Ayudantía 10 Topología Pauta

Cálculo de homología celular

3 de junio de 2024

En la Ayudantía 9, asociamos a un CW-complejo X un el su complejo de cadenas celulares

$$\ldots \to C_n^{CW}(X) \xrightarrow{d_n} C_{n-1}^{CW}(X) \to \ldots \xrightarrow{d_1} C_0^{CW}(X) \to 0$$

y probamos que el n-ésimo grupo de cadenas celulares $C_n^{CW}(X)$ corresponde al grupo abeliano libre generado por las n-células de la descomposición celular de X. La siguiente proposición nos dice cómo podemos calcular de manera explícita los diferenciales d_n.

Proposición (fórmula del borde celular)**.** *Sea X un CW-complejo. Dada una n-célula e_α^n y su mapeo de pegado $\varphi_\alpha : \partial e_\alpha^n \cong \mathbb{S}^{n-1} \to X^{n-1}$, para una $(n-1)$-célula e_β^{n-1} consideramos la composición*

$$\varphi_{\alpha\beta} : \quad \mathbb{S}_\alpha^{n-1} = \partial e_\alpha^n \xrightarrow{\varphi_\alpha} X^{n-1} \xrightarrow{\pi} \frac{X^{n-1}}{X^{n-1} - \mathrm{int}(e_\beta^{n-1})} \cong \mathbb{S}_\beta^{n-1}$$

donde π denota el mapeo cociente asociado al colapso del subespacio $X^{n-1} - \mathrm{int}(e_\beta^{n-1})$. Si denotamos $d_{\alpha\beta} = \deg(\varphi_{\alpha\beta})$ el grado de dichos mapeos, entonces

$$d_n(e_\alpha^n) = \sum_\beta d_{\alpha\beta} e_\beta^{n-1}$$

Gracias a la Proposición anterior, para calcular homología de CW-complejos deberemos entonces ser capaces de calcular el grado de un mapeo. El Teorema de Excisión permite realizar este cálculo de manera local, lo cual se presenta en la siguiente Proposición[1].

Proposición. *Sea $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ con $n > 0$ un mapeo tal que existe $y \in \mathbb{S}^n$ con $f^{-1}(y) = \{x_1, \ldots, x_m\}$ finito. Si $U_1, \ldots, U_m$ son vecindades disjuntas de $x_1, \ldots, x_m$ tales que $f(U_i \setminus \{x_i\}) \subseteq V \setminus y$ para cierta vecindad V de y, entonces*

$$\deg(f) = \sum_i \deg(f)|_{x_i}$$

donde $\deg(f)|_{x_i}$ denota el grado del mapeo restringido $f|_{U_i \setminus \{x_i\}} : U_i \setminus \{x_i\} \to V \setminus y$.

Problemas

Problema 1 (Homología del espacio proyectivo complejo). Considere el espacio proyectivo complejo $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$, definido como el espacio de líneas a través del origen en $\mathbb{C}^{n+1}$, i.e., $\mathbb{P}^n(\mathbb{C}) = \mathbb{C}^{n+1}/\sim$ donde $(z_0, \ldots, z_n) \sim (z_0', \ldots z_n')$ si y solo si existe $\lambda \in \mathbb{C}^*$ tal que $\lambda z_i = z_i'$ para todo $i = 0, \ldots, n$.

1. Describa una descomposición celular de $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ tal que $X^{2k} = X^{2k+1} \cong \mathbb{P}^k(\mathbb{C})$ para $0 \leq k \leq n$.

2. Demuestre que

$$H_k\left(\mathbb{P}^n(\mathbb{C})\right) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{para } i = 0, 2, 4, \cdots, 2n \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases}$$

[1] ver página 136 de *Algebraic Topology* de Allen Hatcher.

Demostración.

