UNIVERSIDAD TECNICA FEDERICO SANTA MARIA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Profesor: Pedro Montero
Ayudante: Sebastián Fuentes

Ayudantía 9 Topología Pauta

Homología celular

27 de mayo de 2024

El objetivo de esta ayudantía será estudiar un tipo especial de homología, la *homología celular*, una herramienta que resulta ser muy útil para calcular los grupos de homología de espacios que admiten una estructura de CW-complejo (ver Ayudantía 8).

Problema 1. Considere una colección de espacios topológicos basados (X_α, x_α) tales que forman un buen par (i.e., existe una vecindad de cada x_α que se retracta por deformación a dicho punto). Demuestre que hay isomorfismos

$$\bigoplus_\alpha \tilde{H}_n(X_\alpha) \xrightarrow{\sim} \tilde{H}_n\left(\bigvee_\alpha X_\alpha\right) \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Demostración. Notar en primer lugar que la unión disjunta $(\coprod_\alpha X_\alpha, \coprod_\alpha \{x_\alpha\})$ es también un buen par. Notamos ahora que

$$\coprod_\alpha X_\alpha / \coprod_\alpha \{x_\alpha\} \cong \bigvee_\alpha X_\alpha$$

y gracias a una Proposición vista en clases (ver página 21 del apunte) tenemos que

$$\tilde{H}_n\left(\bigvee_\alpha X_\alpha\right) \cong H_n\left(\coprod_\alpha X_\alpha, \coprod_\alpha \{x_\alpha\}\right) \cong \bigoplus_\alpha H_n(X_\alpha, x_\alpha) \cong \bigoplus_\alpha \tilde{H}_n(X_\alpha) \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

recordando que la homología reducida es simplemente la homologia relativa a un punto. □

Definición. Sea X un CW-complejo. Decimos que X es de dimensión finita $\dim(X) = n$ si la descomposición celular de X considera n-células, pero no existen m-células para $m > n$ en la descomposición celular de X. Más especificamente, el espacio $X = X^n$ es su $n-$esqueleto.

En esta ayudantía consideraremos únicamente CW-complejos de dimensión finita.

Problema 2. El objetivo de este problema es caracterizar los grupos de homología de un CW-complejo de dimensión finita. Sea X un CW-complejo de dimensión finita.

1. Muestre que
$$H_k(X^n, X^{n-1}) = \begin{cases} \bigoplus_{\alpha \in I_n} \mathbb{Z} & \text{si} \quad k = n \\ 0 & \text{si} \quad k \neq n \end{cases}$$
donde X^n denota el n-esqueleto de X e I_n denota el conjunto de n-células en la descomposición celular de X.
2. Demuestre que $H_i(X) = 0$ para $i > n = \dim(X)$ y que $H_n(X)$ es un grupo abeliano libre.
3. Pruebe que la base de $H_n(X)$ está en correspondencia biyectiva con las n-células si no existen $(n+1)$-células o $(n-1)$-células.
Indicación: Note que el morfismo $H_k(X^n) \to H_k(X)$ inducido por la inclusión es un isomorfismo para $k < n$.
4. Si X posee k n-células entonces $H_n(X)$ es generado por a lo mas k elementos.

Demostración.

1. En primer lugar, veamos que el par (X^n, X^{n-1}) es un buen par. En efecto, si consideramos el par $(\mathbb{B}^n, \mathbb{S}^{n-1})$ consistente de una n-célula y su borde, este es un buen par pues el abierto $\mathbb{B}^n \setminus \{0\}$ se retracta por deformación en $\mathbb{S}n-1$. Ahora, dado Y espacio topológico y un mapeo $f : \mathbb{S}^{n-1} \to Y$, si consideramos el espacio $X := Y \cup_f \mathbb{B}^n$ creado al pegar $\mathbb{B}^n$ a Y a lo largo de f, entonces (X, Y) es un buen par pues el $X \setminus \{0\}$ es un abierto el cual se retracta por deformación en Y.
   Vimos en la Ayudantía 8 que el cociente X^n/X^{n-1} es isomorfo al bouquet $\bigvee_\alpha \mathbb{S}^n$ de n-esferas, y el número de esferas en este producto corresponde exactamente al número de n-células en la descomposición de X. De la Proposición vista en clases acerca de buenos pares y el Problema 1., obtenemos isomorfismos
$$H_k(X^n, X^{n-1}) \cong \tilde{H}_k(X^n/X^{n-1}) \cong \tilde{H}_k\left(\bigvee_{\alpha\in I_n} \mathbb{S}^n\right) \cong \bigoplus_{\alpha\in I_n} \tilde{H}_k(\mathbb{S}^n)$$
   y la conclusión se sigue del hecho que conocemos explícitamente los grupos de homología de la esfera.

