-1}\left(X \times \mathbb{S}^{n-1}, X \times \{x_0\}\right) \end{aligned}$$

3. Iterando el isomorfismo del punto anterior se obtiene que

$$\begin{aligned} H_i\left(X \times \mathbb{S}^n, X \times \{x_0\}\right) &\cong H_{i-n}\left(X \times \mathbb{S}^0, X \times \{x_0\}\right) \\ &\cong H_{i-n}(X \amalg X, X) \\ &\cong H_{i-n}(X) \end{aligned}$$

   donde el último isomorfismo es por el Teorema de Excisión. Este resultado en conjunto con 1. resultan en

$$H_i\left(X \times \mathbb{S}^n\right) \cong H_i(X) \oplus H_{i-n}(X)$$

$\square$