UNIVERSIDAD TECNICA
FEDERICO SANTA MARIA
DEPARTAMENTO
DE MATEMÁTICA

Profesor: Pedro Montero
Ayudante: Sebastián Fuentes

Pauta Ayudantía 8 Topología

CW complejos

13 de mayo de 2024

Recuerdo. *Sean X, Y espacios topológicos, $A \subseteq X$ subespacio y $f : A \to Y$ función continua. El pegado de X a Y mediante f es el espacio topológico cociente*

$$X \cup_f Y := (X \amalg Y)/\mathscr{R},$$

donde $\mathscr{R}$ es la relación de equivalencia generada por $x \sim f(x)$ para todo $x \in A$.

Problema 1(propiedad universal del pegado). Sean X, Y espacio topológico, $A \subseteq X$ subespacio y $f : A \to Y$ mapeo. Demuestre que para todo espacio topológico Z junto con mapeos $g : X \to Z, h : Y \to Z$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[d, hook] & Y \arrow[d, "h"] \\
X \arrow[r, "g"] & Z
\end{tikzcd}$$

existe un único mapeo $X \cup_f Y \to Z$ tal que el diagrama

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[d, hook] & Y \arrow[d] \arrow[ddr, bend left, "h"] & \\
X \arrow[r] \arrow[drr, bend right, "g"'] & X \cup_f Y \arrow[dr, dashed, "\exists!"] & \\
& & Z
\end{tikzcd}$$

es conmutativo.

Demostración. Consideremos $i_X : X \hookrightarrow X \amalg Y, i_Y : X \hookrightarrow X \amalg Y$ las inclusiones canónicas en la union disjunta, y $\pi : X \amalg Y \twoheadrightarrow X \cup_f Y$ la proyección al cociente asociada a la relacion $\mathscr{R}$ del pegado. Por definición de $\mathscr{R}$ el diagrama

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[d, hook] & Y \arrow[d, "\pi \circ i_Y"] \\
X \arrow[r, "\pi \circ i_X"] & X \cup_f Y
\end{tikzcd}$$

es conmutativo. Por otro lado, la propiedad universal de la union disjunta da un único mapeo $\varphi : X \amalg Y \to Z$ tal que el diagrama

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, hook, "i_X"] \arrow[dr, "g"'] & X \amalg Y \arrow[d, dashed, "\exists! \varphi"] & Y \arrow[l, hook', "i_Y"'] \arrow[dl, "h"] \\
& Z &
\end{tikzcd}$$

es conmutativo. Además la propiedad universal del cociente nos permite factorizar φ a través de π, dando como resultado la existencia de un único mapeo $\psi : X \cup_f Y \to Z$ tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} X \amalg Y \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\pi"] & Z \\ X \cup_f Y \arrow[ur, dashed, "\exists ! \psi"'] & \end{tikzcd}$$

Juntando los diagramas anteriores vemos que el morfismo buscado corresponde justamente a ψ, el cual es único por construcción. $\square$

CW-complejos

Buscamos una forma de modelar espacios topológicos interesantes en términos de otros más sencillos. La idea es entonces construir espacios como pegados de ciertas unidades mínimas.

Definición 1. Sea $n \in \mathbb{N}^{\geq 1}$. Una célula de dimensión n o n-célula es un espacio topológico homeomorfo a la bola unitaria cerrada $\overline{\mathbb{B}^n} \subseteq \mathbb{R}^n$. Decimos que un espacio topológico X es obtenido por unión de $n-$celulas si existe un espacio topológico Y y una familia $(e_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ de n-células y mapeos $f_\alpha : \partial e_\alpha \to Y$ tales que

$$(\amalg_{\alpha\in\Lambda} e_\alpha) \cup_{\amalg_{\alpha\in\Lambda} f_\alpha} Y \cong X$$

Un espacio topológico X es un *CW complejo* si existe una familia de subespacios $(X^n)_{n\in\mathbb{N}}$, y definiendo $X^{-1} = \emptyset$, tal que

1. X^n es obtenido por unión de $n-$células sobre el espacio X^{n-1}.
2. $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} X^n$ tiene la topología coherente definida por $(X^n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Decimos que X^n es el *n-esqueleto* de X y nos referimos a la familia $(X^n)_{n\in\mathbb{N}}$ como una *descomposición celular* de X.