2. Para $n = 0$ esto es claro pues $X = X^0$ es un espacio discreto. Por inducción en la dimensión supongamos que X tiene dimensión k y que $H_i(X^{k-1}) = 0$. Del ítem anterior sabemos que $H_i(X^k, X^{k-1}) = 0$ cuando $i \neq k$, y por tanto la sucesión exacta larga asociada al par (X^k, X^{k-1}) se ve como
$$\cdots \to 0 = H_i\left(X^{k-1}\right) \to H_i\left(X^k\right) \to H_i\left(X^k, X^{k-1}\right) = 0 \to \cdots$$
   y la exactitud da que $H_i(X^k) = 0$.
   Para mostrar que $H_n(X)$ es libre consideramos nuevamente la sucesión exacta larga asociada al par (X^n, X^{n-1})
$$\cdots \to 0 = H_n\left(X^{n-1}\right) \to H_n\left(X^n\right) = H_n(X) \xrightarrow{f} H_n\left(X^n, X^{n-1}\right) \to \cdots$$
   i.e., f es inyectiva y como $H_n\left(X^n, X^{n-1}\right)$ es libre, $H_n(X)$ también pues es un subgrupo de un grupo abeliano libre.

3. Demostremos en primer lugar la indicación. Para el par $(X^n X,^{n-1})$, observemos la siguiente parte de su sucesión exacta larga
$$H_{k+1}\left(X^n, X^{n-1}\right) \to H_k\left(X^{n-1}\right) \to H_k\left(X^n\right) \to H_k\left(X^n, X^{n-1}\right)$$
   Si $k \neq n$, el último término es 0 por 1., y si $k \neq n-1$ el primer término es también 0, deduciendo que $H_k\left(X^{n-1}\right) \cong H_k\left(X^n\right)$. De esta forma, observamos que $H_k(X^n) \cong H_k(X)$ cuando $k < n$.

   Suponemos ahora que X no posee $(n+1)-$células ni $(n-1)$-células. En este caso $X^{n-1} = X^{n-2}$. Por tanto la sucesión exacta larga del par (X^n, X^{n-2}) es
$$\cdots \to H_n\left(X^{n-2}\right) \to H_n\left(X^n\right) \xrightarrow{f} H_n\left(X^n, X^{n-2}\right) \to H_{n-1}\left(X^{n-2}\right) \to \cdots$$
   y dado que no hay $(n+1)$-células, la indicación implica que $H_n(X) \cong H_n\left(X^{n+1}\right) \cong H_n\left(X^n\right)$. Por otro lado, del punto 2. sabemos que $H_n\left(X^{n-2}\right) = H_{n-1}\left(X^{n-2}\right) = 0$, y por hipótesis $H_n\left(X^n, X^{n-1}\right) = H_n\left(X^n, X^{n-2}\right)$. Así, f es un isomorfismo y el ítem 2. nos dice justamente que $H_n(X)$ es libre con base dada por las n-células.

4. Del ítem 2. ya sabemos que $H_n(X)$ es libre, y por el mismo ítem sabemos que el número de generadores de este grupo, no excede al número de n-células de X. Probaremos que esto también se mantiene para $H_n(X^{n+1})$ (i.e., que su número de generadores no excede al número de n-celulas).
   Consideremos la sucesión exacta larga asociada al par (X^{n+1}, X^n)
$$\cdots \to H_{n+1}\left(X^{n+1}, X^n\right) \to H_n\left(X^n\right) \xrightarrow{f} H_n\left(X^{n+1}\right) \to H_n\left(X^{n+1}, X^n\right) \to \cdots$$
   Sabemos que $H_n(X^{n-1}, X^n) = 0$ y por lo tanto f es sobreyectiva, probando la afirmación hecha sobre $H_n(X^{n+1})$. De manera inductiva concluimos el resultado para $H_n(X)$.

□

Observación. Dado un CW-complejo X de dimension finita $n = \dim(X)$, el Problema 2. permite observar los siguientes hechos:

1. $H_i(X^k) = 0$ cuando $i > k$. Esto es una manifestación del hecho que el k-esquelo X^k solo posee información hasta dimensión k.
2. $H_i(X^k) \cong H_i(X)$ para $i < k$. Esto es esperable dado que el grupo H_i guarda información de dimensión i, y por tanto las estructuras de dimensión superior no alterarán este grupo.
3. $H_i\left(X^k\right) \twoheadrightarrow H_i(X)$ es sobreyectivo cuando $i = k$. Esto es, el k-esqueleto X^k posee la información k-dimensional, pero NO las relaciones que pudieran existir.

El hecho que el grupo de homología relativa $H_n(X^n, X^{n-1})$ esté generado por las n-células X da la idea de que estos grupos deberían definir un complejo de cadenas.