1. Dado $(z_0, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$, denotamos por $[z_0, \ldots, z_n] \in \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ su clase en el cociente i.e., la línea que pasa por el origen y dicho punto. Notar que tenemos inclusiones

$$\{*\} = \mathbb{P}^0(\mathbb{C}) \subseteq \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \subseteq \mathbb{P}^2(\mathbb{C}) \subseteq \ldots$$

donde $\mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{C}) \subseteq \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ es dado por

$$[z_0, \ldots, z_{n-1}] \to [z_0, \ldots, z_{n-1}, 0]$$

Notar entonces que un punto arbitrario de $\mathbb{P}^n(\mathbb{C}) \backslash \mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{C})$ puede ser únicamente representado por $(z_0, \ldots, z_{n-1}, t)$ con $t = \sqrt{1 - \sum z_i \bar{z}_i}$. Esta observación permite definir un mapeo

$$e^{2n} \to \mathbb{P}^n(\mathbb{C}), \quad z = (z_0, \ldots, z_{n-1}) \mapsto [z_0, \ldots, z_{n-1}, t]$$

con $t = \sqrt{1 - \|z\|^2}$. Observar entonces que el borde ∂e^{2n} (correspondiente a $t = 1$) es enviado a $\mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{C})$, de manera que $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ es obtenido desde $\mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{C})$ pegando una $2n$-celula. Inductivamente, $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ posee una estructura celular consistente de una célula para cada dimensión par $0, 2, \ldots, 2n$.

2. La estructura celular encontrada implica que el complejo celular de $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ viene dado por

$$0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{d_{2n}} 0 \xrightarrow{d_{2n-1}} \mathbb{Z} \to \cdots \xrightarrow{d_3} \mathbb{Z} \xrightarrow{d_2} 0 \xrightarrow{d_1} \mathbb{Z} \xrightarrow{d_0} 0$$

de donde se obtienen directamente los grupos de homología.

□

Problema 2 (Homología del espacio proyectivo real). El objetivo de este problema es calcular los grupos de homología del espacio proyectivo real $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$. Para ello proceda como sigue:

1. Demuestre que el mapeo antipodal $a : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n, x \mapsto -x$ tiene grado $\deg(a) = (-1)^{n+1}$.

2. Usando la descomposición celular de $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ (ver Ayudantía 8) y la fórmula del borde celular demuestre que sus grupos de homología son

$$H_k\left(\mathbb{P}^n(\mathbb{R})\right) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{para } k = 0 \text{ y para } k = n \text{ impar} \\ \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & \text{para } k \text{ impar, } 0 < k < n \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases}$$

Demostración.

1. Consideremos en primer lugar la reflexión $r_0 : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n, (x_0, \ldots, x_n) \mapsto (-x_0, \ldots, x_n)$ en la primera coordenada y calculemos su grado. Para ello elegimos un generador de $H_n(\mathbb{S}^n)$, el cual podemos tomar como la clase del ciclo $[U - L]$ donde U denota el hemisferio norte y L el hemisferio sur, pensados como n-símplices. Notar entonces que la reflexión r_0 mapea la cadena $U - L$ en $L - U$. De esta forma,

$$(r_0)_*([U - L]) = [L - U] = -[U - L]$$

de donde $\deg(r_0) = -1$. Finalmente, vemos que $a = r_n \circ r_{n-1} \circ \cdots \circ r_0$ es el resultado de invertir todas las coordenadas, y por tanto

$$\deg(a) = \deg(r_n \circ r_{n-1} \circ \cdots \circ r_0) = \deg(r_n) \cdot \ldots \cdot \deg(r_0) = (-1)^{n+1}$$

2. Vimos en la Ayudantía 8 que $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ posee una descomposición celular consistente de una k-célula para cada $k \leq n$ y los mapeos de pegado son los mapeos cociente $\varphi : \mathbb{S}^{k-1} \to \mathbb{P}^{k-1}(\mathbb{R})$, los cuales son cubrimientos $2:1$.