Observación 2. El problema 1 nos da una definición alternativa de CW-complejo en términos "categóricos". Un CW-complejo es un espacio topológico X junto con una cadena ascendente de subespacios

$$\emptyset := X^{-1} \subseteq X^0 \subseteq X^1 \subseteq \cdots \subseteq X$$

tal que

1. $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} X^n$.
2. para todo $n \in \mathbb{N}$ existe un diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} \coprod_{i\in I_n} S_i^{n-1} \arrow[r, "\alpha_n"] \arrow[d, hook] & X^{n-1} \arrow[d] \\ \coprod_{i\in I_n} D_i^n \arrow[r, "\beta_n"] & X^n \end{tikzcd}$$

Usualmente los mapeos α_n son llamados *mapeos de adjunción* y los β_n son llamados *mapeos característicos.*

Problema 2. Describa descomposiciones celulares de los siguientes espacios:

1. La recta $\mathbb{R}$.
2. La esfera $\mathbb{S}^n$.
3. El toro $\mathbb{T}^2 \cong \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$.

4. El espacio proyectivo $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$.

Solucion.

1. Consideramos $X^{(0)} := \mathbb{Z}$ como conjunto de 0-células, i.e., una unión disjunta de infinitos puntos numerable. Consideramos como $1-$células los segmentos $[n, n+1]$ para todo $n \in \mathbb{Z}$. De esta forma el pegado ocurre en todos los enteros.

2. Notamos que $\mathbb{S}^n$ se escribe como una unión disjunta $\mathbb{S}^n = \mathbb{S}^n_{++} \cup \mathbb{S}^{n-1} \cup \mathbb{S}^n_{--}$ donde

$$\mathbb{S}^n_{++} = \{(x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{S}^n, x_n > 0\}, \qquad \mathbb{S}^n_{--} = \{(x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{S}^n, x_n < 0\}$$

donde hacemos la identificación $\{x_n = 0\} \cap \mathbb{S}^n \cong \mathbb{S}^{n-1}$. Considerando esto podemos dar inductivamente una descomposición celular de $\mathbb{S}^n$ de tal modo que el k-esqueleto sea isomorfo a $\mathbb{S}^k$. Esto se construye de la siguiente manera:

- considerar 2 0-células, i.e., la unión disjunta de dos puntos.
- considerar 2 1-células, que corresponden a dos copias del intervalo $[0, 1]$, y pegar cada extremo en cada 0-célula.
- Suponiendo ya construido el $(n-1)$-esqueleto, el cual será $\mathbb{S}^{n-1}$, consideramos dos n-células $\overline{\mathbb{B}^n}$, las cuales identificamos con $\mathbb{S}^n_+ := \mathbb{S}^n_{++} \cup \mathbb{S}^{n-1}$ y $\mathbb{S}^n_- := \mathbb{S}^n_{--} \cup \mathbb{S}^{n-1}$ y pegamos a lo largo de $\mathbb{S}^{n-1}$.

3. Consideramos el punto $(0, 0)$ como 0-esqueleto, y le unimos los intervalos $[0, 1] \times \{0\}$ y $\{0\} \times [0, 1]$ como 1-células. Esto da el borde de un cuadrado con los lados identificados. Consideramos ahora el cuadrado $[0, 1]^2$ como 2-célula y lo pegamos al borde de este cuadrado.

4. El espacio $\mathbb{P}^0(\mathbb{R}) \cong \{*\}$ es un punto. Por induccion suponemos que $\mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{R})$ posee una descomposicion celular tal que $X^{(k)} \cong \mathbb{P}^k(\mathbb{R})$ para todo $k \in \{0, \dots, n-1\}$. Sabemos que $\mathbb{P}^n(\mathbb{R}) \cong \mathbb{S}^n/\sim$ es el cociente de la $n-$esfera por puntos antípodas, y por lo tanto podemos expresar el espacio proyectivo como una unión disjunta

$$\mathbb{P}^n(\mathbb{R}) = \mathbb{B}^n \cup (\mathbb{S}^{n-1}/\sim) \cong \mathbb{B}^n \cup \mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{R})$$

Vemos entonces que $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ adquiere una estructura de CW-complejo pegando a lo largo del mapeo al cociente $\mathbb{S}^n \twoheadrightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$.