Problema 3. Sea X un CW-complejo. Usando las sucesiones exactas largas asociadas a los pares (X^{n+1}, X^n) construya morfismos

$$d_n- : H_n(X^n, X^{n-1}) \to X_{n-1}(X^{n-1}, X^{n-2}) \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

de tal modo que $d_{n+1} \circ d_n = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Demostración. Consideramos las sucesiones exactas largas de los pares $(X^{n+1}, X^n), (X^n, X^{n-1}), (X^{n-1}, X^{n-2})$, las cuales son de la forma:

$$H_{n+1}(X^{n+1}, X^n) \xrightarrow{\delta_{n+1}} H_n(X^n) \xrightarrow{i_{n+1}} H_n(X^{n+1}) \xrightarrow{\pi_n} H_n(X^{n+1}, X^n) = 0$$

$$0 = H_n(X^{n-1}) \longrightarrow H_n(X^n) \longrightarrow H_n(X^n, X^{n-1}) \longrightarrow H_{n-1}(X^{n-1})$$

$$0 = H_{n-1}(X^{n-2}) \to H_{n-1}(X^{n-1}) \to H_{n-1}(X^{n-1}, X^{n-2})$$

donde los morfismos i_n, π_n son aquellos inducidos en cohomología por la inclusión y la proyección al cociente (en realidad son $H_n(i), H_n(\pi)$) y δ_n son los morfismos de conexión. Las anulaciones se tienen gracias al Problema 2. Juntando estas sucesiones obtenemos el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & & & 0 & \\
0 \arrow[dr] & & H_n(X^{n+1}) \cong H_n(X) \arrow[ur] & & \\
 & H_n(X^n) \arrow[ur, "i_n"] \arrow[dr, "\pi_n"] & & & \\
\cdots \to H^{n+1}(X^{n+1}, X^n) \arrow[ur, "\delta_{n+1}"] \arrow[rr, "d_{n+1}"] & & H_n\left(X^n, X^{n-1}\right) \arrow[rr, "d_n"] \arrow[dr, "\delta_n"] & & H_{n-1}\left(X^{n-1}, X^{n-2}\right) \to \cdots \\
 & & & H_{n-1}(X^{n-1}) \arrow[ur, "\pi_{n-1}"] & \\
 & & 0 \arrow[ur] & &
\end{tikzcd}$$

en donde hemos definido $d_n = \delta_n \circ \pi_{n-1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, y por exactitud estos mapeos verifican la relación $d_{n+1} \circ d_n = 0$, pues $\delta_n \circ \pi_n = 0$.

□

El problema anterior motiva la siguiente definición.

Definición. Definimos el *grupo de n-cadenas celulares* de un CW-complejo X como

$$C_n^{CW}(X) := H_n(X^n, X^{n-1})$$

Gracias al Problema 2. obtenemos un complejo de cadenas

$$\ldots \to C_n^{CW}(X) \xrightarrow{d_n} C_{n-1}^{CW}(X) \to \ldots \xrightarrow{d_1} C_0^{CW}(X) \to 0$$

llamado *complejo de cadenas celulares*. Los *grupos de homología celular*, denotados $H_k^{CW}(X)$ corresponden a los grupos de homología de este complejo.

Problema 4. Sea X un CW-complejo. Demuestre que los grupos de homología singular y celular

$$H_n^{CW}(X) \cong H_n(X)$$

son isomorfos.

Demostración. Por definición de la homología de un complejo, lo que necesitamos probar es que hay un isomorfismo

$$H_n(X) \cong \ker(d_n)/\operatorname{Im}(d_{n+1})$$

Esto lo haremos analizando el diagrama construido en el Problema 3., en el cual todas las diagonales son exactas. Por esta exactitud vemos que

$$H_n(X) \cong H_n(X^n)/\operatorname{Im}(\delta_{n+1})$$

Además, como π_n es inyectivo, se restringe a un isomorfismo $\operatorname{Im}(\delta_{n+1}) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Im}(\pi_n \circ \delta_{n+1}) = \operatorname{Im}(d_{n+1})$, y por exactitud se tiene que $\pi_n : H_n(X^n) \xrightarrow{\sim} \ker(\delta_n)$.
Por otro lado, π_{n-1} es inyectivo, resultando esto en que $\ker(\delta_n) = \ker(d_n)$. Así, π_n induce el siguiente isomorfismo:

$$H_n(X) \cong H_n(X^n)/\operatorname{Im}(\delta_{n+1}) \xrightarrow[j_n]{\sim} \ker(\delta_n)/\pi_n(\operatorname{Im}(\delta_{n+1})) = \ker(d_n)/\operatorname{Im}(d_{n+1}) = H_n^{CW}(X)$$

□