   Ahora, de acuerdo a la fórmula del borde celular consideramos la composición

$$\mathbb{S}^{k-1} \xrightarrow{\varphi} \mathbb{P}^{k-1}(\mathbb{R}) \xrightarrow{p} \mathbb{P}^{k-1}(\mathbb{R})/\mathbb{P}^{k-2}(\mathbb{R}) = \mathbb{S}^{k-1},$$

   donde $p : \mathbb{P}^{k-1}(\mathbb{R})/\mathbb{P}^{k-2}(\mathbb{R})$ denota el mapeo cociente resultante de colapsar el $(n-1)$-esqueleto menos una $(n-1)$-célula, lo que para esta descomposición particular resulta ser simplemente $X^{n-2} = \mathbb{P}^{k-2}(\mathbb{R})$. Notar ahora que la composición $p \circ \varphi$ se restringe en cada componente de $\mathbb{S}^{k-1} \setminus \mathbb{S}^{k-2}$ a un homeomorfismo hacia $\mathbb{P}^{k-1}(\mathbb{R}) \setminus \mathbb{P}^{k-2}(\mathbb{R})$, donde por $\mathbb{S}^{k-2}$ entendemos al ecuador de la esfera. Además notemos que uno de estos homeomorfismos se obtiene a partir del otro mediante precomposición con el mapeo antipodal de $\mathbb{S}^{k-1}$, el cual tiene grado $(-1)^k$.

   Utilizando el hecho de que el grado se puede calcular de manera local obtenemos que

$$\deg(p \circ \varphi) = 1 + (-1)^k$$

   y por tanto obtenemos la siguiente caracterización del complejo de cadenas celulares

$$\begin{aligned} &0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{2} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \cdots \xrightarrow{2} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \xrightarrow{2} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \to 0 \quad \text{si } n \text{ es par} \\ &0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \xrightarrow{2} \cdots \xrightarrow{2} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \xrightarrow{2} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \to 0 \quad \text{si } n \text{ es impar} \end{aligned}$$

   La conclusión se sigue directamente de lo anterior.

□

Problema 3. Calcule los grupos de homología de los siguientes espacios:

1. el cociente de $\mathbb{S}^2$ obtenido identificando los puntos antipodales de su ecuador $\mathbb{S}^1 \subseteq \mathbb{S}^2$.
2. el cociente de $\mathbb{S}^3$ obtenido identificando los puntos antipodales de su ecuador $\mathbb{S}^2 \subseteq \mathbb{S}^3$.

Solución.

1. Damos en primer lugar una descomposición celular de este espacio, al cual denotamos por X, la cual construiremos en base a la descomposición celular de $\mathbb{S}^2$ modificando el pegado de las 2-células. Consideramos entonces una 0-célula e^0 y una $1-$célula e^1, cuyos extremos deberán ambos pegarse en la 0-célula, obteniendo $X^1 = \mathbb{S}^1$. Pegamos ahora 2 2-células, denotadas D_+, D_- las cuales se pegaran a X^1 a lo largo del mapeo $\mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1, z \mapsto z^2$, obteniendo así el espacio X. Dada la naturaleza local del grado, es directo observar que el mapeo de pegado tiene grado 2. De esta forma, el complejo celular de este espacio corresponde a

$$0 \to \mathbb{Z}\,[D_+] \oplus \mathbb{Z}\,[D_-] \xrightarrow{f} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \to 0$$

   donde la aplicación f corresponde a $D_+ \mapsto 2, D_- \mapsto 2$, y $d_1 = 0$ pues el espacio posee solo una 0-célula y es conexo por caminos (ver Ayudantía 8), i.e., $H_0(X) = \mathbb{Z}$. Deducimos así que

$$H_0(X) = \mathbb{Z}, \quad H_1(X) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \quad H_2(X) = \mathbb{Z}$$

   y $H_n(X) = 0$ para $n \geq 3$, gracias al Problema 2 de la Ayudantía 9.