□

Problema 3. Considere X un CW-complejo.

1. Demuestre que para cada $k \in \mathbb{N}$ el cociente X^k/X^{k-1} es homeomorfo a un bouquet $\bigvee^\mu \mathbb{S}^k$ de esferas de dimensión k.

2. Muestre que un conjunto compacto de X está contenido en el interior de finitas células.

3. Demuestre que X es conexo por caminos si y sólo si su $1-$esqueleto X^1 lo es.
Indicación. Muestre que si existe un camino entre dos puntos en X^{n+1} entonces existe un camino entre ellos contenido en X^n.

Demostración.

1. Supongamos que $n \in \mathbb{N}$ es tal que $X^n \neq \emptyset$, i.e., realmente hay n-células. Denotemos por (e_α) dichas células. Notemos entonces que X^n por definición se construye pegando X^{n-1} con los bordes ∂e_α, y por tanto al cocientar por X^{n-1}, cada e_α se convierte en $\mathbb{S}^n$. Dado que en X^n/X^{n-1} se identifican en un solo punto todos los puntos provenientes de X^{n-1}, todos los bordes de todas las n-células se identifican, obteniendo el espacio $\bigvee^\mu \mathbb{S}^n$ donde μ es el número de n-células de la descomposicion celular de X.

2. Sea $C \subseteq X$ compacto y supongamos que intersecta una cantidad infinita de células en su interior. Podemos elegir una sucesión de puntos $S = \{x_1, x_2, \dots\} \subseteq C$ tal que cada uno esté en el interior de una célula distinta. Como X posee la topología coherente definida por sus n-esqueletos, cada $\{x_i\}$ es cerrado, y por tanto el conjunto S es discreto. Dado que está contenido en un compacto debe ser finito.

3. Probaremos en primer lugar que si $x, y \in X$ son puntos contenidos en el n-esqueleto de X y existe un camino $x \rightsquigarrow y$ en X entonces existe en $X^{(n)}$. Sea $\gamma : I \to X^n$ un camino de x a y. Como $\gamma(I)$ es compacto, este conjunto está contenido en X^N para algún $N \geq n+1$. Consideremos una N-célula e_i tal que $\gamma(I) \cap e_i \neq \emptyset$. Podemos considerar

$$t_0 := \text{ínf}\,\{t \in [0,1], \gamma(t) \in \text{int}(e_i)\} \quad \text{y} \quad t_1 := \sup\{t \in [0,1], \gamma(t) \in \text{int}(e_i)\}$$

   Como $\text{int}(e_\alpha)$ es un abierto de X^N tenemos que $\gamma(t_0) \notin \text{int}(e_i), \gamma(t_1) \notin \text{int}(e_i)$, sin embargo, ambos estan en ∂e_i. Ahora, este borde es conexo por caminos pues $\partial e_i \cong \mathbb{S}^{N-1}$, y por tanto podemos definir un camino reemplazando la parte de γ en e_i por un camino contenido en ∂e_i. Podemos hacer esto en cada $N-$célula y por tanto obtener que hay un camino en X^{N-1} conectando ambos puntos. Por recurrencia tenemos que estos puntos se pueden conectar en X^n.
   Notemos que lo anterior demuestra inmediatamente la dirección ($\Rightarrow$). Para la otra dirección, probaremos por inducción que X^n es conexo por caminos para todo $n \in \mathbb{N}$. El caso $n = 1$ es verdad por hipótesis. Supongamos que $X^{(n)}$ es conexo por caminos y sean $x, y \in X^{(n+1)}$. Si ambos están en el n-esqueleto no hay nada que probar, así que asumamos que $x \in X^{n+1} \setminus X^n$, y por ende pertenece al interior de una $(n+1)$-célula.
   Dado que las células son conexas por caminos, podemos unir x un punto en el borde la $(n+1)$-célula a la que pertenece, y de la misma manera podemos unir y a un punto en el borde de su $(n+1)$-célula si es que también perteneciera a una. Dado que por hipotesis X^n es conexo por caminos se concluye.

$\square$