2. Recordemos que en la Ayudantía 8 dimos una descomposición celular de $\mathbb{S}^3$ consistente de 2 células de cada dimensión, y entonces al identificar el ecuador el espacio resultante es el plano proyectivo real $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ al cual se pegan dos 3-células. Por tanto, el complejo celular de este espacio será el mismo de $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ (el cual se construye adjuntando una 3-célula a $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ por medio del mapeo cociente por puntos antípodas), con la diferencia de que se están adjuntando dos 3-células de esta manera. Por tanto del Problema 2 podemos ver que el complejo celular corresponde a
$$0 \to \mathbb{Z}\,[D_+] \oplus \mathbb{Z}\,[D_-] \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \xrightarrow{2} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \to 0$$
deduciendo directamente que los grupos de homología son:
$$H_0(X) = \mathbb{Z}, \quad H_1(X) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \quad H_2(X) = 0, \quad H_3(X) = \mathbb{Z}^2$$
y $H_n(X) = 0$ para $n \geq 4$.

□

Problema 4. Calcule los grupos de homología del espacio topológico $X = C_1 \cup C_2 \cup C_3 \subseteq \mathbb{R}^3$, donde

- $C_1 = \big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\big\}$,
- $C_2 = \big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 0\big\}$,
- $C_3 = \big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = 0\big\}$.

Solución. Notemos en primer lugar que X es conexo por caminos pues cada C_i lo es y dichos espacios se intersectan. Así, tenemos directamente que $H_0(X) = \mathbb{Z}$ y por tanto podemos realizar todos los cálculos siguientes usando homología reducida, lo cual hará que los cálculos sean mas sencillos.

Calcularemos en primer lugar la homología de la unión $C := C_2 \cup C_3$, notando que estos espacios verifican que $H_0(C_2) = H_0(C_3) = \mathbb{Z}$ y $H_n(C_2) = H_n(C_3) = 0$ para todo $n > 0$, puesto que $C2 \cong C_3 \cong \mathbb{R}^2$.
Utilizaremos la sucesión de Mayer-Vietoris, para lo cual necesitamos un cubrimiento abierto de $C_2 \cup C_3$ (pues Mayer-Vietoris requiere de $X = \operatorname{int}(A) \cup \operatorname{int}(B)$) el cual permita expresar esta homología en términos de las de $C_2 \cup C_3$. Para hacer esto debemos notar que los puntos de $C = C_2 \cap C_3$ no son puntos interiores de C_2 ni de C_3 considerados como subespacios de $C_2 \cup C_3$, por lo cual debemos ampliar estos conjuntos. Para ello fijemos un $\varepsilon > 0$, consideremos los abiertos
$$U_x = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | -\varepsilon \leq x \leq \varepsilon\}, \quad U_y = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | -\varepsilon \leq y \leq \varepsilon\}$$
y notemos que podemos utilizar Mayer-Vietoris con $C_2 \cup (C \cap U_x)$ y $C_3 \cup (C \cap U_y)$

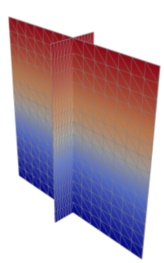


Figura 1: $C_2 \cup (C \cap U_x)$

Notamos ahora que tenemos homotopías:

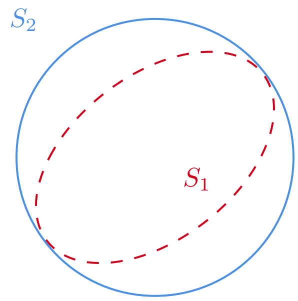
$$C_2 \cup (C \cap U_x) \simeq C_2, \quad C_3 \cup (C \cap U_y) \simeq C_3, \quad (C_2 \cup (C \cap U_x)) \cap (C_3 \cup (C \cap U_y)) \simeq C_2 \cap C_3 \cong \mathbb{R}$$

y dada la invarianza homotópica de los grupos de homología en realidad podemos emplear la sucesión de Mayer-Vietoris con C_2 y C_3. Obtenemos así que $H_0(C) = \mathbb{R}$ pues es conexo por caminos, y:

$$\widetilde{H}_n(C_2 \cap C_3) = 0 \to \widetilde{H}_n(C_2) = 0 \oplus \widetilde{H}_n(C_3) = 0 \to \widetilde{H}_n(C) \to \widetilde{H}_{n-1}(C_2 \cap C_3) = 0$$

para todo $n \geq 1$, así que $H_n(C) = \widetilde{H}_n(C) = 0$ para $n \geq 1$[2].

La idea ahora será utilizar Mayer-Vietoris considerando el cubrimiento $X = C_1 \cup C$ (donde nuevamente se debe tener cuidado de justificar que hay abiertos de esta unión los cuales se pueden contraer homotópicamente a C_1 y C respectivamente)[3]. Notemos ahora que $C_1 \cap C$ corresponde a dos círculos ($x^2 + z^2 = 1$ y $y^2 + z^2 = 1$) los cuales están enganchados en dos puntos (los puntos $(0, 0, \pm 1)$) como en la siguiente figura.



Por lo tanto, para calcular los grupos de homología de X, necesitamos primero calcular los de $C_1 \cap C$ (pues este espacio aparecerá en la sucesión de X con cubrimiento C_1, C). Este espacio posee un cubrimiento natural $C_1 \cap C = S_1 \cup S_2$ donde $S_1 \cong S_2 \cong \mathbb{S}^1$ son homeomorfos al círculo, y por tanto conocemos sus grupos de homología. Usando la sucesión exacta de Mayer-Vietoris en $C_1 \cap C$ obtenemos la sucesión exacta:

$$\widetilde{H}_1(S_1 \cap S_2) = 0 \to \widetilde{H}_1(S_1) = \mathbb{Z} \oplus \widetilde{H}_1(S_2) = \mathbb{Z} \to \widetilde{H}_1(C_1 \cap C) \to \widetilde{H}_0(S_1 \cap S_2) = \mathbb{Z} \to \widetilde{H}_0(\mathbb{S}^1) \oplus \widetilde{H}_0(\mathbb{S}^1) = 0$$

Dado que el término de la derecha de la sucesión es un grupo libre, el Splitting Lemma implica que la sucesión escinde, i.e., $H_1(C_1 \cap C) = \mathbb{Z}^2 \oplus \mathbb{Z} = \mathbb{Z}^3$.

Para $n = 2$ tenemos

$$\widetilde{H}_2(S_1) \oplus \widetilde{H}_2(S_2) = 0 \to \widetilde{H}_2(C_1 \cap C) \to \widetilde{H}_1(S_1 \cap S_2) = 0$$

así que $H_2(C_1 \cap C) = 0$. Ahora, podemos emplear la sucesión exacta de Mayer-Vietoris en X, la cual para $n = 2$ resulta en

$$\widetilde{H}_2(C_1 \cap C) = 0 \to \widetilde{H}_2(\mathbb{S}^2) = \mathbb{Z} \oplus \widetilde{H}_2(C) = 0 \to \widetilde{H}_2(X) \to \widetilde{H}_1(C_1 \cap C) = \mathbb{Z}^3 \to \widetilde{H}_1(\mathbb{S}^2) \oplus \widetilde{H}_1(C) = 0$$

y nuevamente gracias al Splitting Lemma obtenemos $H_2(X) = \mathbb{Z}^4$.
Para $n = 1$:

$$\widetilde{H}_1(\mathbb{S}^2) \oplus \widetilde{H}_1(C) = 0 \to \widetilde{H}_1(X) \to \widetilde{H}_0(C_1 \cap C) = 0$$

pues $H_0(C_1 \cap C) = \mathbb{Z}$. Así, concluimos que $H_1(X) = 0$, y por lo tanto

$$H_n(X) = \begin{cases} \mathbb{Z}^4 & \text{si} \quad n = 2 \\ \mathbb{Z} & \text{si} \quad n = 0 \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases}$$

□

[2]Este cálculo en realidad no es necesario, pues es claro que $C_2 \cup C_3$ es contractible (contraer primero un plano y luego el otro), pero se ha incluido para ilustrar que en Mayer-Vietoris se debe tener cuidado con la partición elegida.

[3]Por ejemplo, en cada punto de intersección añadir un trozo de la otra esfera, de tal modo que la interseccción de los abiertos serán dos intervalos los cuales se pueden contraer a dos puntos.